

УДК 593.3

О НАРАЩИВАНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Метлов В. В.

Дается постановка задачи о напряженно-деформированном состоянии непрерывно наращиваемого тела при конечных деформациях. Вводится понятие градиента деформации в наращиваемом теле с учетом предыстории деформирования присоединяемых элементов. Рассматриваются граничные условия на поверхности роста, отличающиеся от обычных условий в напряжениях или смещениях. Получено решение задачи о наращивании неоднородного вязкоупругого цилиндра при действии предварительной деформации присоединяемых элементов, скручивающей, растягивающей и вдавливающей нагрузок, а также об одновременном наращивании и снятии полого шара. Приводятся результаты расчетов для задачи о намотке с натягом вязкоупругого неоднородного цилиндра.

1. Кинематика наращиваемого тела. Определяющее уравнение. Под наращиванием тела будем понимать непрерывное присоединение новых элементов к части его поверхности (поверхности роста). Модель непрерывно наращиваемого тела может описывать процессы последовательного возведения сооружений, постепенного образования твердого тела при фазовом переходе, изготовления тел посредством намотки и т. п.

Для фиксированных (ненаращиваемых) тел принято отсчетное описание движения $\mathbf{x} = \chi(t, \mathbf{X})$, где \mathbf{x} — радиус-вектор материальной точки (частицы) в актуальной (текущей) конфигурации, \mathbf{X} — радиус-вектор этой точки в фиксированной отсчетной конфигурации. При этом определяющее уравнение достаточно общего вида записывается в форме [1]

$$(1.1) \quad \mathbf{T}(t, \mathbf{X}) = \Phi_{\kappa}(t - t_0, \mathbf{F}^t(\mathbf{X}), \mathbf{X}), \quad \mathbf{F}(\tau, \mathbf{X}) = \nabla_{\mathbf{x}} \chi(\tau, \mathbf{X})$$

Здесь \mathbf{T} — тензор напряжения Коши, Φ_{κ} — функционал, зависящий от выбранной отсчетной конфигурации κ , $\mathbf{F}^t(\mathbf{X}) = (\mathbf{F}^t(s, \mathbf{X}) = \mathbf{F}(t - s, \mathbf{X}), 0 \leq s < \infty)$ — предыстория до текущего момента времени t градиента $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{X})$ деформации из отсчетной конфигурации κ в актуальную $\chi(\tau)$. Соотношение (1.1) должно удовлетворять условию инвариантности относительно галилеевой группы преобразований пространства — времени [1]. Инвариантность относительно сдвига начала отсчета времени приводит к тому, что для тела с переменными во времени свойствами функционал Φ_{κ} может зависеть от времени t лишь посредством разности $t - t_0$, где t_0 — некоторый фиксированный момент времени, за который можно принять момент изготовления (зарождения) тела. Если различные элементы стареющего тела изготовлены в разные моменты времени $t_0 = t_0(\mathbf{X})$, то оно обладает возрастной неоднородностью, исследованной впервые в работе [2].

Особенность наращиваемого тела состоит в том, что для него невозможно зафиксировать какую-либо отсчетную конфигурацию его частиц, так как оно непрерывно пополняется новыми частицами. Ближайшая цель

работы состоит в построении аналога градиента деформации для наращиваемого тела.

В качестве метки частицы, присоединившейся в процессе наращивания, служит тройка чисел (τ^*, u_1, u_2) , где τ^* — момент присоединения частицы к телу, (u_1, u_2) — ее криволинейные координаты на поверхности роста $S^*(\tau^*)$. В общем случае в качестве метки можно взять произвольный трехмерный параметр ξ , взаимно однозначно связанный с тройкой чисел (τ^*, u_1, u_2) . Поскольку в одной и той же точке пространства к наращиваемому телу в различные моменты времени могут присоединиться разные частицы или может происходить непрерывное присоединение частиц в одном месте (при неподвижной поверхности роста), то радиус-вектор частицы в момент ее присоединения $X(\xi)$ вообще говоря, не может служить ее меткой.

Разрешая относительно ξ уравнение $x = \chi(t, \xi)$ и подставляя $\xi = \xi(t, x)$ в функцию скорости частицы $\dot{\chi}(t, \xi)$, получим пространственное поле скоростей $v(t, x)$, такое, что $v(t, \chi(t, \xi)) = \dot{\chi}(t, \xi)$ (здесь и далее точкой обозначена частная производная по времени). Если задано поле $v(t, x)$, то движение $\chi(t, \xi)$ находится интегрированием обыкновенной системы $d\chi/dt = v(t, \chi)$, $\chi(\tau^*) = X(\xi)$.

Тензоры второго ранга трактуются далее как линейные отображения трехмерного евклидова векторного пространства в себя [1]. Композиция (матричное произведение) тензоров A и B обозначается AB , а результат действия тензора A на вектор a — Aa . Матрица компонент A_k^i тензора A в каком-либо базисе $(e_k)_{k=1, 2, 3}$ определяется разложениями $Ae_k = A_k^i e_i$ (суммирование по повторяющемуся индексу). Пространственный аргумент x , а также ξ (соответственно, X) у функций в дальнейшем иногда опускается. В равенствах, содержащих одновременно функции переменных x и ξ (соответственно, X), предполагается, что эти переменные связаны соотношением $x = \chi(t, \xi)$ (соответственно, $x = \chi(t, X)$).

Градиент F фиксированного тела обладает следующими свойствами.

1°. Пусть $Q_\tau(t, X)$ — градиент деформации при переходе тела из конфигурации $\chi(\tau)$ в конфигурацию $\chi(t)$; пространственный градиент скорости обозначим $G(t, X) = \nabla_x v(t, x)|_{x=\chi(t, X)}$. Тогда справедливы соотношения (I — единичный тензор)

$$(1.2) \quad F(t, X) = Q_\tau(t, X) F(\tau, X), \quad Q_\tau(t, X) = \int_\tau^t (I + G(\tau, X)) d\tau$$

Первая формула — правило перемножения градиентов, вторая, представляющая $Q_\tau(t)$ в виде мультипликативного интеграла [3], — следствие дифференциальных уравнений [1]

$$(1.3) \quad \dot{F}(t, X) = G(t, X) F(t, X), \quad \dot{Q}_\tau(t, X) = G(t, X) Q_\tau(t, X)$$

2°. Плотность массы тела в актуальной конфигурации $\rho(t, X) = \rho_x(X)/\det F(t, X)$, где ρ_x — плотность массы в отсчетной конфигурации; в частности, $\rho(t, X) = \rho(\tau, X)/\det Q_\tau(t, X)$. Отсюда и из (1.3) вытекает уравнение неразрывности [1]: $\rho' + \rho \operatorname{div}_x v = 0$.

3°. При замене системы отсчета, порождающей ортогональное преобразование пространства с тензором $O(t)$, градиент деформации преобразуется по формуле [1] $F^*(t) = O(t)F(t)$.

В любой момент времени τ , удовлетворяющий условию $\tau > \tau^*(\xi)$, наращиваемое тело содержит точку ξ вместе с некоторой ее окрестностью.

