

УДК 539.374

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ПОТОКЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ ВБЛИЗИ ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Флитман Л. М.

Изучается высокоскоростное течение несжимаемой пластической среды около жесткой шероховатой поверхности, вдоль которой имеет место проскальзывание. Предполагается, что отношение предела текучести среды к скоростному напору в потоке мало. Строится асимптотическое представление решения на основе предложения М. А. Лаврентьева о том, что для течения с такими свойствами главную часть поля скоростей и напряжений составляют соответствующие поля идеальной жидкости. Получены уравнения, описывающие течение в пограничном слое. Методами группового анализа найдены их решения для течений около клиньев и конусов. Оценена толщина пограничного слоя.

1. Рассмотрим высокоскоростное течение несжимаемой пластической среды около неподвижной непроницаемой поверхности, вдоль которой имеет место проскальзывание частиц. Напряжения в среде удовлетворяют условию пластичности Мизеса с константой k [1]. Предполагая, что

$$(1.1) \quad f = \sqrt{k / (\rho c^2)} \ll 1$$

где ρ — плотность среды, c — характерная скорость потока. Условие (1.1) означает, что уровень девиаторных компонент напряжения мал по сравнению со скоростным напором потока. Оно может выполняться при течении с высокими скоростями деформирования. В силу (1.1) можно ожидать, что поля скоростей и напряжений будут близки соответствующим полям в аналогичной задаче для идеальной жидкости.

Модель идеальной жидкости широко использовалась при расчетах интенсивно деформирующихся твердых материалов [2]. Однако в некоторых случаях полезно знать величину поправки, связанной с прочностью среды. Этот вопрос для нескольких конкретных задач был рассмотрен ранее [3]. Построено [4] разложение полей скоростей и напряжений по малым расстояниям от границы для медленных течений ($f = \infty$). Пограничный слой в вязкопластической среде исследовался [5—7] в предположении отсутствия проскальзывания частиц вдоль границы.

Ниже с использованием результатов [3] в качестве наводящих соображений получены уравнения, описывающие течение в погранслое, значительно отличающиеся от соответствующих уравнений для вязкой жидкости и [5—7]. Методами группового анализа [8] найдены точные решения, имеющие погранслойный характер¹.

Введем эйлерову криволинейную систему координат (x^1, x^2, x^3) , связанную с обтекаемой поверхностью S , являющейся координатной поверхностью $x^3 = 0$. Пусть (x^1, x^2) образуют сеть на S , а линии x^3 ортогональны ей и координата x^3 равна длине дуги от точки наблюдения до S . В качестве масштаба скорости $u = (u^1, u^2, u^3)$, давления p , девиатора напряжений $\mathbf{T} = \|\tau^{ij}\|$ и времени t возьмем соответственно характерную скорость потока c , скоростной напор ρc^2 , константу пластичности k и l/c (l — единица

¹ Флитман Л. М. О пограничном слое в некоторых задачах динамики пластической среды. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1980, № 150. 64 с.

длины). Тогда уравнения сохранения массы и импульса будут

$$(1.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad d\mathbf{u}/dt = -\operatorname{grad} p + f^2 \operatorname{div} \mathbf{T}$$

Будем считать, что в окрестности поверхности S среда находится в пластическом состоянии и описывается уравнениями Мизеса — Леви [1]

$$(1.3) \quad \mathbf{T} = N\boldsymbol{\varepsilon}, \quad 2I(\mathbf{T}) \equiv \tau_j^i \tau_i^j = 2$$

Здесь $I(\mathbf{T})$ — второй инвариант девиатора напряжений, $N = N(\boldsymbol{\varepsilon})$ — коэффициент пропорциональности девиаторов, определяемый из второго соотношения (1.3), $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon^{ij})$ — тензор скоростей деформации, являющийся девиатором в силу первого уравнения (1.2),

$$2\varepsilon^{ij} = \nabla^i u^j + \nabla^j u^i$$

∇^i — операторы контравариантного дифференцирования в пространстве [9].

