Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 4, 1985

УДК 539.375 : 517.946

АСИМПТОТИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗОМ

Козлов В. А., Мазья В. Г., Партон В. З.

Исследуются плоские квазистатические задачи термоупругости для областей произвольной формы с разрезом в случае мгновенного изменения температуры на границе. Исследуется асимптотика напряжений в окрестности вершины трещины.

Ранее в [1—5] (см. также [6]) были решены некоторые квазистатические температурные задачи о развитии трещин, на части поверхности которых в начальный момент времени возникает и поддерживается постоянная температура. Найдены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины.

Ниже исследование квазистационарных задач термоупругости для областей с разрезами проводится в более общем асимптотическом смысле. В пп. 1—3 рассматривается плоская область с разрезом, граница которой мгновенно охлаждается или нагревается. Поскольку форма контура области может быть произвольной, то говорить о явном решении краевой задачи термоупругости не приходится. Тем не менее удается найти выражения для главных членов асимптотики коэффициентов интенсивности напряжений в наиболее опасные (с точки зрения распространения трещины) начальные моменты времени. В частности, отсюда определяется асимптотика момента разрушения в зависимости от скачка температуры в вершине трещины.

Отметим, что главный член асимптотики коэффициента интенсивности растягивающих напряжений не зависит от формы контура — он совпадает с коэффициентом интенсивности той же задачи для плоскости с разрезом.

В п. 4 аналогичные результаты получены для задачи о мгновенном изменении температуры торца тонкой пластинки, с боковых поверхностей которой осуществляется теплообмен с внешней средой, причем найденные коэффициенты интенсивности напряжений явно выражаются через таковые при отсутствии теплообмена. Это позволяет провести асимптотический анализ напряжений вблизи вершины трещины в начальные моменты времени.

Полученные в работе результаты вытекают из асимптотического решения уравнений теплопроводности при $t \to 0$ для области с разрезом и предложенного в [7] метода вычисления коэффициенов интенсивности напряжений.

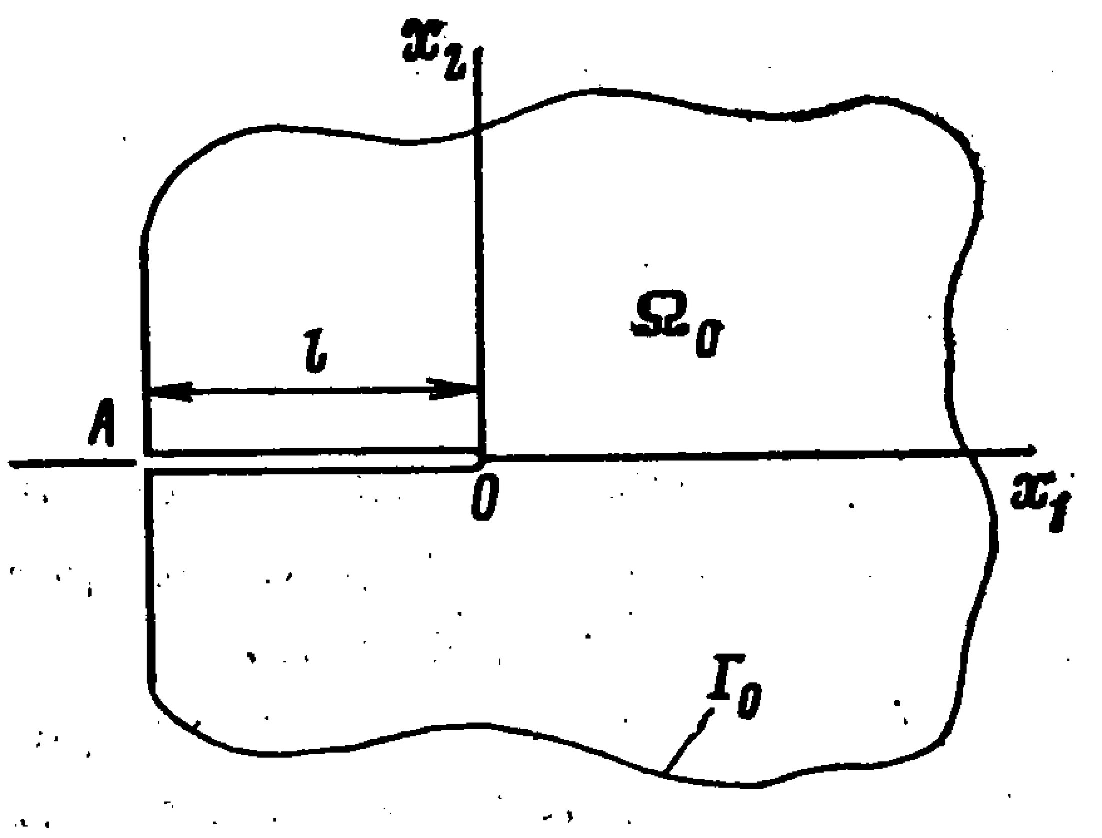
1. Постановка краевых задач. Рассмотрим для определенности плоскую деформацию. Как известно, плоское напряженное состояние при нулевом теплообмене с внешней средой реализуется при замене постоянной Ламе λ на $\lambda_* = 2\lambda\mu\,(\lambda + 2\mu)$, γ на $\gamma_* = (1 - 2\nu)\,\gamma/(1 - \nu)$, где $\gamma = 2\mu\alpha_T\,(1 + \nu)/(1 - 2\nu)$, μ — модуль сдвига, α_T — коэффициент линейного расширения, ν — коэффициент Пуассона, в связи с чем в указанных далее асимптотических формулах изменяются лишь соответствующие постоянные.