Следовательно, можно определить градиент деформации $Q_\tau(t, \xi)$ при переходе окрестности точки ξ из конфигурации $\chi(\tau)$ в $\chi(t)$ для любых $t \geq \tau > \tau^*(\xi)$. При этом будем иметь

$$(1.4) \quad Q_\tau(t, \xi) = G(t, \xi) Q_\tau(t, \xi), \quad Q_\tau(t, \xi) = \\ = \int_{\tau}^t (I + G(\tau, \xi) d\tau), \quad G(\tau, \xi) = \nabla_x v(\tau, x)$$

Продолжая функцию $Q_\tau(t, \xi)$ по непрерывности в точку $\tau = \tau^*(\xi)$, получим $Q(t, \xi) = \lim_{\tau \rightarrow \tau^*(\xi) + 0} Q_\tau(t, \xi)$ — градиент деформации при переходе элемента тела из начального состояния в момент присоединения в актуальное. В момент присоединения $\tau^*(\xi)$ элемент тела в окрестности точки ξ может иметь в результате предыстории его деформирования отличный от I градиент деформации $F_*(\xi)$ относительно некоторого отсчетного состояния. Используя правило умножения градиентов, для градиента деформации при переходе элемента из отсчетного состояния в актуальное получим

$$(1.5) \quad F(t, \xi) = Q(t, \xi) F_*(\xi), \quad Q(t, \xi) = \int_{\tau^*(\xi)}^t (I + G(\tau, \xi) d\tau)$$

Градиент $F(t, \xi)$, определенный формулой (1.5), обладает свойствами 1° — 3° при замене X на ξ и $\rho_x(X)$ на $\rho_0(\xi)$ — плотность массы элементов тела в отсчетном состоянии. Используя функционал Φ , удовлетворяющий условию независимости от системы отсчета [1], определяющее уравнение для наращиваемого тела запишем в форме

$$(1.6) \quad T(t, \xi) = \Phi(t - t_0(\xi), F^t(\xi), \xi), \quad t \geq t_0(\xi), \quad t_0(\xi) \leq \tau^*(\xi)$$

Начальное напряженное состояние $T^*(\xi) = \Phi(\tau^* - t_0, F^{\tau^*}, \xi)$ удовлетворяет условию равновесия с внешним силовым воздействием на поверхность роста $S^*(\tau^*)$ с нормалью n

$$(1.7) \quad T^*(\xi) n = P(\tau^*(\xi), x) |_{x \in S^*(\tau^*)}$$

где $P(t, x)$ — вектор напряжения, действующего на $S^*(t)$. Прочие три компоненты начального тензора напряжения $T^*(\xi)$, а также тензор $F_*(\xi) = F(\tau^*(\xi), \xi)$ определяются предысторией F^{τ^*} деформирования элемента в окрестности частицы ξ [4].

Приведем формулы, определяющие $Q(t, \xi)$, для двух частных видов деформации. Пусть тензоры $G(\tau, \xi)$ коммутируют при всех $\tau \geq \tau^*(\xi)$. Тогда

$$(1.8) \quad Q(t, \xi) = \exp \left\{ \int_{\tau^*(\xi)}^t G(\tau, \xi) d\tau \right\}$$

Пусть начальный радиус-вектор $X(\xi)$ — взаимно однозначная функция от ξ и, следовательно, движение можно представить в виде функции $x = \chi(t, X)$. Тогда

$$(1.9) \quad Q(t, X) = F_1(t, X) F_1^{-1}(\tau^*(X), X), \quad F_1(t, X) = \nabla_X \chi(t, X)$$

2. Формулы кинематики в сопутствующем базисе. Пусть $(\xi^i)_{i=1,2,3}$ — набор координат метки $\xi = \xi(\tau^*, u_1, u_2)$. Как и в [5, 6], введем базисные векторы $e_i(t, \xi) = \partial \chi(t, \xi) / \partial \xi^i$, $t > \tau^*(\xi)$. Положим

$$e_i^*(\xi) = \lim_{\tau \rightarrow \tau^*(\xi) + 0} e_i(\tau, \xi), \quad e_i^\circ(\xi) = F_*^{-1}(\xi) e_i^*(\xi), \quad g_{ij} = (e_i \cdot e_j) \\ g_{ij}^* = (e_i^* \cdot e_j^*), \quad g_{ij}^\circ = (e_i^\circ \cdot e_j^\circ), \quad \varepsilon_{ij}(t, \xi) = (g_{ij} - g_{ij}^\circ) / 2$$

где $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ — скалярное произведение. Тогда имеем

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{e}_i(t, \xi) &= \mathbf{Q}(t, \xi) \mathbf{e}_i^*(\xi) = \mathbf{F}(t, \xi) \mathbf{e}_i^0(\xi), \quad \mathbf{Q}(t, \xi) = \mathbf{e}_i(t, \xi) \otimes \mathbf{e}^{*i}(\xi) \\ \mathbf{E}_1 &= \varepsilon_{ij} \mathbf{e}^{0i} \otimes \mathbf{e}^{0j} = 1/2(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^{0i} \\ \mathbf{E}_2 &= \varepsilon_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = 1/2(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \\ \varepsilon_{ij}(t, \xi) &= \varepsilon_{ij}^*(\xi) + \int_{\tau^*(\xi)}^t e_{ij}(\tau, \xi) d\tau, \quad \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(g_{ij}^* - g_{ij}^0) \\ e_{ij}(t, \xi) &= 1/2(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_{i,j} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{G} \mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ — тензорное (диадное) произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} [1, 5, 6], \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 — первый и второй тензоры конечной деформации [6], \mathbf{F}^T — тензор, транспонированный к \mathbf{F} , e_{ij} и $v_{i,j}$ — компоненты тензора скоростей деформации [5] $\mathbf{D} = (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)/2$ и пространственного градиента скорости в базисе $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j(t, \xi)$, (\mathbf{e}^{0i}) , (\mathbf{e}^{*i}) и (\mathbf{e}^i) — базисы, взаимные к (\mathbf{e}_i^0) , (\mathbf{e}_i^*) и (\mathbf{e}_i) , \mathbf{A}^{-1} — тензор, обратный к тензору \mathbf{A} .

3. Закон наращивания. Постановка краевой задачи. Процесс присоединения к наращиваемому телу новых элементов характеризуется вектором плотности потока присоединяемого вещества $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ на поверхности роста $S^*(t)$. Рассматривая баланс массы на поверхности роста, получим условие

$$(3.1) \quad J_n + \rho^*(s_n - v_n)|_{S^*(t)} = 0, \quad \rho^*(\xi) = \frac{\rho_0(\xi)}{\det \mathbf{F}_*(\xi)}, \quad s_n = \left(\frac{\partial \mathbf{X}(\xi)}{\partial \tau^*} \cdot \mathbf{n} \right)$$

Здесь ρ^* — объемная плотность массы присоединяемых элементов, $J_n < 0$ и v_n — проекции вектора \mathbf{J} и материальной скорости \mathbf{v} на внешнюю нормаль \mathbf{n} к S^* , s_n — скорость движения поверхности S^* по нормали \mathbf{n} .