Для уравнений (1.2), (1.3) поставим на S ($x^3 = 0$) условие непроницаемости и зададим вектор касательного напряжения

$$(1.4) \quad u^3 = 0$$

$$(1.5) \quad \tau^{3\alpha} = f^\alpha(x^1, x^2, t) \quad (\alpha = 1, 2)$$

Вместо (1.5) можно поставить условие [10] (ν — коэффициент трения)

$$\tau^3 = \min(1, \nu(pf^{-2} - \tau^{33})) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^{-1}$$

Это условие может иметь место, если нормальное напряжение на S — сжимающее. Оно означает, что проскальзывание вдоль S происходит либо в режиме сухого трения (при этом $|\tau^3| < 1$), либо $|\tau^3| = 1$, т. е. достигает максимальной величины, допускаемой условием пластичности. При очень малых ν и выполнении условия (1.4) обсуждаемое условие является частным случаем (1.5), если направление скорости \mathbf{u} на S известно.

2. Предположение (1.1) приводит к появлению малого параметра f^2 в (1.2). При $f = 0$ (1.2) превращается в уравнения для идеальной жидкости, что согласуется со сказанным в начале п. 1. Обозначим такое поле скоростей, удовлетворяющее условию (1.4), через \mathbf{v} , соответствующее поле давления — через q . Тогда из (1.3) по известному полю \mathbf{v} легко найти \mathbf{T} . После этого можно найти поправку к скорости из (1.2), линеаризуя их около \mathbf{v} ; поправки к скорости и давлению будут порядка f^2 .

Представим полные поля \mathbf{u} и p в виде

$$(2.1) \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} + f^2 \mathbf{v}_1, \quad p = q + f^2 q_1$$

Тогда для установившегося течения при безвихревом поле \mathbf{v} из (1.2) согласно сказанному выше имеем

$$(2.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{grad}(q_1 + \mathbf{v} \mathbf{v}_1) - [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}_1] = \operatorname{div} \mathbf{T}$$

Уравнения (2.2) для поправок линейные, а найденная по \mathbf{v} величина $\operatorname{div} \mathbf{T}$ играет роль массовых сил. Возникла ситуация, исследованная [3] для конкретных примеров. Очевидно, что линии тока поля \mathbf{v} — характеристики системы (2.2). Поэтому для (2.2) можно поставить на обтекаемой поверхности S только условие (1.4), но (1.5) уже поставить нельзя. Указанная процедура может быть использована для нахождения поправок порядка f^4 и выше. Так строится внешнее асимптотическое разложение решения [11], не удовлетворяющее условию (1.5). Для удовлетворения (1.5) нужно построить внутреннее асимптотическое разложение вблизи S — пограничный слой (П.С.).

3. При выводе уравнений ПС воспользуемся результатами [3] для формулировки основных гипотез. Представим искомые поля u и p в виде

$$(3.1) \quad u = v + fw, \quad p = q + f^2s$$

Здесь v и q — поля в идеальной жидкости, соответствующие $f = 0$, w, s — поправки.

Представление (3.1) предполагает проскальзывание частиц среды вдоль поверхности S и означает, что поля v и q дают главный вклад в искомые величины. Из соотношений (3.1) видно различие с классической постановкой задачи вязкой жидкости, где поправка к v имеет порядок v . Такое различие связано с тем, что в вязкой модели отсутствует проскальзывание и нет ограничений на величину касательного напряжения. В рассматриваемом случае допускается проскальзывание, так как касательные напряжения ограничены условием (1.3) и, по предположению, имеет место соотношение (1.1).