Пусть Ω_0 — плоская область с гладкой границей Γ_0 (фигура). В Ω_0 имеется прямолинейный разрез длины l, соединяющий начало координат $O \in \Omega_0$ с точкой $A \in \Gamma_0$. Обозначим верхний и нижний берега разреза через l_+ и l_-. Под Γ будем понимать контур Γ_0, дополненный дважды пройденным отрезком l, а под Ω — область, ограниченную Γ. Пусть Ω^c — замыкание области Ω в смысле ее внутренней метрики. Для упрощения изложения будем считать угол, образованный контуром Γ_0 и отрезком l, прямым, а сам контур Γ_0 вблизи точки A — прямолинейным.

Температура T определяется из решения краевой задачи

$$\begin{aligned}(1.1)\qquad &\partial T/\partial t - \Delta T = 0 \text{ на } \Omega \times (0,\ \infty)\\ &T = 0 \text{ на } \Gamma \times (0,\ \infty),\ T\,|_{t=0} = T_0\end{aligned}$$

Тем самым коэффициент температуропроводности предполагается равным единице, что, очевидно, не ограничивает общности.



Вектор смещений $\mathbf{u}$, порожденных этим температурным полем, находится из решения следующей краевой задачи ($\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ — нормаль и касательная к Γ):

$$\begin{aligned}(1.2)\qquad &\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} =\\ &= \gamma\,\mathrm{grad}\,T \text{ на } \Omega\\ &\lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + 2\mu\,\partial u_n/\partial n = \gamma T \text{ на } \Gamma\\ &\mu\,(\partial u_n/\partial\tau + \partial u_\tau/\partial n) = 0 \text{ на } \Gamma\end{aligned}$$

2. Асимптотика температуры при $t \to +0$. Для описания особенностей температуры T на Γ при $t \to +0$, связанных с наличием угловых точек O, A, потребуются решения трех модельных задач.

1°. *Автомодельные решения для плоскости с разрезом, квадранта и полуплоскости.* Пусть L — решение однородного уравнения теплопроводности в области $\{(x,\ t)\colon r > 0,\ \ |\,\theta\,| < \pi,\ \ t > 0\}$, где $x = (x_1,\ x_2)$, а $(r,\ \theta)$ — полярные координаты точки x. Функция L подчинена краевым и начальным условиям: $L\,|_{\theta=\pm\pi} = 0$, $L\,|_{t=0} = 1$. Будем искать L в виде $L = l\,(\rho,\ \theta)$, где $\rho = r^2/(4t)$, причем для l получаем краевую задачу