Пусть в момент $t = 0$ начинается наращивание исходного тела, занимающего область Ω_0 , на части его поверхности $S^*(0)$. На других частях его поверхности $S_\sigma(t)$ и $S_\chi(t)$ заданы, соответственно, векторы напряжения и смещения. При формулировании краевой задачи на $S^*(t)$ задается вектор потока $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ или составляющая потока $J_n < 0$ по нормали к $S^*(t)$; далее, задается значение плотности $\rho_0(\xi)$, величина $\mathbf{P}(t, \mathbf{x})$ и предыстория градиента $\mathbf{F}^{\tau^*} = (\mathbf{F}(\tau, \xi), \tau \in [t_0(\xi), \tau^*(\xi)])$, $\mathbf{F}(\tau^*(\xi), \xi) = \mathbf{F}_*(\xi)$, удовлетворяющие условию (1.7), а также вектор плотности массовой силы $\mathbf{b}(t, \mathbf{x})$. Требуется определить закон изменения области $\Omega(t)$, занимаемой телом, и деформацию $\chi(t, \xi)$, удовлетворяющую граничному условию (3.1) и уравнению квазистатического равновесия $\operatorname{div}_x \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = 0$, где \mathbf{T} определяется соотношением (1.6), а плотность $\rho(t, \xi) = \rho_0(\xi)/\det \mathbf{F}(t, \xi)$. Одновременно нужно найти деформацию $\chi_0(t, \mathbf{X}_0)$ точек $\mathbf{X}_0 \in \Omega_0$ исходного тела, удовлетворяющую уравнению равновесия, граничным условиям на $S_\sigma(t)$ и $S_\chi^a(t)$ и условиям сопряжения с наращенной частью тела.

4. О наращивании вязкоупругого полого несжимаемого цилиндра. Пусть (R_0, Θ_0, Z_0) — цилиндрические координаты в начальной конфигурации исходного полого цилиндра $\Omega_0 = \{(R_0, \Theta_0, Z_0): R_1 \leq R_0 \leq R_2\}$. Начиная с момента времени $t = 0$ происходит его наружное наращивание с радиальным вектором потока величиной $\rho J_0(t)$, где ρ — постоянная плотность. Одновременно начинают действовать внутреннее $p_i(t)$ и внешнее $p_e(t)$ давления, осевая сила $P_z(t)$ и крутящий момент $M_z(t)$, изменяясь непрерывно при нулевых начальных значениях. Обозначим (r, φ, z) — цилиндрические координаты в пространстве, $c(t)$ — внешний радиус ци-

линдра. Пространственное поле скоростей ищем в виде

$$(4.1) \quad v_r = f(t, r), \quad v_\varphi = r\psi(t)z, \quad v_z = \alpha(t)z$$

Условие несжимаемости $\operatorname{div}_x \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ дает $\partial f/\partial r + f/r + \alpha = 0$, откуда находим $\beta(t)$ — неопределенная функция)

$$(4.2) \quad f(t, r) = -\alpha(t)r/2 + \beta(t)/r$$

Обозначим $r_0(t, R_0)$, $\varphi_0(t, \Theta_0, Z_0)$, $z_0(t, Z_0)$ — цилиндрические координаты текущего радиуса-вектора $\mathbf{x} = \chi_0(t, \mathbf{X}_0)$ точки $\mathbf{X}_0(R_0, \Theta_0, Z_0)$ исходного цилиндра, $r(t, \tau^*)$, $\varphi(t, \tau^*, \Theta, Z)$, $z(t, \tau^*, Z)$ — цилиндрические координаты текущего радиуса-вектора $\mathbf{x} = \chi(t, \xi)$ точки $\xi = (\tau^*, \Theta, Z)$ наращенной части цилиндра, где (Θ, Z) — координаты частицы в момент ее присоединения τ^* на поверхности роста $S^*(\tau^*) = \{(r, \varphi, z) : r = c(\tau^*)\}$. Интегрируя соответствующую (4.1) обыкновенную систему, с учетом (4.2) получим

$$(4.3) \quad r_0^2(t, R_0) = R_0^2 a(t, 0) + \int_0^t a(t, \tau) 2\beta(\tau) d\tau$$

$$a(t, \tau) = \exp\left\{-\int_\tau^t \alpha(s) ds\right\}$$

$$r^2(t, \tau^*) = c^2(\tau^*) a(t, \tau^*) + \int_{\tau^*}^t a(t, \tau) 2\beta(\tau) d\tau$$

$$\varphi_0(t, \Theta_0, Z_0) = \Theta_0 + \int_0^t z_0(\tau, Z_0) \psi(\tau) d\tau, \quad z_0(t, Z_0) = \frac{Z_0}{a(t, 0)}$$

$$\varphi(t, \tau^*, \Theta, Z) = \Theta + \int_{\tau^*}^t \psi(\tau) z(\tau, \tau^*, Z) d\tau, \quad z(t, \tau^*, Z) = \frac{Z}{a(t, \tau^*)}$$

При вычислении градиента деформации воспользуемся соотношениями [1]

$$(4.4) \quad \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial x^k}{\partial X^l} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{h}^l, \quad \mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^k}$$

$$\mathbf{h}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X^i}, \quad A_{kl} = A_l^k |\mathbf{e}_k| \cdot |\mathbf{h}^l|$$

где $x^k(\mathbf{x})$ и $X^l(\mathbf{X})$ ($k, l = 1, 2, 3$) — произвольные системы координат в актуальной и отсчетной конфигурациях, $(\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}^l) = \delta_i^l$, A_{kl} — физические компоненты тензора $\mathbf{A} = A_l^k \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{h}^l$ в ортогональных криволинейных системах координат $(x^k(\mathbf{x}))$ и $(X^l(\mathbf{X}))$.

Для точек наращенной области нужно предварительно выразить координаты в момент t через координаты в момент $\tau > \tau^*$. Соответствующие формулы имеют вид

$$(4.5) \quad r^2(t) = r^2(\tau) a(t, \tau) + \int_\tau^t a(t, s) 2\beta(s) ds$$

$$\varphi(t) = \varphi(\tau) + \int_\tau^t \psi(s) z(s) ds, \quad z(t) = z(\tau)/a(t, \tau)$$

Обозначим $\mathbf{e}_i(\mathbf{x})$ и $\mathbf{e}_i(\mathbf{X}_0)$ — единичные векторы базиса в цилиндрической системе координат в актуальной и начальной конфигурациях, $\mathbf{e}_i^*(\xi) = \mathbf{e}_i(\mathbf{X}(\xi))$, $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{X}(\xi) = \chi(\tau^*(\xi), \xi)$. Вычисляя по (4.3) — (4.5) тензоры $\mathbf{F}_0(t, \mathbf{X}_0) = \nabla_{\mathbf{X}_0} \chi_0(t, \mathbf{X}_0)$ и $\mathbf{Q}_\tau(t, \xi)$ и устремляя $\tau \rightarrow \tau^*$, будем иметь для отличных от нуля физических компонент тензоров