В соответствии со сказанным в п. 2 предположим, что w, s, T вблизи S меняются быстро в том смысле, что их производные по x^3 велики. Положим, как и в [3]

$$(3.2) \quad x^3 = fz, \quad w = w(x^1, x^2, z, t), \quad s = s(x^1, x^2, z, t), \quad T = T(x^1, x^2, z, t)$$

Обозначим через e^{ij} скорости деформации, вычисленные по полю v согласно (1.3). Предположим еще, что не все они равны нулю. Это, очевидно, не значит, что v дает главный вклад в ϵ . Сделанная гипотеза означает, что рассматриваются лишь такие v , что вблизи поверхности S частицы, двигаясь, деформируются. Иными словами, предполагается, что в окрестности S имеет место диссипация энергии. Таким образом, из рассмотрения выпадают задачи, в которых около S имеется зона течения с постоянными скоростями, например автомодельная задача о косом ударе [12]. В ней ПС отсутствует. В дальнейшем поля v и q предполагаем известными.

Отметим еще, что из (1.4) и (3.1) следует условие

$$(3.3) \quad w^3 = 0 \quad (z = 0)$$

Для T имеют место условия (1.5).

4. На основании предположений п. 3, учитывая, что v и q удовлетворяют уравнениям (1.2) при $f = 0$, отбрасывая члены более высокого порядка, чем f^2 , можно исключить из (1.2), (1.3) часть неизвестных и получить вблизи S уравнения ПС

$$(4.1) \quad w_{,t}^\alpha + v^\beta \nabla_\beta w^\alpha + w^\beta \nabla_\beta v^\alpha - z\phi w_{,z}^\alpha = \tau_{3,z}^\alpha$$

$$(4.2) \quad w_{,z}^\alpha + 2e_3^\alpha = 2\psi\tau_3^\alpha (1 - \tau_3^\beta \tau_\beta^3)^{-1/2} \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей переменной, ∇_β — оператор ковариантного дифференцирования на S [9], e_3^α — скорости деформации, вычисленные по полю v и взятые на S . Функции ϕ и ψ также зависят только от x^1, x^2 и выражаются через v

$$(4.3) \quad \phi = \nabla_\beta v^\beta, \quad 2\psi^2 = e_\beta^\alpha e_\alpha^\beta + e_\alpha^\alpha e_\beta^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Все характеристики поля v взяты при $x^3 = 0$.

Кроме (4.1), (4.2) из проекции (1.1) на нормаль к S получаем

$$(-s + \tau^{33})_{,z} = 0$$

Это соотношение означает, что полное нормальное напряжение σ^{33} вблизи поверхности S постоянно вдоль фиксированной нормали и такое, каким оно является во внешнем разложении, описанном в п. 2.

В качестве краевых условий для (4.1), (4.2) при $z = 0$ возьмем (1.5) и при $z = \infty$

$$(4.4) \quad w^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

Соотношение (4.4) представляет собой условие сращивания решения в ПС и внешнего разложения. Если оно выполнено, то при $z \rightarrow \infty$ величина T из ПС, очевидно, стремится к значению T из внешнего разложения, определяемому по v согласно сказанному в п. 2.

Рассмотрим теперь установившееся течение и примем в качестве координатных линий x^1 линии тока поля v . Уравнения (4.2) не изменятся, а (4.1) примут вид

$$(4.5) \quad v^1 \nabla_1 w^\alpha + w^\beta \nabla_\beta v^\alpha - z \varphi w_{,z}^\alpha = \tau_{3,z}^\alpha$$

Из (4.2) и (4.5) видно, что поверхности $x^2 = \text{const}$ — характеристики этой системы, переменная x^2 входит лишь как параметр. Иными словами, изучение потока в ПС может проводиться вдоль каждой линии тока поля v независимо. Этим уравнения (4.2) и (4.5) сильно отличаются от соответствующих уравнений в гидродинамике. Отмеченное обстоятельство упрощает задачу и делает более представительными результаты плоских и осесимметричных решений, которые приведены в [3] и ниже.

Если поле v безвихревое, то

$$(4.6) \quad e_3^\alpha = v^1 b_1^\alpha$$

Здесь b_1^α — компонента тензора, составленного из коэффициентов второй квадратичной формы S .

