Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 4, 1985

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЛ ИЗ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩЕГО АНИЗОТРОПНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Потапов В. Д.

Результаты исследования устойчивости сжатых стержней, выполненных из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала, обобщаются на случай произвольного тела при наличии анизотропии.

Рассмотрим тело, находящееся под действием массовых $\mathbf{F}$ и поверхностных нагрузок $\mathbf{q}$, приложенных на границе тела S_q, в ортогональной системе координат x_i $(i = 1, 2, 3)$, $\mathbf{F} = \{F_i\}$, $\mathbf{q} = \{q_i\}$. Под действием этих сил точки тела получают перемещения $u_i(t, \mathbf{x})$, определяющие траекторию невозмущенного движения.

Предположим, что в исходном состоянии тело имеет малое начальное искривление $\alpha v_i^\circ(\mathbf{x})$. В этом случае тело получает дополнительные перемещения $\alpha v_i(t, \mathbf{x})$, так что полное перемещение $u_i^* = u_i + \alpha(v_i + v_i^\circ)$. Параметр α введен условно (его можно считать равным единице). Движение тела, определяемое перемещениями u_i^*, будем называть возмущенным, а перемещения αv_i — возмущениями.

Введем норму перемещений (V — объем тела)

$$\|\mathbf{u}\| = \Big(\int\limits_V u_i u_i \, dV\Big)^{1/2}.$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование.

Определение. Невозмущенное движение вязкоупругого тела называется устойчивым, если для любого числа $A > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(A) > 0$, что для любого начального искривления αv_i°, удовлетворяющего неравенству $\alpha\|\mathbf{v}^\circ\| < \delta$, соответствующие этому возмущению перемещения αv_i удовлетворяют неравенству $\alpha\|\mathbf{v}\| < A$, $0 \leqslant t < \infty$.

Если движение тела исследуется на конечном промежутке времени $[0, T]$ и задано критическое значение нормы перемещения $\|\mathbf{v}\|^*$, то можно говорить о критическом времени t_*, определяя его как момент первого достижения нормой перемещений $\alpha\|\mathbf{v}\|$ величины $\|\mathbf{v}\|^*$: $\alpha \max\|\mathbf{v}(t)\| < \|\mathbf{v}\|^*$, $0 \leqslant t < t_*$, причем $\alpha\|\mathbf{v}(t_*)\| = \|\mathbf{v}\|^*$.

Тело будем называть устойчивым на интервале времени $[0, T]$, если $t_* > T$.

Аналогичные определения устойчивости применительно к неоднородно-стареющим вязкоупругим стержням были использованы в [1, 2], где в качестве нормы прогиба стержня принято $\sup\limits_{t,x}|y(t, x)|$, $x \in [0, l]$ (l — длина стержня).

В предположении малости деформаций уравнения состояния для материала примем в виде [1]

$$\sigma_{ij} = (E_{ijkl} - \mathbf{R}_{ijkl})\,\varepsilon_{kl} \tag{1}$$

$$E_{ijkl} = E_{ijkl}(t + \rho(\mathbf{x})), \quad \mathbf{R}_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \int\limits_0^t R^{\rho}_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\tau)\,d\tau, \quad R^{\rho}_{ijkl} =$$

$$= R_{ijkl}(t + \rho(\mathbf{x}), \tau + \rho(\mathbf{x}))$$

Модули упругости E_{ijkl} и ядра релаксации R^{ρ}_{ijkl} материала удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\lim_{t\to\infty} E_{ijkl} = \overset{\circ}{E}_{ijkl} = \mathrm{const} \tag{2}$$

$$0 \leqslant R^{\rho}_{ijkl} \leqslant R^{*}_{ijkl}(t, \tau), \; R^{*\prime}_{ijkl} = \sup_{t\geqslant 0} \int\limits_0^t R^{*}_{ijkl}(t, \tau)\,d\tau$$

$$\int\limits_T^t \sup_{\mathbf{x}} |R^{\rho}_{ijkl} - \overset{\circ}{R}_{ijkl}(t, \tau)|\,d\tau \to 0 \quad \text{при } T \to \infty$$

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{t\geqslant T} \int\limits_T^t \overset{\circ}{R}_{ijkl}(t, \tau)\,d\tau = \overset{\circ\prime}{R}_{ijkl}$$

Функция $\rho(\mathbf{x})$, имеющая непрерывные первые производные во всей занимаемой телом области, определяет возраст материальной точки с координатами $\mathbf{x}$ в момент приложения внешней нагрузки.