$\mathbf{F}_0(t, \mathbf{X}_0) = F_{ij}^\circ(t, R_0) \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_j(\mathbf{X}_0)$ и $\mathbf{Q}(t, \xi) = Q_{ij}(t, \tau^*) \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_j^*(\xi)$ следующие выражения:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} F_{11}^\circ &= (A_0 B_0)^{-1}, \quad Q_{11} = (A_1 B_1)^{-1}, \quad F_{22}^\circ = B_0, \quad Q_{22} = B_1 \\ F_{23}^\circ &= C_0, \quad Q_{23} = C_1, \quad F_{33}^\circ = A_0, \quad Q_{33} = A_1 \\ A_0 &= a(t, 0)^{-1}, \quad A_1 = a(t, \tau^*)^{-1} \\ B_0 &= r_0(t, R_0)/R_0, \quad B_1 = r(t, \tau^*)/c(\tau^*) \\ C_0 &= r_0(t, R_0) \int_0^t a(\tau, 0)^{-1} \psi(\tau) d\tau, \quad C_1 = r(t, \tau^*) \int_{\tau^*}^t a(\tau, \tau^*)^{-1} \psi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Пусть предистории градиента ($\mathbf{F}(\tau, \xi), t_0(\xi) \leq \tau \leq \tau^*$) удовлетворяют соотношениям: $t_0 = t_0(\tau^*)$, $\mathbf{F} = F_{ij}(\tau, \tau^*) \mathbf{g}_i(\tau, \xi) \otimes \mathbf{g}_j^\circ(\xi)$, где $(\mathbf{g}_i(\tau, \xi))$ — ортонормированный базис, такой, что $\mathbf{g}_i(\tau^*, \xi) = \mathbf{e}_i^*(\xi)$, $\mathbf{g}_j^\circ(\xi) = \mathbf{g}_j(t_0, \xi)$. При этом матрица компонент $F_{ij}(\tau, \tau^*)$ при $\tau \in [t_0, \tau^*]$ имеет структуру (4.6) с параметрами A_2, B_2, C_2 , зависящими от τ и τ^* . Примером рассмотренной предистории деформации может служить непрерывная модель наращивания тонкостенными трубками, испытанными предварительную деформацию кручения, осевого растяжения и вдавливания [1] (ср. с (4.3), (4.6))

$$(4.7) \quad r = \sqrt{R^2/e(t) + b(t)}, \quad \varphi = \Theta + \Psi(t)Z, \quad z = e(t)Z$$

Градиент полной деформации при $t \geq \tau^*(\xi)$ будет $(\mathbf{F}_*(\xi) = F_{kl}^*(\tau^*) \mathbf{e}_k^*(\xi) \otimes \mathbf{g}_l^\circ(\xi))$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}(t, \xi) &= \mathbf{Q}(t, \xi) \mathbf{F}_*(\xi) = Q_{ij}(t, \tau^*) F_{jl}^*(\tau^*) \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_l^\circ(\xi) = \\ &= F_{il}(t, \tau^*) \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}_l^\circ(\xi) \end{aligned}$$

Выполняя умножение матриц (4.6), согласно (4.8), получим для ненулевых компонент $F_{ij}(t, \tau^*)$ ($t \geq \tau^*$) следующие выражения:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} F_{11} &= (AB)^{-1}, \quad F_{22} = B, \quad F_{23} = C, \quad F_{33} = A \\ A &= A^* A_1, \quad B = B^* B_1, \quad C = C^* B_1 + A^* C_1 \\ A^* &= A_2(\tau^*, \tau^*), \quad B^* = B_2(\tau^*, \tau^*), \quad C^* = C_2(\tau^*, \tau^*) \end{aligned}$$

В качестве определяющего уравнения возьмем предложенный для резиноподобных наполненных полимеров вязкоупругий аналог уравнения для неогукера тела¹

$$(4.10) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{F}(t) L(t - t_0, [\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \text{tr} \mathbf{C}/3]^t) \mathbf{F}^T(t), \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

Здесь p — гидростатическое давление, L — линейный функционал, действующий по правилу ($\varphi^t(s) = \varphi(t - s)$):

$$(4.11) \quad \begin{aligned} L(t - t_0, \varphi^t) &= \int_0^{t-t_0} \mu(t - t_0, t - t_0 - s) d_s \varphi^t(s) = \\ &= \int_{t_0}^t \mu(t - t_0, \tau - t_0) d_\tau \varphi(\tau) \end{aligned}$$

При малых деформациях уравнение (4.10) становится определяющим уравнением линейной вязкоупругости $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2L(t - t_0, [\mathbf{E} - \mathbf{I} \text{tr} \mathbf{E}/3]^t)_\varepsilon$ где \mathbf{E} — тензор бесконечно малой деформации. Таким образом, если тело подчиняется определяющему уравнению (4.10), то $\mu(t - t_0, \tau - t_0)$ — функция релаксации при малых деформациях сдвига.

¹ Адамов А. А. Построение уравнения состояния вязкоупругого слабосжимаемого материала при конечных деформациях: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ. мат. наук. Пермь: УНЦ АН СССР. Ин-т механики сплошных сред, 1979. 159 с.

Тензор $\mathbf{C}(\tau, \xi)$ при $t_0 \leq \tau \leq \tau^*$ равен

$$(4.12) \quad \mathbf{C}(\tau, \xi) = (F_{ij}(\tau, \tau^*) g_j^\circ(\xi) \otimes g_i(\tau, \xi)) (F_{kl}(\tau, \tau^*) g_k(\tau, \xi) \otimes g_l^\circ(\xi)) = \\ = F_{ij}(\tau, \tau^*) F_{il}(\tau, \tau^*) g_j^\circ(\xi) \otimes g_l^\circ(\xi)$$

Аналогично получим

$$(4.13) \quad \mathbf{C}(t, \xi) = g_i^\circ(\xi) \otimes g_j^\circ(\xi) F_{ki}(t, \tau^*) F_{kj}(t, \tau^*), \quad t \geq \tau^*$$

По (4.12), (4.13) отличные от нуля компоненты тензора $\mathbf{C}(t, \xi)$ при всех $t \geq t_0$ (τ^*) в базисе $g_i^\circ(\xi) \otimes g_j^\circ(\xi)$ таковы:

$$(4.14) \quad C_{11} = (AB)^{-2}, \quad C_{22} = B^2, \quad C_{23} = C_{32} = BC, \quad C_{33} = C^2 + A^2$$

Здесь все компоненты — функции от t и τ^* , и при $t \leq \tau^*$ имеем $A = A_2$, $B = B_2$, $C = C_2$. Ненулевые компоненты тензора $\mathbf{H} = \mathbf{T} + p\mathbf{I}$ по (4.10), (4.14) в базисе $e_i(\mathbf{x}) \otimes e_j(\mathbf{x})$ равны

$$(4.15) \quad H_{11} = (AB)^{-2} L(t - t_0, [1 - (AB)^2 I_1]^t) \\ H_{22} = B^2 L(t - t_0, [1 - ((C/AB)^2 + B^{-2}) I_1]^t) - \\ - (C^2 - 2BC) L(t - t_0, Q^t), \quad Q = A^{-2} B^{-1} C I_1 \\ H_{23} = H_{32} = -ABL(t - t_0, Q^t) + ACL(t - t_0, [1 - A^{-2} I_1]^t) \\ H_{33} = A^2 L(t - t_0, [1 - A^{-2} I_1]^t), \quad I_1 = [(AB)^{-2} + \\ + B^2 + C^2 + A^2]/3$$