Пусть S — цилиндр или поверхность вращения, а течения v и w — плоские или осесимметричные, x^1 — длина дуги вдоль направляющей цилиндра или меридиана, отсчитываемая от точки торможения, и, кроме того, $\tau_3^2 = 0$. Тогда, обозначая $v^1 = v$, $w^1 = w$, $\tau_3^1 = \tau$, получим из (4.5), (4.2), (4.6)

$$(4.7) \quad (vw)_{,1} - z \varphi w_{,z} = \tau_{,z}, \quad w_{,z} - 2v/R = 2\psi (1 - \tau^2)^{-1/2} \tau$$

Здесь R — радиус кривизны направляющей или меридиана.

В соответствии с (4.3) имеем для плоской задачи $\varphi = \psi = v_{,1}$ и для осесимметричной $\varphi = v_{,1} + B^{-1} B_{,1} v$, $\psi^2 = \varphi^2 - B^{-1} B_{,1} v_{,1} v$. Здесь B — коэффициент первой квадратичной формы S , взятой в виде $(ds)^2 = (dx^1)^2 + B (dx^2)^2$.

Уравнения (4.7) аналогичны уравнениям, исследованным в [3].

Введем обозначения

$$(4.8) \quad x = \int_{x^1}^{x^1} \psi(\alpha) v(\alpha) d\alpha, \quad y = \psi(x^1) v(x^1) z, \quad u = vw$$

$$F(\tau) = 2\tau (1 - \tau^2)^{-1/2}, \quad \omega(x) = (v\psi)^{-2} (\varphi\psi - (v\psi)_{,1})$$

$$k(x) = 2v (\psi R)^{-1}$$

В новых переменных система (4.7) приобретает вид

$$(4.9) \quad u_{,y} = F(\tau) + k(x), \quad u_{,x} = \tau_{,y} + y\omega(x) u_{,y}$$

Эта система будет исследована в дальнейшем.

Для плоского течения внутри прямого угла, у которого сторона $x^1 = 0$ гладкая, а $x^3 = 0$ шероховатая, используя в качестве v известное выражение для идеальной жидкости [13], систему (4.9) приводим к нелинейному параболическому уравнению

$$\tau_{,yy} = 2(1 - \tau^2)^{-3/2} \tau_{,x}$$

Соображения симметрии, а также условия (1.5) и (4.4) позволяют сформулировать краевую задачу для системы (4.8) в виде

$$(4.10) \quad u = 0 \quad (x = 0), \quad \tau = \tau_0(x) \quad (y = 0), \quad u = 0 \quad (y = \infty)$$

Отметим также, что для ПС около конуса, обтекаемого уплотняющейся пластической средой с ударной волной, присоединенной к вершине (за фронтом среда несжимаема), из (4.9) следуют уравнения, полученные и исследованные в [3].

5. Уравнения ПС (4.1), (4.2) и их частный случай (4.9) с краевыми условиями (4.10) были получены в предположении, что такой слой существует. Доказательством этого предположения автор не располагает. Ниже приведены частные решения задачи (4.9) и (4.10), которые показывают, что, по крайней мере, в рассмотренных случаях сделанные предположения не приводят к противоречию. Эти решения интересны и сами по себе, а кроме того, дают представление о возможной толщине ПС и характере убывания решений. Некоторые решения (4.9) можно найти при помощи методов группового анализа дифференциальных уравнений [8]. Оказывается, что если $\omega(x)$ и $k(x)$ удовлетворяют условиям

$$(5.1) \quad \xi \omega_{,x} + \beta \omega = 0, \quad (\xi k_{,x})_{,x} = \xi \omega k_{,x}, \quad \xi = \alpha + \beta x$$

(α и β — произвольные постоянные), то уравнения (4.9) допускают группу.