Считая внешние нагрузки консервативными (мертвыми), запишем функционал [3]

$$Э = \int\limits_V \left[\frac{1}{2} E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{ij}(\mathbf{R}_{ijkl}\varepsilon_{kl})\right] dV -$$

$$- \int\limits_V F_i u_i^*\,dV - \int\limits_{S_q} q_i u_i^*\,dS$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\{(u_{i,j} + u_{j,i}) + \alpha(v_{i,j} + v_{j,i}) +$$

$$+ [(u_{k,i} + \alpha v_{k,i} + \alpha\overset{\circ}{v}_{k,i})(u_{k,j} + \alpha v_{k,j} + \alpha\overset{\circ}{v}_{k,j}) - \alpha^2 \overset{\circ}{v}_{k,i}\overset{\circ}{v}_{k,j}]\}$$

Проварьируем функционал Э по перемещениям v_i в текущий момент времени t (перемещения u_i, отвечающие невозмущенному движению, не варьируются).

Как известно [3], условием стационарности функционала Э является равенство нулю его первой вариации

$$\delta Э = \alpha\delta Э' + \alpha^2 \delta Э'' = 0 \tag{3}$$

Здесь $\delta Э'$, $\delta Э''$ — выражения в вариации $\delta Э$ при соответствующих степенях параметра α.

Заметим, что ввиду равновесности тела в невозмущенном движении должно соблюдаться равенство $\delta Э' = 0$. Тогда из равенства (3) имеем

$$\delta Э'' = 0 \tag{4}$$

Далее предположим, что в невозмущенном движении вязкоупругого тела перемещения u_i малы и могут быть найдены из уравнений линейной теории вязкоупругости. В этом случае уравнение (4) может быть записано следующим образом:

$$\int\limits_V \{\delta v_{i,j}[(E_{ijkl} - \mathbf{R}_{ijkl})v_{k,l}] + \sigma_{ij}(v_{k,i} + \overset{\circ}{v}_{k,i})\,\delta v_{k,j}\}\,dV = 0 \tag{5}$$

где σ_{ij} — напряжения в невозмущенном движении тела, δv_i — вариации перемещений v_i. Заметим, что равенство (5) эквивалентно трем уравнениям равновесия тела и краевым условиям на его поверхности в возмущенном движении, записанным в возмущениях.

Примем в качестве вариаций перемещений δq_i сами перемещения v_i. Тогда

(6) $$\int_V \{v_{i,j}[(E_{ijkl}-\mathbf{R}_{ijkl})v_{k,l}] + \sigma_{ij}(v_{k,i}+\overset{\circ}{v}_{k,i})v_{k,j}\}\,dV = 0$$

Допустим, что внешняя нагрузка, действующая на тело, однопараметрическая, т. е.

(7) $$\sigma_{ij} = -\beta\sigma_{ij}^{\circ},\quad \beta = \text{const}$$

и такая, что для любого момента времени $t \geqslant 0$ минимальное собственное значение λ_1 однородной краевой задачи

(8) $$\int_V E_{ijkl}v_{i,j}v_{k,l}\,dV = \lambda\int_V \sigma_{ij}^{\circ}v_{k,i}v_{k,j}\,dV$$

положительно, т. е. $\lambda_1 \geqslant a > 0$.