Компоненты тензора \mathbf{H} в базисе $e_i(\mathbf{x}) \otimes e_j(\mathbf{x})$ для точек исходного цилиндра имеют также вид (4.15) при замене A, B, C на A_0, B_0, C_0 . Момент времени t_0 для точек исходного цилиндра может зависеть от R_0 (возрастная неоднородность); ядро μ может содержать также явную зависимость от R_0 (соответственно, от τ^* для точек наращенной части), т. е. $\mu = \mu(t, \tau, R_0)$ (соответственно, $\mu = \mu(t, \tau, \tau^*)$). При этих условиях компоненты тензора \mathbf{H} зависят лишь от t и R_0 (соответственно t , и τ^*). Из соотношений (4.3) найдем обратные функции $R_0 = R_0(t, r)$ и $\tau^* = \tau^*(t, r)$; подставив их в функции $H_{ij}(t, R_0)$ и $H_{ij}(t, \tau^*)$, получим, что $H_{ij} = H_{ij}(t, r)$. Отсюда и из уравнений равновесия $\text{div}_x(\mathbf{H} - p\mathbf{I}) = 0$ будем иметь

$$(4.16) \quad \partial_r \sigma_r + \sigma/r = 0, \quad \partial_\varphi p = 0, \quad \partial_z p = 0 \\ \sigma_r = T_{11}, \quad \sigma_\varphi = T_{22}, \quad \sigma_z = T_{33} \\ \sigma = \sigma_\varphi - \sigma_r, \quad \mathbf{T} = T_{ij} e_i(\mathbf{x}) \otimes e_j(\mathbf{x})$$

и аналогичные равенства для точек исходного цилиндра. Отсюда

$$(4.17) \quad p = p(t, r), \quad T_{ij} = T_{ij}(t, r) \\ \sigma_r^\circ(t, r) = -p_i(t) + V^\circ(t, r) - V^\circ(t, r_0(t, R_1)) \\ r_0(t, R_1) \leq r \leq r_0(t, R_2) \\ \sigma_r(t, r) = -p_e(t) + V(t, r) - V(t, c(t)), \\ r(t, 0) \leq r \leq c(t) \\ V^\circ(t, r) = \int \frac{\sigma^\circ(t, r) dr}{r}, \quad V(t, r) = \int \frac{\sigma(t, r) dr}{r}$$

где $\sigma_r^\circ, \sigma^\circ$ относятся к точкам исходного цилиндра.

Из определяющего уравнения (4.10) имеем

$$(4.18) \quad \sigma = H_{22} - H_{11}, \quad \sigma_z - \sigma_r = H_{33} - H_{11} \\ T_{23} = T_{32} = H_{23}, \quad T_{12} = T_{13} = 0$$

и аналогичные равенства для точек исходного цилиндра. Таким образом, деформации и напряжения по (4.3), (4.6), (4.9), (4.15) — (4.18) выражены через неопределенные функции времени $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\psi(t)$ и $c(t)$. Система

уравнений для их определения состоит из условия непрерывности радиального напряжения на границе исходной и наращенной областей (см. (4.17))

$$(4.19) \quad V^{\circ}(t, r_0(t, R_2)) - V^{\circ}(t, r_0(t, R_1)) + V(t, c(t)) - V(t, r(t, 0)) = (p_i - p_e)(t)$$

уравнений равновесия торцов цилиндра

$$(4.20) \quad 2\pi \int_{r_0(t, R_1)}^{c(t)} \sigma_z(t, r) r dr = P_z(t)$$

$$2\pi \int_{r_0(t, R_1)}^{c(t)} T_{23}(t, r) r^2 dr = M_z(t)$$

(где для краткости опущен индекс нуль у функций точек исходной области) и условия наращивания (3.1)

$$(4.21) \quad dc/dt = J_0(t) - \alpha(t) c(t)/2 + \beta(t)/c(t), \quad J_0(t) > 0$$

Для численного примера положим $M_z \equiv 0$ и $\alpha(t) \equiv 0$ (плоская деформация). Пусть $p_i(t) \equiv 0$ и $p_e(t) \equiv 0$. Таким образом, внешние нагрузки, кроме P_z , отсутствуют. Если бы при этом отсутствовала предварительная деформация, т. е. $F(\tau, \xi) \equiv I$ при $t_0 \leq \tau \leq \tau^*$, то отсутствовали бы напряжения (и $P_z \equiv 0$). Пусть $t_0(\tau^*) = \tau^* - 0$, а предварительная деформация есть упругомгновенная деформация в момент τ^* вида

$$F_*(\xi) = F_*^{-1} e_1^* \otimes e_1^* + F_* e_2^* \otimes e_2^* + e_3^* \otimes e_3^*, \quad F_* = F_*(\tau^*)$$

Рассматриваемая постановка задачи может служить моделью процесса наращивания цилиндра посредством намотки с натягом. Величина усилия σ_{φ}^* при намотке определяется из (4.10): $\sigma_{\varphi}^* = G(0)(F_*^2 - F_*^{-2})$, где $G(t) = \mu(t, t)$ — модуль сдвига.

Задача сводится к определению функций $\beta(t)$ и $c(t)$ из системы уравнений (4.19), (4.21). В (4.19) сделаем замену переменной $r = r_0(t, R_0)$ в интеграле по исходному цилиндру и $r = r(t, s)$ в интеграле по наращенной части, где по (4.3) $r_0^2(t, R_0) = R_0^2 + 2b(t)$, $r^2(t, s) = c^2(s) + 2(b(t) - b(s))$, $b(t) = \int \beta(t) dt$, $b(0) = 0$.

После замены порядка интегрирования уравнение (4.19) при наличии лишь возрастной неоднородности в наращенной части принимает вид ($t_0(R_0) \equiv 0$)

$$(4.22) \quad \int_0^t K_1(t, \tau, b^{\tau}, c^{\tau}, b(t)) \beta(\tau) d\tau + \int_0^t K_2(t, \tau, c(\tau), b(t)) d\tau = 0$$

$$K_1 = \sum_{i=1}^3 K_{1i}, \quad K_{11} = \frac{1}{3} \mu(t, \tau) \varphi(y) \Big|_{R_2^1}^{R_1^2}$$

$$\varphi(y) = \frac{3 - 2b(\tau)/b(t)}{y + 2b(t)} + \frac{b(\tau) \ln[1 + 2b(t)/y]}{b^2(t)} + \frac{3y + 4b(\tau)}{(y + 2b(\tau))^2}$$

$$K_{12} = \frac{2}{3} \int_0^{\tau \wedge T} \frac{\mu_1(t, \tau, s) (1 + 2w^{-1}(\tau, s))}{r^4(t, s)} ds$$

$$K_{13} = \frac{2}{3} \int_0^{\tau \wedge T} \frac{\mu_1(t, \tau, s) (1 + 2w(\tau, s))}{r^4(t, s)} ds$$

$$\mu_1(t, \tau, s) = \mu(t - s, \tau - s) J_0(s) c(s), \quad w(\tau, s) = r^2(\tau, s) F_*^2(s) / c^2(s),$$

$$\tau \wedge T = \min(\tau, T)$$

$$K_2 = 1/3 \mu_1(t, \tau, \tau) [Q^2 (2F_*^2 - F_*^{-2} - 1) - Q^{-2} (2F_*^{-2} - F_*^2 - 1)] / r^2(t, \tau)$$

