Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 4, 1985

УДК 539.374

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ИДЕАЛЬНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ

Куксин С. Б.

Вводится понятие обобщенного решения начально-краевой задачи для системы уравнений Прандтля — Рейсса. Доказывается, что обобщенное решение существует и единственно, а в области упругости является решением начально-краевой задачи динамической теории упругости. Приводится эффективный способ приближенного нахождения обобщенного решения и получены условия на его сильных разрывах. Основные результаты работы были ранее без доказательств опубликованы в [1, 2].

1. Уравнения Прандтля — Рейсса. Пусть идеальное упругопластичное тело занимает трехмерную область Ω с гладкой границей D. Состояние тела в лагранжевых координатах характеризуется тензором напряжений $\tau_{ij}(t, x)$, скоростью частиц тела $v_i(t, x)$, тензором скорости упругой деформации $\varepsilon_{ij}(v) \equiv (v_{i,j} + v_{j,i})/2$ и тензором скорости пластической деформации $\lambda_{ij}(t, x)$ (всюду $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, $0 \leqslant t \leqslant T, x \in \Omega$). Предположим, что измеримая часть D_1 границы D свободна, а на части $D_2 = D \setminus D_1$ задана скорость смещения. Плотность тела предполагается постоянной. Считая ее равной единице, запишем уравнения упругопластичного течения и начально-краевые условия [3]

$$a_{ijkh}\tau'_{kh} - \varepsilon_{ij}(v) + \lambda_{ij} = 0 \tag{1.1}$$

$$v_i' - \tau_{ij,j} = F_i(t, x) \tag{1.2}$$

$$(\tau_{ij}n_j)(t, x) = 0, \quad x \in D_1; \quad v_i(t, x) = v_i^\circ(t, x), \quad x \in D_2 \tag{1.3}$$

$$\tau_{ij}(0, x) = \tau_{0ij}(x), \quad v_i(0, x) = v_{0i}(x) \tag{1.4}$$

где a_{ijkh} — коэффициенты упругости, $n_i(x)$, $x \in D$ — внешняя нормаль к Ω; штрих означает производную по времени. Дополним (1.1)—(1.4) условием пластичности Мизеса [3] ($\tau_{ij}{}^D$ — девиатор тензора τ_{ij})

$$\tau_{ij}{}^D(t, x)\,\tau_{ij}{}^D(t, x) \leqslant c_*{}^2 \tag{1.5}$$

Уравнения (1.1)—(1.5) замыкаются соотношениями Прандтля — Рейсса между напряжениями и скоростью пластической деформации

$$\lambda_{ij}(t, x) = \varkappa\sigma_{ij}{}^D(t, x), \quad \varkappa \geqslant 0$$

где $\varkappa = 0$, если неравенство (1.5) выполнено строго. Удобнее вместо соотношений Прандтля — Рейсса пользоваться эквивалентным им постулатом Друкера [4, с. 17; 5]. Запишем его в проинтегрированной форме

$$\int \lambda_{ij}(t, x)(\tau_{ij}(t, x) - \sigma_{ij}(t, x))\,dx \geqslant 0 \tag{1.6}$$

где σ_{ij} — произвольное непрерывно дифференцируемое на $[0, T] \times (\Omega \cup \cup D)$ тензорное поле, такое, что

$$(\sigma_{ij}{}^D\sigma_{ij}{}^D)(t, x) \leqslant c_*{}^2; \quad \sigma_{ij}(t, x)\,n_j(x) = 0, \quad \forall x \in D_1 \tag{1.7}$$

Начально-краевая задача (1.1) — (1.7) рассматривалась ранее Дюво и Лионсом. В работе [6] ими доказана однозначная разрешимость вытекающего из (1.1) — (1.7)

эволюционного вариационного неравенства, которому удовлетворяет проинтегрированный по времени тензор напряжений. Ниже к задаче (1.1) — (1.7) применяется метод монотонных полугрупп, позволяющий доказать однозначную разрешимость задачи при несколько более слабых ограничениях, чем в [6] (теорема 1), получить новые результаты о качественных свойствах решений (теоремы 2, 4, 5) и предложить эффективный способ нахождения приближенного решения (теорема 3).