Обозначим через $\mathbf{v}'$ вектор с компонентами $v_{i,j}$ $(v' = [\mathbf{v}_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, \ldots, v_{3,3}])$. Определим скалярное произведение двух векторов $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$ и норму вектора $\mathbf{v}'$ следующим образом:

$$(\mathbf{v}_1'\mathbf{v}_2') = \int_V v_{i,j}^{(1)}v_{i,j}^{(2)}\,dV,\quad \|\mathbf{v}'\| = \left(\int_V v_{i,j}v_{i,j}\,dV\right)^{1/2}$$

Запишем уравнение (6) в форме

(9) $$I = \beta I_1 + \beta I_2 + I_3$$

$$I = \int_V v_{i,j}E_{ijkl}v_{k,l}\,dV,\quad I_1 = \int_V \sigma_{ij}^{\circ}v_{k,i}v_{k,j}\,dV$$

$$I_2 = \int_V \sigma_{ij}^{\circ}\overset{\circ}{v}_{k,i}v_{k,j}\,dV,\quad I_3 = \int_V v_{i,j}(\mathbf{R}_{ijkl}v_{k,l})\,dV$$

Как известно [4], однородная краевая задача, описываемая равенством (8), является самосопряженной и ее собственные значения вещественные. Тогда ([5], с. 236) имеем

(10) $$I \geqslant \lambda_1 I_1$$

Из соотношений (9), (10) следует

(11) $$(1 - \beta/\lambda_1)\,I \leqslant \beta I_2 + I_3$$

В свою очередь, на основании тех же соображений можно записать

$$I \geqslant \lambda_1^* \|\mathbf{v}'\|^2.$$

Таким образом, левая часть неравенства (11) не превосходит величины

(12) $$(1 - \beta/\lambda_1)\,\lambda_1^*\,\|\mathbf{v}'\|^2 \leqslant \beta I_2 + I_3$$

Заметим, что в общем случае λ_1 и λ_1^* — функции времени, так как $E_{ijkl} = E_{ijkl}\,(t + \rho\,(\mathbf{x}))$ и $\sigma_{ij}^{\circ} = \sigma_{ij}^{\circ}\,(t, \mathbf{x})$. Рассматривая конечный интервал времени $[0, T]$, выберем на нем минимальное значение (обозначим его c) множителя, фигурирующего в левой части неравенства (12).

Пусть $|\sigma|_{\max}$ — максимальное по модулю главное напряжение в точке тела, которое также зависит от $\mathbf{x}$ и t. Тогда, применяя неравенство Коши — Буняковского, оценим первое слагаемое в правой части неравенства (12) выражением

$$I_2 \leqslant \sigma\,\|\mathbf{v}'\|\cdot\|\mathbf{v}^{\circ\prime}\|,\quad \sigma = \sup_{\mathbf{x}\in V}|\sigma|_{\max}$$

Для оценки второго слагаемого в том же неравенстве воспользуемся максимальным собственным значением $R_{\max}(t, \tau)$ матрицы 9-го порядка R^{ρ}_{ijkl}.

Для $R_{\max}(t,\tau)$ справедливо соотношение [6] $R_{\max}(t,\tau) \leqslant \sqrt{\Sigma (R^{\rho}_{ijkl})^2}$. Если $R^{*}_{ijkl}(t,\tau) \geqslant R^{\rho}_{ijkl}$, то $R_{\max}(t,\tau) \leqslant \sqrt{\Sigma (R^{*}_{ijkl}(t,\tau))^2} = R(t,\tau)$. Тогда

$$\int\limits_V v_{i,j}(t,\mathbf{x}) \int\limits_0^t R^{\rho}_{ijkl} v_{k,l}(\tau,\mathbf{x})\, dV\, d\tau \leqslant \| \mathbf{v}'(t) \| \int\limits_0^t R(t,\tau) \| \mathbf{v}'(\tau) \| \, d\tau$$

В итоге соотношению (12) можно придать вид

$$c \| \mathbf{v}'(t) \| \leqslant c_1 + \int\limits_0^t R(t,\tau) \| \mathbf{v}'(\tau) \| \, d\tau, \tag{13}$$

$$c_1 = \beta\sigma \| \mathbf{v}^{\circ\prime} \|$$

Если функция $R(t,\tau)$ не имеет слабой особенности при $t = \tau$, то на отрезке времени $[0, T]$ найдется функция $R_1(\tau)$, такая, что

$$R_1(\tau) = \sup_{t \in [0, T]} R(t,\tau) \tag{14}$$

Тогда из неравенства (13) следует неравенство

$$\| \mathbf{v}'(t) \| \leqslant \frac{c_1}{c} + \frac{1}{c} \int\limits_0^t R_1(\tau) \| \mathbf{v}'(\tau) \| \, d\tau \tag{15}$$