$$Q = r(t, \tau) / c(\tau), \quad F_* = F_*(\tau)$$

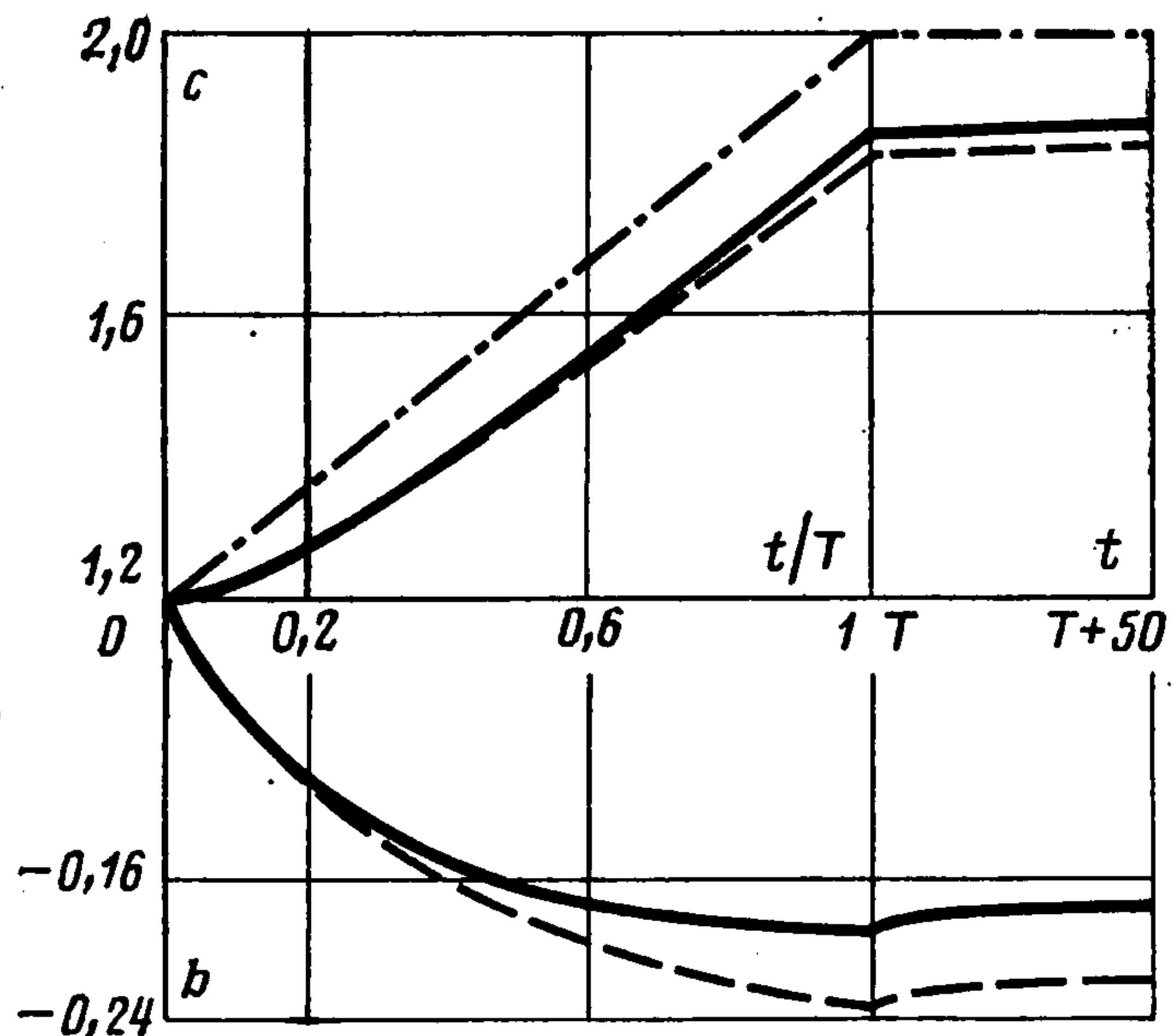
где T — момент окончания наращивания.

Система (4.21), (4.22) после дискретизации времени решалась пошаговым методом. Уравнение (4.21) интегрировалось методом Эйлера; интегралы в (4.22) вычислялись по формуле прямоугольников. Нелинейное уравнение на j -м шаге относительно ве-

личины $\beta_j = \beta(t_j)$, $t_j = j\Delta t$, где Δt — шаг интегрирования, решалось методом последовательных приближений, причем для $(n+1)$ -го приближения имеем $b^{(n+1)}(t_j) = b(t_{j-1}) + \beta_j^{(n)}\Delta t$, $\beta_j^{(0)} = 0$. Контроль за правильностью и точностью вычислений осуществлялся проверкой уравнения равновесия (4.17). При расчетах модуль G принят постоянным, ядро μ задано формулой [7] (время в усл. ед.)

$$\begin{aligned} \mu(t, \tau)G^{-1} &= 1 - \varphi(\tau) \{1 - \exp[-\gamma(t - \tau)]\} \\ \varphi(\tau) &= C + A \exp(-\beta_1\tau) \\ C &= 0,05, \quad A = 0,75, \quad \beta_1 = 0,01, \quad \gamma = 0,1 \end{aligned}$$

Отношение характерных времен старения β^{-1} и релаксации γ^{-1} равно десяти, что соответствует данным о старении полимеров [8]. Напряжения измеряются в единицах G , расстояния — в единицах внутреннего радиуса R_1 . Фиксируем следующие параметры: $R_2 = 1,2$; $F_* = 1,2$; $J_0T = 0,8$; тем самым зафиксирована последовательность возведения и загрузки [9]. На фиг. 1 изображены зависимости от времени функций $c(t)$ и $b(t)$ при $T = 100$ (сплошная линия) и $T = 20$ (штриховая линия); штрихпунктиром изображена зависимость внешнего радиуса $c(t)$ от времени при отсутствии натяга ($F_* = 1$). На фиг. 2 и 3 изображены эпюры напряжения $\sigma = |\sigma_\varphi| - |\sigma_r|$, соответственно, в момент окончания наращивания $t = T$ и в момент $t = T + 50$ (установившиеся значения остаточных напряжений) при $T = 100$ (сплошная) и при $T = 20$ (штриховая).