Предположим, что коэффициенты упругости обладают свойствами симметрии и эллиптичности

(1.8) $$a_{ijkh}=a_{jikh}=a_{khij},\quad a_{ijkh}\mu_{ij}\mu_{kh}\geqslant\alpha\mu_{ij}\mu_{ij},\quad \alpha>0,\quad \forall\mu\in l$$

где l — пространство симметричных 3×3-матриц. Введем в l скалярное произведение $(\sigma,\tau)_l=a_{ijkh}\sigma_{ij}\tau_{kh}$.

Определим гильбертовы пространства и скалярные произведения в них

$$S=L_2(\Omega;R^3),\quad (u,v)_S=\int\limits_\Omega u_j(x)\,v_j(x)\,dx$$

$$H=L_2(\Omega;l),\quad (\sigma,\tau)_H=\int\limits_\Omega(\sigma(x),\tau(x))_l\,dx$$

$$K=\{\sigma\in H\mid\sigma_{ij,\,j}\in S\},\quad (\sigma,\tau)_K=(\sigma,\tau)_H+(\sigma_{ij,\,j},\sigma_{il,\,l})_S$$

Наконец, пусть K° — замыкание по норме пространства K множества гладких тензорных полей $\tau_{ij}(x)$, таких, что $\tau_{ij}(x)\,n_j(x)=0$ при $x\in D_1$.

Естественное вложение $K^\circ\subset H$ позволяет каждый элемент $\tau\in H$ рассматривать как функционал на K°, действующий по формуле $\tau(w)=(\tau,w)_H$, $\forall w\in K^\circ$.

Обозначим через K^* пополнение H по норме сопряженного к K° пространства. Тогда $K^\circ\subset H\subset K^*$ и K^* является подпространством пространства обобщенных тензорных полей на Ω. Обозначим нормы в пространствах S,H,K и K^*, соответственно, $|\cdot|_S$, $|\cdot|_H$, $|\cdot|_K$ и $|\cdot|_{K^*}$, а применение функционала $\eta\in K^*$ к элементу $\omega\in K^\circ$ — $\langle\eta,\omega\rangle$.

Определим выпуклое замкнутое подмножество W пространства K°

$$W=\{\sigma\in K^\circ\mid(\sigma_{ij}^D\sigma_{ij}^D)(x)\leqslant c_*^2\}$$

где неравенство выполнено при почти всех $x\in\Omega$. Рассмотрим субдифференциал его характеристической функции ∂I_W, являющийся многозначным отображением из W в K^* (см. [7])

(1.9) $$\partial I_W(\tau)=\{\xi\in K^*\mid\langle\xi,\tau-\mu\rangle\geqslant 0,\ \forall\mu\in W\}$$

В силу условий (1.8) отображение

$$l\to l,\quad \tau_{ij}\mapsto\sigma_{kh}=a_{khij}\tau_{ij}$$

можно обратить; $\tau_{ij}=a^{ijkh}\sigma_{kh}$.

Сделаем подстановку $v_i=v_i^\circ+u_i$ и умножим уравнение (1.1) скалярно в H на $a^{ijlm}\mu_{lm}(x)$, $\mu\in K^\circ$. Так как

$$(\mu_{lm}n_m)(x)=0,\ x\in D_1;\quad u_i(x)=0,\ x\in D_2$$

то в силу формулы Остроградского — Гаусса

(1.10) $$(\tau',\mu)_H+(u,\mu_{ij,\,j})_S+\langle\xi,\mu\rangle=(h,\mu)_H,\quad \forall\mu\in K^\circ$$

$$\xi=a^{ijkh}\lambda_{kh},\quad h_{ij}=a^{ijkh}\varepsilon_{kh}(v^\circ)$$

Из (1.6), (1.9) имеем включение

(1.11) $$\xi(t,\cdot)\in\partial I_W(\tau(t,\cdot))$$

Перепишем уравнение (1.2) и начальные условия (1.4), учитывая сделанную подстановку

(1.12) $u_i' - \tau_{ij,j} = g_i \equiv F_i - v_i^{\circ\prime}$

(1.13) $\tau_{ij}(0, x) = \tau_{0ij}(x), \quad u_i(0, x) = u_{0i}(x) \equiv v_{0i}(x) - v_i^\circ(0, x)$