Если же функция $R(t,\tau)$ имеет слабую особенность при $t = \tau$, то можно поступить с неравенством так же, как в [2]. Для этого в неравенстве (13) от ядра $R(t,\tau)$ следует перейти к итерированному ядру. Как известно [7], начиная с некоторого номера n итерированные ядра становятся регулярными. Для таких ядер можно указать функцию $R_1(\tau)$. В результате от неравенства (13) перейдем к неравенству, аналогичному (15).

Применяя к неравенству (15) лемму Гронуолла—Беллмана [8], получим

$$\| \mathbf{v}'(t) \| \leqslant \frac{c_1}{c} \exp \left[\frac{1}{c} \int\limits_0^t R_1(\tau)\, d\tau \right] \tag{16}$$

Для исследования устойчивости тела на бесконечном промежутке времени вернемся к уравнению (6). Перепишем его следующим образом:

$$\int\limits_V v_{i,j} \mathring{E}_{ijkl} v_{k,l}\, dV - \beta K_1 = K_2 + K_3 + \beta K_4 + \beta K_5 \tag{17}$$

$$K_1 = \int\limits_V \sigma_{ij}{}^{*} v_{k,i} v_{k,j}\, dV, \quad K_2 = \int\limits_V v_{i,j} (\mathring{E}_{ijkl} - E_{ijkl}) v_{k,l}\, dV,$$

$$K_3 = \int\limits_V v_{i,j} \mathbf{R}_{ijkl} v_{k,l}\, dV, \quad K_4 = \int\limits_V (\sigma_{ij}{}^{\circ} - \sigma_{ij}{}^{*}) v_{k,i} v_{k,j}\, dV,$$

$$K_5 = \int\limits_V \sigma_{ij}{}^{\circ} \mathring{v}_{k,i} v_{k,j}\, dV$$

В соответствии с ограничениями (2), наложенными на функции $E_{ijkl}(t + \rho(\mathbf{x}))$, R^{ρ}_{ijkl}, $\sigma_{ij}{}^{\circ}(t, \mathbf{x})$, для любого как угодно малого числа $A > 0$ найдется такой момент времени $T = T(A)$, что для всякого момента времени $t > T$ справедливы неравенства

$$| \mathring{E}_{ijkl} - E_{ijkl} | < A, \quad | \sigma_{ij}{}^{\circ} - \sigma_{ij}{}^{*} | < A$$

$$\int\limits_T^t \sup_{\mathbf{x}} | \mathring{R}_{ijkl}(t,\tau) - R^{\rho}_{ijkl} |\, d\tau < A$$

Тогда для $t > T$ имеют место соотношения

(18) $$K_2 < 9A \, \| \mathbf{v}'(t) \|^2, \quad K_4 < 3A \, \| \mathbf{v}'(t) \|^2$$

$$K_3 = \int_V v_{i,j}(t, \mathbf{x}) \int_0^t R^{\rho}_{ijkl} v_{k,l}(\tau, \mathbf{x}) \, d\tau \, dV =$$

$$= \int_V v_{i,j}(t, \mathbf{x}) \left\{ \int_0^T R^{\rho}_{ijkl} v_{k,l}(\tau, \mathbf{x}) \, d\tau + \right.$$

$$+ \int_T^t [R^{\rho}_{ijkl} - \overset{\circ}{R}_{ijkl}(t, \tau)] \, v_{k,l}(\tau, \mathbf{x}) \, d\tau +$$

$$\left. + \int_T^t \overset{\circ}{R}_{ijkl}(t, \tau) \, v_{k,l}(\tau, \mathbf{x}) \, d\tau \right\} dV < 9A \, \| \mathbf{v}'(t) \| \cdot \| \boldsymbol{\omega}(t) \| +$$