Определив инварианты группы, можно найти точные решения нелинейной системы (4.9). Для $\omega = \text{const}$ и $k = 0$ такие решения указаны в [3]. Рассмотрим случай

$$(5.2) \quad \omega = v/x, \quad k = 0$$

Такие ω и k имеют место при плоском обтекании клиньев и осесимметричном обтекании конусов. Для клиньев полураствора λl в соответствии с (4.8) и известными выражениями для скоростей идеальной жидкости, обтекающей клин [13], имеем

$$(5.3) \quad v = \frac{1}{2\lambda} - 1, \quad x = \frac{1}{2} (x^1)^{1/(1/2+v)}, \quad y = \frac{z}{2v+1} (2x)^{1/2-v}$$

Аналогично для конуса полураствора λl будет

$$(5.4) \quad v = \frac{2-\mu}{2\mu}, \quad x = \frac{a}{2\mu} (x^1)^{2\mu}, \quad y = az (x^1)^{2\mu-1} \quad (a^2 = 1 + \mu + \mu^2)$$

При этом величины λ и μ связаны соотношением (P_α^1 — присоединенная функция Лежандра первого рода)

$$(5.5) \quad P_{1+\mu}^1(\cos \lambda l) = 0$$

Для острых конусов ($\lambda \ll 1$) приближенное решение (5.5) будет $2\mu = (\pi\lambda)^2$. При $\lambda = 1/2$ (осесимметричное натекание на плоскость) из (5.5) имеем $\mu = 1$.

Пользуясь тем, что выражения (5.2) удовлетворяют условиям существования группы (5.1), в соответствии с [8] будем разыскивать частично ин-

вариантные решения системы (4.9) в виде (b — произвольная постоянная)

$$(5.6) \quad \tau = \tau(t), u = x^{1/2}\theta(t), t = x^{-1/2}(y + bx^{-\nu})$$

Из (4.9) для τ и θ получаем систему в обыкновенных производных

$$(5.7) \quad \tau_{,t} + (2\nu + 1)t\tau(1 - \tau^2)^{-1/2} = \theta/2, \theta_{,t} = 2\tau(1 - \tau^2)^{-1/2}$$

В соответствии с (1.5), (4.4) и (5.10) для системы (5.7) следует поставить условия

$$(5.8) \quad \tau(t_0) = \tau_0 > 0, \theta(\infty) = 0$$

Отметим, что рассмотренная в [3] автомодельная задача об определении поля около расширяющегося и вращающегося цилиндра сводится к (5.7), (5.8).

Н. К. Балабаев сообщил автору доказательство того, что задача (5.7), (5.8) при $\nu > -1/2$ разрешима единственным образом. При этом было показано, что τ и θ монотонно стремятся к нулю, убывая и возрастая соответственно ($\tau > 0, \theta < 0$). Он провел также расчеты этой задачи для $\nu = 0, 1/2$ при различных τ_0 . Оказалось, что τ убывает не менее чем на порядок при изменении t от нуля до единицы.

Зная, что решение задачи (5.7), (5.8), стремящееся к нулю в бесконечности, существует, как в [3], можно получить его асимптотику при больших t

$$(5.9) \quad \tau = \tau_1 t^{-1/(2\nu+1)} \exp\left(-\left(\nu + \frac{1}{2}\right)t^2\right), \quad \theta = -t^{-1}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^{-1} \tau(t)$$

Для других ω и k , удовлетворяющих условиям (5.1), имеют место аналогичные результаты. Изложенное выше позволяет утверждать, что задача (4.9), (4.10) обладает решениями, имеющими погранслойный характер при $\omega > 0$.

6. Результаты п. 5 позволяют исследовать ПС, возникающий при обтекании клиньев и конусов. Рассмотрим плоский и осесимметричный случаи натекания на плоскость (угол полураствора клина или конуса равен $\pi/2$). Формулы (5.3) и (5.4) при этом дают соответственно $\nu = 0$ и $\nu = 1/2$.