Определение. Обобщенным решением задачи (1.1)—(1.7) называется такая тройка тензорных полей $(v_i, \tau_{ij}, \xi_{ij})$, $v_i \equiv v_i^\circ + u_i$, что

(1.14) $\tau \in L_\infty(0, T; K^\circ), \ \tau' \in L_\infty(0, T; H)$
$u, u' \in L_\infty(0, T; S), \ \xi \in L_\infty(0, T; K^*)$

и для которой при почти всех $t \in [0, T]$ справедливы включения $\tau(t, \cdot) \in \in W$, (1.11) и равенство (1.12), а при $t = 0$ — начальные условия (1.12).

Теорема 1. Если

(1.15) $g, g' \in L_1(0, T; S); \ h, h' \in L_1(0, T; H), \ \tau_0 \in W, \ u_0 \in S$

и тензор $u_{0i}(x)$ таков, что для некоторых $\eta \in \partial I_W(\tau_0)$, $\nu \in H$

(1.16) $(u_0, \mu_{ij,j})_S + \langle \eta, \mu \rangle = (\nu, \mu)_H, \quad \forall \mu \in K^\circ$

то задача (1.1)—(1.7) имеет единственное обобщенное решение. При этом, если h, g, τ_0, u_0 изменить, соответственно, на Δh, Δg, $\Delta\tau$, Δu_0 так, чтобы остались выполнены условия (1.15), (1.16), и обозначить через Δu_i, $\Delta\tau_{ij}$ изменение компонент обобщенного решения, то при любом $0 \leqslant t \leqslant T$ будет справедлива оценка

$$(|\Delta u(t, \cdot)|_S^2 + |\Delta\tau(t, \cdot)|_H^2)^{1/2} \leqslant (|\Delta u_0|_S^2 + |\Delta\tau_0|_H^2)^{1/2} + \\ + \int_0^t (|h(\tau, \cdot)|_H^2 + |g(\tau, \cdot)|_S^2)^{1/2} d\tau$$

Замечание. Условие (1.16) выполнено, например, если $u_{0i,j} \in S$ для всех j и $u_{0i}(x) = 0$ для $x \in D_2$. При этом можно положить $\eta = 0$, $\nu_{ij} = -a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u_0)$.

Определение. Цилиндр $Q_0 = (T_1, T_2) \times \Omega_0$, где $0 \leqslant T_1 < T_2 \leqslant T$ и Ω_0 — гладкая подобласть Ω, называется областью упругости обобщенного решения, если почти всюду в Q_0

$$(\tau_{ij}{}^D \tau_{ij}{}^D)(t, x) \leqslant c_*^2 - \delta, \quad \delta > 0$$

Теорема 2. Построенное в теореме 1 обобщенное решение задачи (1.1)—(1.7) в области упругости Q_0 является решением краевой задачи динамической упругости, т. е.

(1.17) $v_{i,j}(t, x) \in L_2(Q_0), \ \forall i, j$

почти всюду в Q_0 выполнены уравнения

(1.18) $a_{ijkh}\tau_{kh}' - \varepsilon_{ij}(v) = 0, \quad v_i' - \tau_{ij,j} = F_i$

и почти всюду на $D_0 = D \cap \partial\Omega_0$ выполнены краевые условия

(1.19) $(\tau_{ij} n_j)(t, x) = 0, \ x \in \operatorname{int}(D_0 \cap D_1)$

(1.20) $v_i(t, x) = v_i^\circ(t, x), \ x \in \operatorname{int}(D_0 \cap D_2)$

где $\operatorname{int}(D_0 \cap D_i)$ — внутренность множества $D_0 \cap D_i$ в D, $i = 1, 2$.