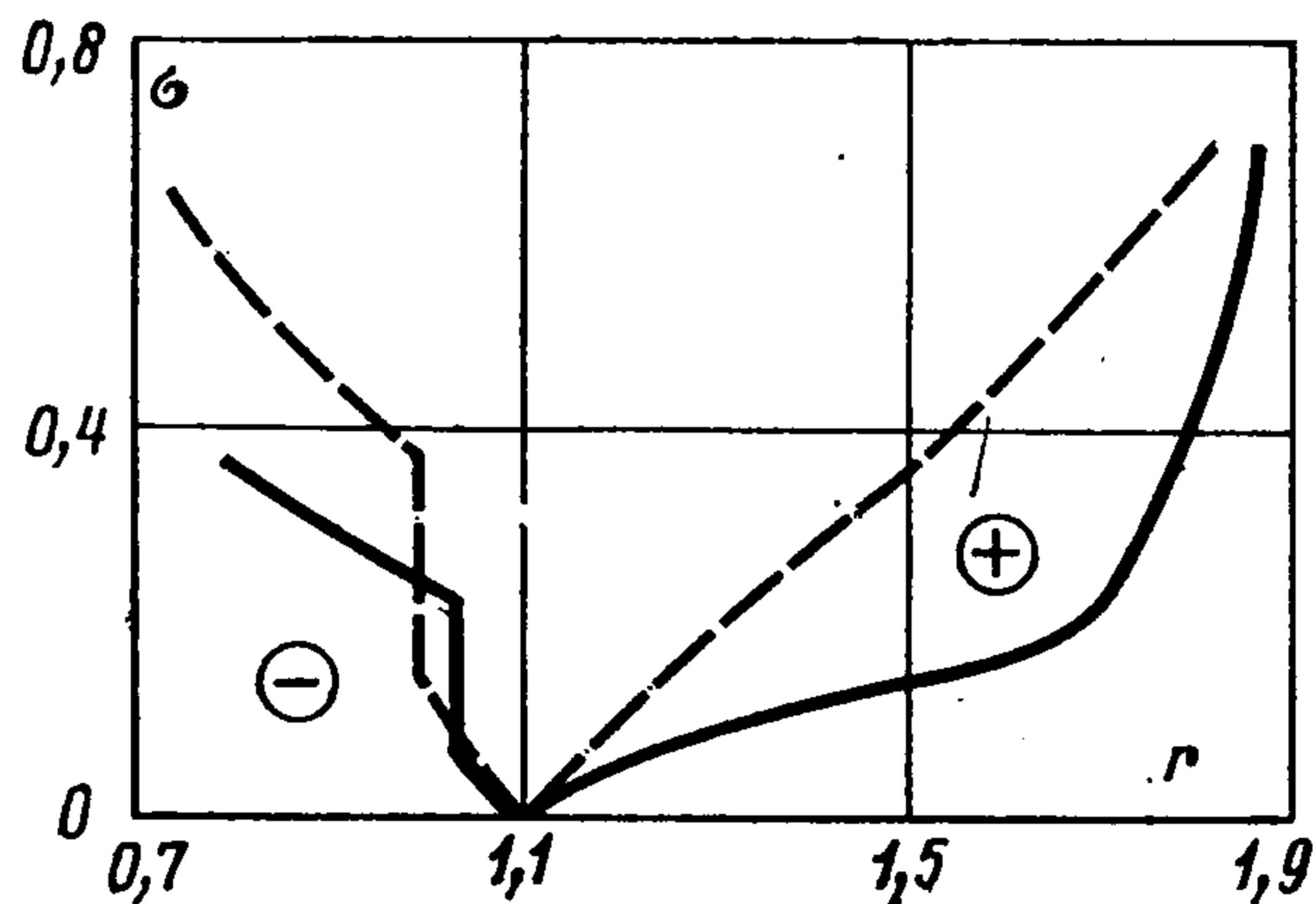


Фиг. 1

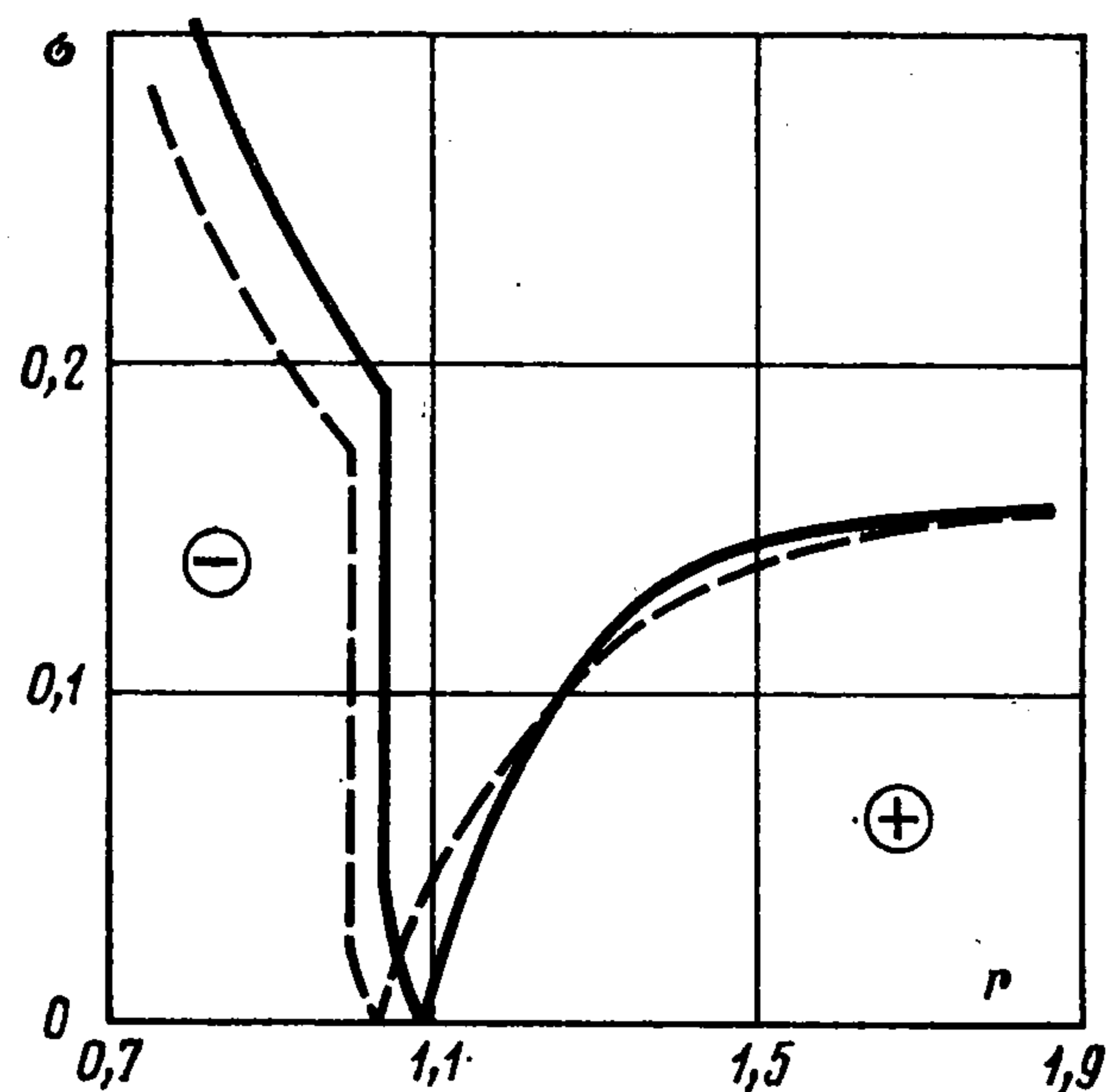
В процессе наращивания вследствие давления предварительно растянутых элементов происходит нарастание сжимающего напряжения в исходном цилиндре; одновременно релаксирует начальное напряжение $\sigma(\tau^*) = 0,746$ в присоединенных элементах. При $T = 100$ релаксация растягивающего напряжения в присоединенных элементах развивается в большей степени, чем при $T = 20$ (фиг. 2), что приводит к меньшему давлению на исходный цилиндр и к менее интенсивной ползучести (фиг. 1). После окончания наращивания скорость ползучести изменяет знак и имеет место релаксация остаточных напряжений во всех точках цилиндра. При $T = 100$ цилиндр более жесткий (за счет старения) и более неоднородный, чем при $T = 20$. Поэтому процесс релаксации остаточных напряжений при $T = 20$ гораздо интенсивнее, чем при $T = 100$. В результате, хотя сжимающие напряжения в конце наращивания при $T = 20$ в два раза больше, чем при $T = 100$ (фиг. 2), прорелаксировавшие остаточные напряжения при $T = 20$ меньше, чем при $T = 100$ (фиг. 3).