Об изменении τ в ПС удобно судить по расположению линий уровня этой функции. В плоскости переменных (x^1, z) из (5.3), (5.4), (5.6) для линий уровня $t = \text{const}$ получаем

$$(6.1) \quad z + b(x^1)^{-(2\nu+1)} = (8\nu + 2)^{-1/2} t$$

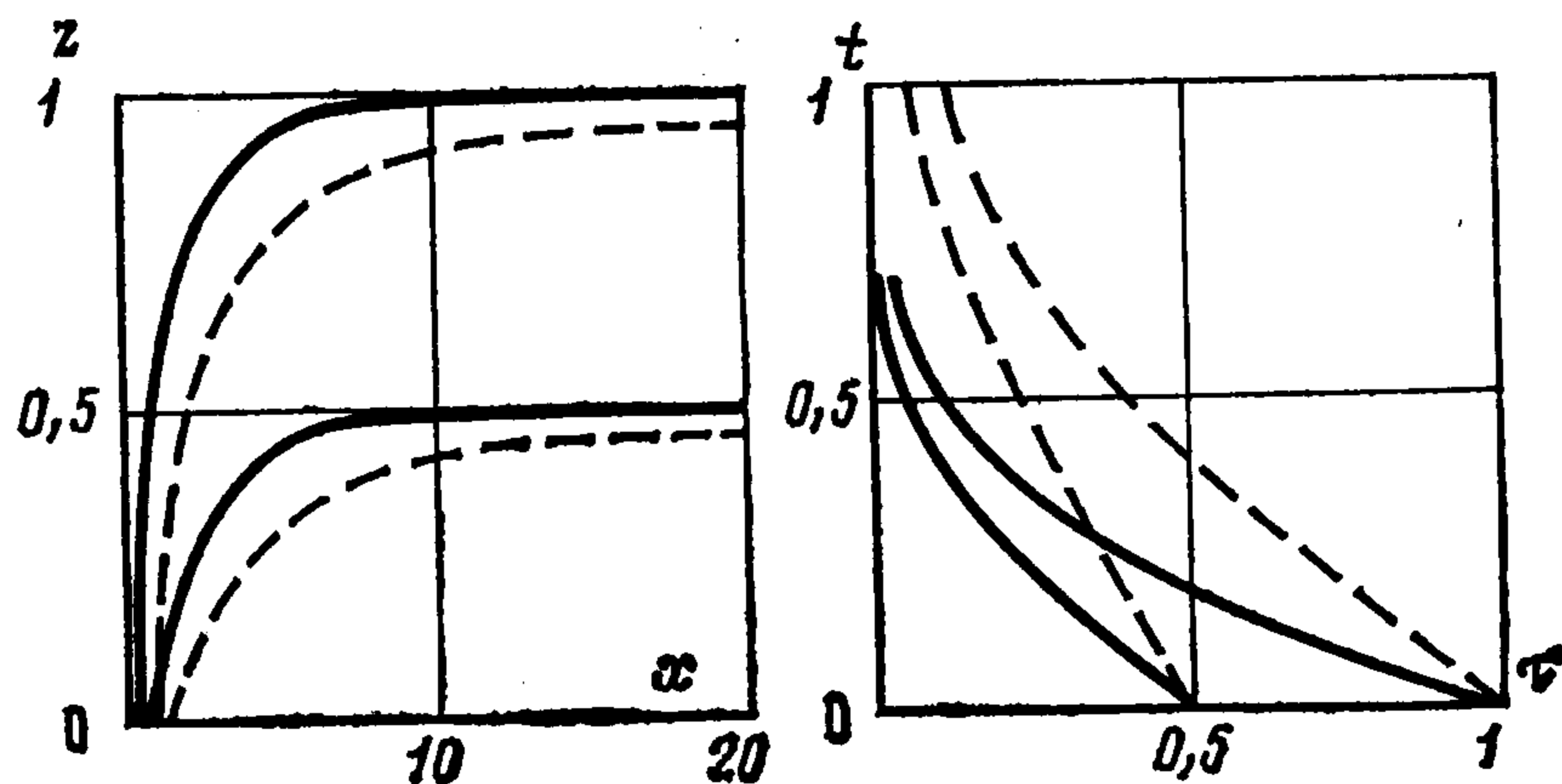
При $b > 0$ это монотонно растущие функции $z(x^1)$ с общей вертикальной асимптотой $x^1 = 0$ и горизонтальными асимптотами $z = t(8\nu + 2)^{-1/2}$. При $t = 0$ такой асимптотой является ось x . Это значит, что найденная функция τ на границе исследуемой области близка к постоянной, которой можно распорядиться положив, в частности, $\tau_0 = 1$. Около $x^1 = 0$ она стремится к нулю со всеми производными