2. Доказательства теорем 1, 2. Рассмотрим отображение

$$\mathrm{DIV} : K^\circ \to S, \ \sigma_{ij} \mapsto \sigma_{ij,j}$$

Пусть $\mathrm{DIV}^*: S \to K^*$ — его сопряженное. Перепишем (1.10) как уравнение в K^*

(2.1) $\tau' + \mathrm{DIV}^* u + \xi = h$

Рассмотрим многозначное отображение

$$B_0 : W \times S \to K^* \times S, (\tau, u) \mapsto (\mathrm{DIV}^* u + \partial I_W (\tau), -\mathrm{DIV}\tau)$$

Определим гильбертово пространство $L = H \times S$ со скалярным произведением $((\sigma_1, v_1), (\sigma_2, v_2))_L = (\sigma_1, \sigma_2)_H + (v_1, v_2)_S$ и нормой $|\cdot|_L$. Рассмотрим в L многозначное отображение B с областью определения $D(B)$

$$D(B) = \{(\tau, u) \in W \times S \mid B_0(\tau, u) \cap L \neq \varnothing\}$$

$$B(\tau, u) = B_0(\tau, u) \cap L, \ \forall (\tau, u) \in D(B)$$

Обозначим через $\zeta(t)$ пару $(\tau(t, \cdot), u(t, \cdot))$ и перепишем (1.11)—(1.13), (2.1) как уравнение на $\zeta(t)$ с многозначной нелинейностью B

(2.2) $$\zeta' + B(\zeta) \ni \varphi(t), \ \zeta(0) = \zeta_0$$

где $\varphi(t) = (h_{ij}(t, \cdot), g_i(t, \cdot)), \ \zeta_0 = (\tau_0, u_0)$. В силу условий теоремы 1

(2.3) $$\varphi, \varphi' \in L_1(0, T; L), \ \zeta_0 \in D(B)$$

Определение [8]. Многозначное отображение $E : D(E) \subset L \to L$ называется монотонным, если

$$(\eta_1 - \eta_2, \theta_1 - \theta_2)_L \geqslant 0, \ \forall \eta_j \in E(\theta_j), \ \theta_j \in D(E), \ j = 1, 2$$

и называется максимальным монотонным, если к тому же

$$(I + \rho E) D(E) = L, \ \forall \rho > 0$$

(здесь I — единичное отображение в L).

Лемма 1. Отображение $B : D(B) \to L$ является максимальным монотонным.

Доказательство. При $(\eta_j, w_j) \in B(\tau_j, u_j)$, $j = 1,2$ справедливо равенство

$$((\eta_1, w_1) - (\eta_2, w_2), (\tau_1, u_1) - (\tau_2, u_2))_L =$$
$$= \langle \mathrm{DIV}^*(u_1 - u_2), \tau_1 - \tau_2 \rangle - (\mathrm{DIV}(\tau_1 - \tau_2), u_1 - u_2)_S +$$
$$+ \langle \eta_1 - \eta_2, \tau_1 - \tau_2 \rangle$$

Сумма двух первых слагаемых в правой части равенства равна нулю. Третье слагаемое неотрицательно, так как $\eta_i \in \partial I_W(\tau_i)$, $i = 1,2$, а субдифференциал ∂I_W — монотонное отображение ([9], с. 255).

Остается проверить разрешимость уравнения

(2.4) $$(\sigma, u) + \rho B(\sigma, u) \ni (\tau, v)$$

для произвольных $\rho > 0$, $(\tau, v) \in L$.

Для этого рассмотрим следующий функционал на K°:

$$J_\rho(\sigma) = J_\rho^\circ(\sigma) + I_W(\sigma), \quad J_\rho^\circ(\sigma) = |\sigma|_H^2/(2\rho) -$$
$$- (\sigma, \tau)_H/\rho + \int (\rho\sigma_{ij,j}\sigma_{il,l}/2 - \sigma_{ij,j} v_i)\, dx$$

где $I_W(\sigma)$ — характеристическая функция множества $W \subset K^\circ$, равная нулю, если $\sigma \in W$ и равная $+\infty$ иначе. Функционал J_ρ выпуклый, полунепрерывный снизу в слабой топологии K° и коэрцитивный. Поэтому он имеет на K° единственный минимум $\sigma_0 \in W$ и в точке σ_0 для его субдифференциала $\partial J_\rho(\sigma_0)$ выполнено уравнение Эйлера

$$\partial J_\rho(\sigma_0) \ni 0$$

Но $\partial J_\rho(\sigma) = \partial J_\rho^0(\sigma) + \partial I_W(\sigma)$ ([7], с. 231). Поэтому