$$+ 9R^{*\prime} \, \| \mathbf{v}'(t) \| \cdot \| \boldsymbol{\omega}(T) \| + \int_V v_{i,j}(t, \mathbf{x}) \int_T^t \overset{\circ}{R}_{ijkl}(t, \tau) \, v_{k,l}(\tau, \mathbf{x}) \, d\tau \, dV$$

$$K_5 = \int_V (\sigma_{ij}{}^{\circ} - \sigma_{ij}{}^{*}) \, \overset{\circ}{v}_{k,i} v_{k,j} \, dV + \int_V \sigma_{ij}{}^{*} \overset{\circ}{v}_{k,i} v_{k,j} \, dV <$$

$$< 3A \, \| \mathbf{v}'(t) \| \cdot \| \mathbf{v}^{\circ\prime} \| + 3\sigma^{*} \, \| \mathbf{v}'(t) \| \cdot \| \mathbf{v}^{\circ\prime} \|$$

. . . .

$$R^{*\prime} = \max_{i, j, k, l} R^{*\prime}_{ijkl}, \qquad \sigma^{*} = \max_{\mathbf{x} \in V} \overset{*}{\sigma}_{\max}$$

$$\| \boldsymbol{\omega}(T) \| = \max \| \mathbf{v}'(t) \| \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T$$

$$\| \boldsymbol{\omega}(t) \| = \max \| \mathbf{v}'(t) \| \text{ при } T \leqslant t$$

где $\overset{*}{\sigma}_{\max}$ — максимальное по модулю главное напряжение в точке, напряженное состояние в которой характеризуется тензором $\sigma_{ij}{}^{*}$.

С учетом соотношений (18) из равенства (17) получим

(19) $$K^{*} < \beta K_1 + \| \mathbf{v}'(t) \| \, (12A \, \| \mathbf{v}'(t) \| + 3A\beta \, \| \mathbf{v}^{\circ\prime} \| +$$
$$+ 3\sigma^{*}\beta \, \| \mathbf{v}^{\circ\prime} \| + 9A \, \| \boldsymbol{\omega}(t) \| + 9R^{*} \, \| \boldsymbol{\omega}(T) \| \,) + K_6$$

$$K^{*} = \int_V v_{i,j}(t, \mathbf{x}) \, (\overset{\circ}{E}_{ijkl} - \overset{\circ\prime}{R}_{ijkl}) \, v_{k,l}(t, \mathbf{x}) \, dV$$

$$K_6 = \int_V v_{i,j}(t, \mathbf{x}) \left[\int_T^t \overset{\circ}{R}_{ijkl}(t, \tau) \, v_{k,l}(\tau, \mathbf{x}) \, d\tau - \overset{\circ\prime}{R}_{ijkl} v_{k,l}(t, \mathbf{x}) \right] dV$$

В соответствии с условиями (2) имеем

$$\int_T^t \overset{\circ}{R}_{ijkl}(t, \tau) \, d\tau = \overset{\circ\prime}{R}_{ijkl} + A$$

Тогда ($\delta(t - \tau)$ — дельта-функция)

(20) $$\int_T^t \overset{\circ}{R}_{ijkl}(t, \tau) \, v_{k,l}(\tau, \mathbf{x}) \, d\tau - \overset{\circ\prime}{R}_{ijkl} v_{k,l}(t, \mathbf{x}) =$$

$$= \int_T^t [\overset{\circ}{R}_{ijkl}(t, \tau) - \delta(t - \tau) \, \overset{\circ\prime}{R}_{ijkl}] \, v_{k,l}(\tau, \mathbf{x}) \, d\tau \leqslant A\omega_{k,l}(t, \mathbf{x})$$

$$\omega_{k,l}(t, \mathbf{x}) = \sup | v_{k,l}(t, \mathbf{x}) | \text{ при } t \geqslant T$$

Последнее слагаемое в соотношении (19) с учетом неравенства (20) можно оценить следующим образом:

(21) $$K_6 \leqslant 18 \, A \, \| \mathbf{v}'(t) \| \cdot \| \boldsymbol{\omega}(t) \|$$