5. Нарращивание и снятие шара. Под снятием будем понимать процесс, противоположный наращиванию, т. е. непрерывное уменьшение массы тела вследствие удаления элементов с части его поверхности (поверхности снятия). Процесс снятия можно задать условием (3.1) на поверхности снятия, где $J_n > 0$, J — плотность потока удаляемого с поверхности вещества, $\partial X / \partial \tau^*$ заменяется на $\partial x^\circ / \partial t$, $x^\circ(t, u_1, u_2)$ — радиус-вектор точки пространства, принадлежащей поверхности снятия $S^\circ(t)$, (u_1, u_2) — криволинейные координаты на этой поверхности; $\rho^*(\xi)$ заменяется на $\rho(t, X) = \rho_*(X) / \det F(t, X)$. Кинематика в уменьшающемся теле и граничные условия для напряжений те же, что и фиксированного тела.

Пусть (R, Θ, Λ) — сферические координаты в начальной конфигурации исходного полого несжимаемого шара $\Omega_0 = \{(R, \Theta, \Lambda): R_1 \leq R \leq R_2\}$. В момент $t = 0$ начинается одновременное снятие шара изнутри и наращивание снаружи с радиальными векторами потока величиной, со-



Фиг. 2



Фиг. 3

ответственно, $\rho J_i(t)$ и $\rho J_e(t)$ (ρ — постоянная плотность). При этом действуют внутреннее и внешнее давление $p_i(t)$ и $p_e(t)$, изменяясь непрерывно при нулевых начальных условиях. Пространственное поле скоростей в сферических координатах (r, φ, λ) будет

$$(5.1) \quad v_r = f(t, r), \quad v_\varphi = 0, \quad v_\lambda = 0$$

Условие несжимаемости $\operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0$ дает $\partial f / \partial r + 2f/r = 0$, откуда $f(t, r) = \beta(t)/r^2$, где $\beta(t)$ — неопределенная функция. Из (5.1) имеем

$$(5.2) \quad r_0^3(t, R) = R^3 + 3b(t); \quad r^3(t, \tau^*) = c_e^3(\tau) + 3(b(t) - b(\tau^*))$$

где $c_e(t)$ — внешний, а $c_i(t)$ — внутренний радиусы шара в момент t (остальные обозначения аналогичны обозначениям п.4).

При радиальном движении материальных точек

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\chi(t, \xi)} &= \mathbf{e}_i(\mathbf{X}(\xi)) = \mathbf{e}_i^*(\xi) \\ \mathbf{X}(\xi) &= \chi(\tau^*(\xi), \xi) \\ \mathbf{e}_i(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\chi_0(t, \mathbf{x})} &= \mathbf{e}_i(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_0 \end{aligned}$$

где $\mathbf{e}_i(\mathbf{x})$ — единичные векторы базиса сферической системы координат. Учитывая начальную деформацию $\mathbf{F}_*(\xi) = F_*(\tau^*)(\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_3^*) + F_*^{-2}(\tau^*)\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^*$, получим

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}(t, \xi) &= F(t, \tau^*)(\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_3^*) + F^{-2}(t, \tau^*)\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{F}_0(t, \mathbf{X}) &= F_0(t, R)(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + \\ &+ F_0^{-2}(t, R)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(\mathbf{X}) \\ F(t, \tau^*) &= F_*(\tau^*)r(t, r^*)/c_e(\tau^*) \\ F_0(t, R) &= r_0(t, R)/R, \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(R, \Theta, Z) \end{aligned}$$

В определяющем уравнении (4.10) — (4.11) допустима произвольная зависимость ядра μ от R для исходного цилиндра и от τ^* для приращиваемых элементов. Для последних допустима также любая предварительная деформация вида

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\tau, \xi) &= F_1(\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^* \otimes \mathbf{e}_3^*) + F_1^{-2}\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1^* \\ F_1 &= F_1(\tau, \tau^*), \quad t_0(\tau^*) \leq \tau \leq \tau^* \end{aligned}$$

При этих условиях для отличных от нуля физических компонент тензора напряжения имеем

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \sigma_\varphi = \sigma_\lambda, \quad \sigma(t, r) &= F^2(t) L(t - t_0, [1 - F^{-2}I_1]^t) - \\ &- F^{-4}(t) L(t - t_0, [1 - F^4I_1]^t), \quad I_1 = (2F^2 + F^{-4})/3 \\ \sigma &= \sigma_\varphi - \sigma_r \end{aligned}$$

Здесь для краткости опущен индекс нуль у величин $F_0, \sigma_r^\circ, \sigma_\varphi^\circ, \sigma_\lambda^\circ$, характеризующих точки исходного шара; опущен также аргумент τ^* (соответственно, R) у функций t_0 и F и вместо τ^* и R надо подставить обратные к (5.2) функции $\tau^*(t, r)$ и $R(t, r)$. Интегрируя уравнение равновесия $\partial_r \sigma_r = 2\sigma/r$, получим

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \sigma_r^\circ(t, r) &= -p_i(t) + V^\circ(t, r) - V^\circ(t, c_i(t)) \\ r &\in [c_i(t), r_0(t, R_2)] \\ \sigma_r(t, r) &= -p_e(t) + V(t, r) - V(t, c_e(t)) \\ r &\in [r(t, 0), c_e(t)] \\ V(t, r) &= 2 \int \frac{\sigma(t, r) dr}{r}, \quad V^\circ(t, r) = 2 \int \frac{\sigma^\circ(t, r) dr}{r} \end{aligned}$$

Система уравнений для нахождения неопределенных функций $\beta(t)$, $c_i(t)$ и $c_e(t)$ включает условие непрерывности радиального напряжения на границе исходной и наращенной областей (см. (5.5))

$$(5.6) \quad \begin{aligned} V^\circ(t, r_0(t, R_2)) - V^\circ(t, c_i(t)) + V(t, c_e(t)) - \\ - V(t, r(t, 0)) = (p_i - p_e)(t) \end{aligned}$$

и условия наращивания ($J_e > 0$) и снятия ($J_i > 0$)

$$(5.7) \quad \frac{dc_e}{dt} = J_e(t) + \frac{\beta(t)}{c_e^2(t)}, \quad \frac{dc_i}{dt} = J_i(t) + \frac{\beta(t)}{c_i^2(t)}$$

Работа анонсирована в [10]. После сдачи ее в редакцию была опубликована статья [11], где дана иная постановка задачи о конечных деформациях растущего тела. Автор благодарит Н. Х. Арутюняна за поддержку работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Труделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-старееющих тел. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 153—164.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Гостехиздат, 1953. 492 с.
4. Арутюнян Н. Х., Метлов В. В. Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению. — Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 142—152.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
6. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. Арутюнян Н. Х., Метлов В. В. Некоторые задачи теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1982 т. 35, № 3, с. 13—30.
8. Struik L. C. E. Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam: Elsevier, 1978. 229 p.
9. Арутюнян Н. Х., Метлов В. В. Некоторые задачи теории ползучести неоднородно-старееющих тел с изменяющейся границей. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5, с. 91—100.
10. Метлов В. В. О наращивании тел при конечных деформациях. — Докл. АН АрмССР, 1985, т. 80, № 2, с. 71—75.
11. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д. Механика растущих вязкоупругих тел, подверженных старению, при конечных деформациях. — Докл. АН СССР, 1984, т. 276, № 4, с. 821—825.

Москва

Поступила в редакцию
26.III.1984