(2.5) $$\sigma_0/\rho + \rho \mathrm{DIV}^*\mathrm{DIV}\sigma_0 + \partial I_W(\sigma_0) \ni \tau/\rho + \mathrm{DIV}^* v$$

Из (2.5) вытекает включение

$$\sigma_0 + \rho \mathrm{DIV}^* u_0 + \rho \partial I_W(\sigma_0) \ni \tau \quad (u_0 = \rho \mathrm{DIV}\sigma_0 + v)$$

откуда следует, что $(\sigma_0, u_0) \in D(B)$ и для (σ_0, u_0) выполнено включение (2.4).

Из доказанной леммы, условий (2.3) и теории монотонных полугрупп (см. [8], предложения 3.2, 3.3) следует существование у задачи (2.2) единственного решения $\zeta(t)$, такого, что

$$\zeta,\ \zeta' \in L_\infty(0, T; L)$$

и $\zeta(t) \in D(B)$ при почти всех t. Отсюда следует первое утверждение теоремы 1.

Для доказательства второго утверждения предположим, что $\zeta^i(t)$ — решение уравнения (2.2) при $\varphi = \varphi^i(t)$, $\zeta_0 = \zeta_0^i$, $i = 1, 2$. Вычтем из уравнения для $\zeta^1(t)$ уравнение для $\zeta^2(t)$ и умножим на $\Delta\zeta(t) = \zeta^1(t) - \zeta^2(t)$ скалярно в L. Из полученного равенства и монотонности отображения B следует, что

$$\tfrac{1}{2}\, d/dt\, |\Delta\zeta(t)|_L^2 \leqslant |\varphi^1(t) - \varphi^2(t)|_L\, |\Delta\zeta(t)|_L$$

Разделив обе части неравенства на $|\Delta\zeta(t)|_L$ и проинтегрировав по dt, получим второе утверждение теоремы.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть $\mu_{ij}(x)$ — гладкое в $\Omega \cup \cup D$ тензорное поле, принадлежащее пространству K° и равное нулю всюду вне Ω_0. Тогда, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\tau(t, \cdot) \pm \varepsilon\mu \in W$ при почти всех t и в силу (1.9)—(1.11)

$$(\tau', \pm\mu)_H + (u, \pm\mu_{ij,j})_S - (f, \pm\mu)_H \geqslant 0$$

Значит

$$(u, \mu_{ij,j})_S = (f - \tau', \mu)_H \tag{2.6}$$

Так как в качестве $\mu_{ij}(x)$ можно взять любое финитное в Ω_0 гладкое симметричное тензорное поле, то при почти всех t

$$-\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\,|_{\Omega_0} = a_{ijkh}(f_{kh} - \tau'_{kh})\,|_{\Omega_0} \tag{2.7}$$

Здесь дифференцирование и сужение на Ω_0 понимаются в смысле теории обобщенных функций. Из (2.7) и неравенства Корна [5, 6] следует, что при всех i, j функция $u_{i,j}$ квадратично интегрируема на Q_0, откуда вытекает (1.17).

Пользуясь доказанной гладкостью тензора $u_i(t, x)$, применим к левой части (2.6) формулу Остроградского — Гаусса. В силу (2.7) получим

$$\int_{D_2 \cap D_0} \mu_{ij} n_j u_i\, d\gamma = 0$$

где $d\gamma$ — дифференциал элемента поверхности D. Так как след $(\mu_{ij}n_j)(x)$, $x \in D_2 \cap D_0$, можно сделать равным любому тензору из $C_0^\infty(D_2 \cap D_0; R^3)$, то $u_i(x) = 0$ при $x \in \operatorname{int}(D_2 \cap D_0)$, откуда получаем (1.20). Осталось заметить, что второе уравнение в (1.18) следует из (1.12), а граничное условие (1.19) — из принадлежности тензора $\tau_{ij}(t, \cdot)$ пространству K°.