В итоге неравенство (19) принимает вид

(22) $$K^{*} < \beta K_1 + \| \mathbf{v}'(t) \| \, (12A \, \| \mathbf{v}'(t) \| + 27A \, \| \boldsymbol{\omega}(t) \| +$$
$$+ 3A\beta \, \| \mathbf{v}^{\circ\prime} \| + 3\beta\sigma^{*} \, \| \mathbf{v}^{\circ\prime} \| + 9R^{*} \, \| \boldsymbol{\omega}(T) \|)$$

Рассмотрим однородную краевую задачу, которой соответствует уравнение

(23) $$K^* = \lambda K_1$$

Как известно [4], эта задача является самосопряженной и ее собственные значения вещественные. Относительно симметричной матрицы $\overset{\circ}{E}_{ijkl} - \overset{\circ\prime}{R}_{ijkl}$ сделаем естественное предположение, заключающееся в том, что все собственные значения ее положительны.

Можно показать, что в случае малых напряжений σ_{ij}^* функционал $K^* - K_1$ является положительно-определенным (исключая из рассмотрения возможные жесткие смещения тела). Тогда ([5], с. 235) имеем

(24) $$K^* \geqslant \lambda_1 K_1$$

где λ_1 — минимальное собственное значение однородной краевой задачи (23).

Как известно ([5], с. 213), справедлива оценка

(25) $$K^* \geqslant \lambda_1^\circ \| \mathbf{v}' \|^2$$

Здесь λ_1° — минимальное собственное значение однородной краевой задачи

$$K^* = \lambda \int\limits_V A_{ijkl} v_{i,j} v_{k,l} \, dV, \quad A_{ijkl} = \begin{cases} 1, & i = j = k = l \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, принимая во внимание оценки (24), (25) представим неравенство (22) в виде

(26) $$(1 - \beta/\lambda_1) \lambda_1^\circ \| \mathbf{v}'(t) \|^2 < \| \mathbf{v}'(t) \| (12A \| \mathbf{v}'(t) \| + 18A \| \boldsymbol{\omega}(t) \| + 3A\beta \| \mathbf{v}^{\circ\prime} \| + 3\sigma^*\beta \| \mathbf{v}^{\circ\prime} \| + 9R^* \| \boldsymbol{\omega}(T) \|)$$

Отсюда следует

(27) $$(\lambda_1 - \beta - 30A\lambda_1/\lambda_1^\circ) \| \boldsymbol{\omega}(t) \| < 3 [(A + \sigma^*) \beta \| \mathbf{v}^{\circ\prime} \| + 3R^* \| \boldsymbol{\omega}(T) \|], \quad t > T$$

Предполагая, что область, занимаемая телом, звездная по отношению ко всем точкам некоторого шара, лежащего внутри указанной области, можно записать неравенство [9]

(28) $$\| \mathbf{v}(t) \| \leqslant c^* \| \mathbf{v}'(t) \| \leqslant c^* \| \boldsymbol{\omega}(t) \|$$

где c^* — постоянная, зависящая только от геометрии тела.

Таким образом, из неравенств (27), (28) вытекает, что рассматриваемое тело устойчиво на бесконечном промежутке времени, если $\lambda_1 > \beta$. Отсюда, в частности, видно, что при постоянных во времени напряжениях σ_{ij}° значение критического времени определяется так же, как для упругого тела, модули упругости которого заменяются длительными модулями $\overset{\circ}{E}_{ijkl} - \overset{\circ\prime}{R}_{ijkl}$.

Исследование устойчивости тела на конечном промежутке времени может быть произведено при помощи неравенств (16), (28), из которых имеем

$$\| \mathbf{v}(t) \| \leqslant J, \quad J = b \exp \left[\frac{1}{c} \int\limits_0^t R_1(\tau) \, d\tau \right], \quad b = c^* \frac{c_1}{c}$$

Величина, оценивающая значение критического времени снизу, определяется из нелинейного уравнения

$$J = \| \mathbf{v} \|^*$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. *Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.* Устойчивость стержней из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 177—187.
3. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
4. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
5. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
6. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. М.— Л.: Гостехиздат, 1951. 804 с.
8. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 216 с.
9. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 216 с.

Поступила в редакцию 17.IV.1984

Москва