$$\tau = \tau_2 x^1 \exp(-b_1 (x^1)^{-2(2\nu+1)})$$

(это следует из (5.6) и (6.1)). Выполнение условий в бесконечности следует из (5.9) и вида линий уровня $\tau(x^1, z)$ (6.1).

Таким образом, решение (5.7), (5.8) удовлетворяет уравнениям ПС, а его граничные значения близки к требуемым условиям (4.10). Можно даже сказать, что это решение «исправляет» поставленное краевое условие в окрестности точки торможения $x^1 = z = 0$. Условие (1.5) ставится там, где имеет место проскальзывание. Но в окрестности точки торможения трудно говорить о проскальзывании. Если судить по нулевому приближению ν , частица среды, находящаяся в некоторый момент в точке $x^1 = z = 0$, отходит от нее на конечное расстояние за бесконечное время. Поэтому найденное решение (5.7), (5.8) правильно описывает явление.

На фигуре изображена зависимость $\tau(x^1, z)$, вычисленная Н. К. Балабаевым. Слева нанесены линии уровня τ (сплошные соответствуют $\nu = 1/2$, пунктир — $\nu = 0$), справа — зависимости $\tau = \tau(t_1)$, где $t_1 = (8\nu + 2)^{-1/2} t$, полученные численным интегрированием задачи (5.7), (5.8) при двух значениях τ_0 . Значение τ на некоторой линии уровня определяется следующим образом. По величине ординаты z горизонтальной асимптоты рассматриваемой линии уровня согласно (6.1) находится $t_1 = z$. После этого по кривой $\tau = \tau(t_1)$ определяем соответствующее значение τ .



Существование горизонтальной асимптоты у линии уровня τ означает, что в рассматриваемом течении ПС имеет конечную толщину в отличие от вязкой жидкости.

Из фигуры видно, что при изменении t_1 от нуля до 1,5 величина τ убывает более чем в 10 раз. Если толщиной пограничного слоя называть расстояние, на котором происходит такое убывание, то, учитывая (3.2), можно сказать, что толщина пограничного слоя приближенно равна f .

Аналогичные результаты получаются при исследовании ПС на клиньях и конусах. Однако они перестают быть справедливыми при значительных удалениях от вершины. Дело в том, что деформации нулевого приближения быстро убывают и перестает выполняться принятое в п. 3 условие о том, что они должны быть не слишком малыми.

Автор благодарит Н. В. Зволинского, Н. К. Балабаева и Л. М. Мархашова за помощь и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 464 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
3. Флитман Л. М. О пограничном слое в некоторых задачах динамики пластической среды.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 1, с. 131—137.
4. Соколовский В. В. Об уравнениях пластического течения в пограничном слое.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 3, с. 328—334.
5. Астрахан И. М. Об уравнениях движения вязкопластической жидкости в пограничном слое на произвольной поверхности.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 2, с. 54—59.
6. Мосолов П. П., Мясников В. П. Пограничный слой в задаче о продольном движении цилиндра в вязкопластической среде.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 4, с. 682—692.
7. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
8. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978. 399 с.
9. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
10. Григорян С. С. Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней.— Докл. АН СССР, 1979, т. 244, № 4, с. 846—849.
11. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
12. Скобеев А. М. О плоской упругопластической волне.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 509—515.
13. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.