3. Приближенное построение обобщенного решения. Сведение задачи (1.1)—(1.7) к уравнению (2.2) с максимальным монотонным оператором B позволяет применить для приближенного построения обобщенного решения формулу Троттера ([8], следствие 4.4). Воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 1 и положим

$$\zeta^n(t) = \left(I + \frac{t}{n}B - \frac{t}{n}\varphi\left(\frac{t}{n}(n-1)\right)\right)^{-1} \circ \ldots$$

$$\ldots \circ \left(I + \frac{t}{n}B - \frac{t}{n}\varphi\left(\frac{t}{n}0\right)\right)^{-1}\zeta$$

$$(I + \rho B - \rho\varphi(\theta))^{-1}\omega_* = (\sigma, u)$$

где (σ, u) — решение уравнения (2.4) при $(\tau, v) = \omega_* + \rho\varphi(\theta)$. Из доказательства леммы 1 следует, что нахождение $\zeta^n(t)$ сводится к n последовательно решаемым вариационным задачам о минимизации функционалов $J_{t/n}(\sigma)$ при разных $v_i(x)$. Оказывается, при $n \gg 1$ функция $\zeta^n(t)$ хорошо аппроксимирует решение уравнения (2.2).

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(t)$ такова, что $\varphi' \in L_\infty(0, T; L)$ и $\zeta_0 \in D(B)$. Тогда $|\zeta(t) - \zeta^n(t)|_L \leqslant c^{(n)}$, где:

а) если $\varphi(t) \equiv \varphi$ не зависит от t, то

$$c^{(n)} = 2tn^{-1/2} \inf \{ |\theta|_L \mid \theta \in \varphi - B(\zeta_0)\}$$

б) в общем случае $c^{(n)} = c^{(0)} n^{-1/4}$, где $c^{(0)}$ не зависит от n.

Доказательство. Утверждение а) вытекает из максимальной монотонности отображения B и следствия 4.4 книги [8]. Утверждение б) выводится из а) путем замены $\varphi(t)$ на кусочно-постоянную функцию и использования оценок изменения решения при изменении правой части $\varphi(t)$ (см., например, лемму 3.1 в [8]).

Для задач вязкоупругопластичности утверждение, аналогичное теореме 3, было ранее доказано П. П. Мосоловым ([5], § 13).

4. Сильные разрывы обобщенных решений. По аналогии с газовой динамикой [10] дадим следующее определение сильного разрыва.

Определение. Если в цилиндре $Q_T = (0, T) \times \Omega$ существует гиперповерхность Γ (возможно, с краем $\partial\Gamma$), на которой компоненты обобщенного решения задачи (1.1)—(1.7) v, τ имеют разрыв первого рода и вне которой они непрерывны и ограничены вместе со всеми своими производными, входящими в (1.1), (1.2), то Γ называется гиперповерхностью сильного разрыва, а $\gamma(t) = \{x \in \Omega \mid (t, x) \in \Gamma\}$ — поверхностью сильного разрыва.

Если N — нормаль к Γ, то скачки тензоров v_i, τ_{ij} на Γ по направлению N обозначаются $[v]_i$, $[\tau]_{ij}$. Если гиперповерхность сильного разрыва Γ такова, что $[v] \neq 0$ на Γ (но, возможно, $[v]$ обращается в нуль на $\partial\Gamma$), то пишем $\Gamma = \Gamma^v$.

Всюду ниже предполагается, что тензор $v_i(t, x)$ непрерывно дифференцируем. Тогда сильные разрывы (и поверхности сильных разрывов) тензоров $v_i(t, x)$ и $u_i(t, x)$ равны.

Теорема 4. Если $(t_0, x_0) \in \Gamma^v$, то найдется такая цилиндрическая окрестность $\omega = (t_1, t_2) \times \omega^x$ этой точки в Q_T, что $\Gamma^v \cap \omega = (t_1, t_2) \times (\gamma^v(t_0) \cap \omega^x)$.

Таким образом, изменение во времени поверхности $\gamma^v(t)$ может происходить только за счет того, что $\partial\gamma^v(t) \neq \text{const}$ (поверхность разрыва «расползается» по одним направлениям и «склеивается» по другим).

Доказательство. Предположим противное. Тогда проекция на Ω множества Γ^v, которую обозначим Γ_x^v, имеет ненулевую меру Лебега. При почти всех $x_0 \in \Gamma_x^v$ функция $t \mapsto v(t, x_0)$ имеет разрыв в точке t_0, такой, что $(t_0, x_0) \in \Gamma^v$. Поэтому производная $v'(t, x)$, рассматриваемая как обобщенная функция, имеет ненулевую сингулярную компоненту, равную δ-функции с носителем на Γ^v. Это противоречит утверждаемой в теореме 1 гладкости функции $v(t, x)$.

Пусть ω, Γ^v, $\gamma^v = \gamma^v(t_0)$ — такие, как в теореме 4, ν_j — нормаль к γ^v и $C^{-1}(\gamma^v \cap \omega^x; R^3)$ — пространство непрерывных линейных отображений из $C_0^1(\gamma^v \cap \omega^x)$ в R^3. Заметим, что в силу теоремы 4 $\mathrm{N}(t, x) = (0, \nu(x))$.

Лемма 2. Определен непрерывный оператор взятия следа

$$K \to C^{-1}(\gamma^v \cap \omega^x; R^3), \quad \tau \mapsto \tau_{ij}\nu_j|_{\gamma^v \cap \omega^x}$$

Если $\psi_i \in C_0^1(\gamma_v \cap \omega^x; R^3)$, то $a^{ijkh}(\psi_k \nu_h + \psi_h \nu_k)\delta_{\gamma^v}/2 \in K^*$, где δ_{γ^v} — δ-функция поверхности γ^v.

Утверждение леммы следует из формулы Остроградского — Гаусса (подробнее см. [11], теорему 1.2).

Пусть $\varepsilon_{ij}^\circ(v) = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$, где производные вне Г понимаются в поточечном смысле, а на Г продолжены нулем. Из формулы Остроградского — Гаусса вытекает

Лемма 3. Пусть $\psi \in C_0^\infty(\omega)$. Тогда при всех $t \in (t_1, t_2)$

$$\psi\, \mathrm{DIV}^* v = -\psi a^{ijkh}[([v]_k \nu_h + [v]_h \nu_k)\delta_{\gamma^v}/2 + \overset{\circ}{\varepsilon}_{kh}(v)]$$

Пусть $\omega_1 \subset \omega$ — гладкая подобласть и $f \in C_0^\infty(\omega)$ — такая функция, что $0 \leqslant f \leqslant 1$ и $f \equiv 1$ на ω_1. В силу (2.1), (1.11) и (1.9), где положено $\mu_{ij} = (1-f)\tau_{ij} + f\sigma_{ij}$, имеем

$$\langle \xi_{ij}(t,\cdot), f(t,\cdot)(\tau_{ij}(t,\cdot) - \sigma_{ij}(t,\cdot)\rangle \geqslant 0 \tag{4.1}$$

для любого тензора $\sigma_{ij}(t, x)$, такого, что

$$\sigma \in L_\infty(0, T; K^\circ),\ \sigma(t,\cdot) \in W \tag{4.2}$$

при почти всех t. Выразим $\xi_{ij}(t, x)$ через u, τ из уравнения (2.1) и подставим в (4.1) с учетом леммы 3

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma^v} f(t,x)([v]_i \nu_j + [v]_j \nu_i)(\tau_{ij} - \sigma_{ij})\,d\gamma + \int\limits_{\omega} w_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij})\,dx \geqslant 0$$

где $w \in L_2(Q_T; l)$. Отсюда при почти всех t

$$\int\limits_{\gamma^v} f(t,x)([v]_i \nu_j + [v]_j \nu_i)(\tau_{ij} - \sigma_{ij})\,d\gamma \geqslant 0 \tag{4.3}$$

где тензор σ_{ij} такой, как в (4.2). В частности, подставляя $\sigma_{ij} = \tau_{ij} \pm \pm \delta_{ij}$, находим, что

$$[v]_i \nu_i = 0 \tag{4.4}$$

всюду в $\omega_1 \cap \Gamma^v$. Пусть $\tau_{ij}^\pm(t, x) = \tau_{ij}(t, x \pm 0\cdot\nu(x))$ при $(t, x) \in \Gamma^v$. В силу леммы 2

$$(\tau_{ij}^+\nu_i)(t,x) = (\tau_{ij}^-\nu_i)(t,x), \quad (t,x) \in \Gamma^v, \quad j = 1, 2, 3 \tag{4.5}$$

и в (4.3) можно подставлять как τ_{ij}^+, так и τ_{ij}^-. Фиксируем $(t_0, x_0) \in \Gamma^v \cap \cap\, \omega_1$ и введем систему координат с ортами

$$n^1 = \nu(x_0),\ n^2 = ([v]/|[v]|)(t_0, x_0),\ n^3 = n^1 \times n^2 \tag{4.6}$$

Тогда в силу (4.4)

$$([v]_i \nu_j \tau_{ij}^+)(t_0, x_0) = (|[v]|\tau_{12}^{+D})(t_0, x_0)$$

Из (1.5) имеем

$$\tau_{12}^{+D}(t_0, x_0) \leqslant (c_*/2)^{1/2} \tag{4.7}$$

Если неравенство (4.7) выполнено строго, то можно найти такие $\alpha_1 > > 0$, окрестности ω_2, ω_3 точки (t_0, x_0), $\omega_3 \subset \omega_2 \subset \omega_1$ и удовлетворяющий условиям (4.2) тензор σ_{ij}, что всюду в ω_3

$$(\sigma_{ij}[v]_i \nu_j)(t,x) \geqslant (\sigma_{12}^D|[v]|)(t_0,x_0) - \alpha_1 \geqslant$$
$$\geqslant (\tau_{12}^{+D}|[v]|)(t_0,x_0) + 2\alpha_1 \geqslant (\tau_{ij}^{+D}[v]_i\nu_j)(t,x) + \alpha_1$$

и $\sigma = \tau^+$ всюду в $\omega_1 \setminus \omega_2$. При этом при фиксированных α_1, ω_2 тензор σ и окрестность ω_3 можно выбрать так, что величина mes $(\omega_2 \setminus \omega_3) = \alpha_2$

станет сколь угодно малой. Но если величина α_2 достаточно мала, то левая часть неравенства (4.3) строго отрицательна. Полученное противоречие доказывает, что $\tau_{12}^{+D}(t_0, x_0) = (c_*/2)^{1/2}$. Отсюда и из (1.5) находим значения всех компонент тензора $\tau_{ij}^{+D}(t_0, x_0)$ в системе координат (4.6)

$$\tau_{12}^{+D} = \tau_{21}^{+D} = (c_*/2)^{1/2}, \quad \tau_{ij}^{+D} = 0 \text{ если } \{i, j\} \neq \{1, 2\}$$

Поэтому в любой ортонормированной системе координат

$$\tau_{ij}^{+D}(t_0, x_0) = \left(\frac{c_*}{2}\right)^{1/2} \left(\nu_i \frac{[v]_j}{|[v]|} + \nu_j \frac{[v]_i}{|[v]|}\right)(t_0, x_0) \tag{4.8}$$

Проводя эти же рассуждения для тензора τ^{-D}, получаем, что и он определяется равенством (4.8). Так как точка $(t_0, x_0) \in \Gamma^v$ произвольна, то из этого следует непрерывность девиатора тензора τ на Γ^v, а с учетом (4.5) и непрерывность всего тензора τ. Доказана следующая

Теорема 5. Разрыв скорости $[v]$ касается поверхности разрыва γ^v. Тензор напряжений τ_{ij} непрерывен всюду на Γ^v. При $(t_0, x_0) \in \Gamma^v$ девиатор тензора τ задается формулой (4.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куксин С. Б.* Применение монотонных полугрупп в теории идеальной упругопластичности.— Успехи матем. наук, 1982, т. 37, вып. 5, с. 189—190.
2. *Куксин С. Б.* Математическая корректность краевых задач идеальной упругопластичности.— Успехи матем. наук, 1983, т. 38, вып. 2, с. 227—228.
3. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
4. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.
5. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
6. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Мир, 1980. 383 с.
7. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
8. *Brezis H.* Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Amsterdam — L.: North-Holland, 1973. 183 p.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
10. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
11. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. М.: Мир, 1981. 408 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.III.1984