$$(2.1)\qquad \left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho} + \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)l = 0,\quad l\,|_{\theta=\pm\pi} = 0,\quad l \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Пусть $u_j\,(\theta) = \pi^{-1/2}\sin {}^1\!/_2 j\,(\theta + \pi)$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots)$ — собственные функции оператора $d^2/d\theta^2$ на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ с условиями Дирихле на его концах. Имея в виду ряд Фурье по системе функций $\{u_j\}$ для единицы, естественно представить l в виде ряда

$$(2.2)\qquad l\,(\rho, \theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1}\,l_j\,(\rho)\cos\left(j + \frac{1}{2}\right)\theta$$

Удовлетворяя краевой задаче, находим

$$l_j\,(\rho) = \frac{\Gamma\,(^5/_4 + j/2)}{\Gamma\,(^3/_2 + j)}\,\rho^{1/4+j/2}e^{-\rho}\Phi\left(\frac{5}{4} + \frac{j}{2};\ \frac{3}{2} + j; \rho\right)$$

где Φ — вырожденная гипергеометрическая функция [8]. Отсюда следует асимптотическая формула

$$(2.3)\qquad l\,(\rho, \theta) = \frac{4}{\pi}\,\frac{\Gamma\,(^5/_4)}{\Gamma\,(^3/_2)}\,\rho^{1/4}\cos\frac{\theta}{2} + O\,(\rho^{3/4}),\quad \rho \to +0$$

Асимптотику функции l при больших ρ удобнее находить непосредственно из краевой задачи (2.1). Пусть χ — гладкая функция на положительной полуоси, равная единице на $[0,\ ^1/_4]$ и нулю на $[^1/_2,\ \infty)$. Будем искать асимптотику функции l в виде

$$(2.4)\qquad l\,(\rho,\ \theta) = 1 - \chi\,(\tau)\,g\,(\rho\sin^2\tau) + q\,(\rho,\ \theta),\ \ \tau = \pi - |\,\theta\,|$$

Подставляя (2.4) в (2.1) и интегрируя, получаем, что $g\,(z) = \mathrm{erfc}\,\sqrt{z}$.

Функция q — решение краевой задачи, аналогичной (2.1), где в правой части уравнения вместо нуля стоит $O(e^{-b\rho})$ (b — некоторое положительное число). Разложением $q(\rho, \theta)$ в тригонометрический ряд по $\sin {}^1/_2\, k(\theta + \pi)$ или при помощи энергетических оценок можно показать, что q убывает при $\rho \to \infty$ быстрее любой степени ρ (громоздкое доказательство этого факта опускается).

Аналогично строится автомодельное решение $M(r^2/(4t), \theta)$ для квадранта $Q = \{x\colon r > 0,\ 0 < \theta < \pi/2\}$, т. е. решение однородного уравнения теплопроводности в $Q \times (0, \infty)$, удовлетворяющее условиям $M|_{\theta=0,\,\pi/2} = 0$, $M|_{t=0} = 1$. Явный вид функции M не используется, полезно лишь иметь в виду асимптотические формулы

$$M(\rho, \theta) = c\rho \sin 2\theta + O(\rho^{3/2}),\ \rho \to 0$$

$$M(\rho, \theta) = 1 - \chi(\tau) \operatorname{erfc}(\rho^{1/2} \sin \tau) + O(\rho^{-N}),\ \rho \to \infty$$

где χ — та же срезающая функция, что и ранее, $\tau = \min\{\theta, \pi/2 - \theta\}$, N — любое положительное число.

В дальнейшем потребуется еще решение $G(x, t) = \operatorname{erf}(x_1/(2t^{1/2}))$ однородного уравнения теплопроводности в области $\{(x, t)\colon t > 0,\ x_1 > 0\}$, удовлетворяющее условиям $G|_{x_1=0} = 0$, $G|_{t=0} = 1$.

2°. *Локальная оценка.* Для оценок невязок, возникающих при замене T автомодельными решениями, построенными выше, докажем следующее утверждение о локальной оценке для решений уравнения теплопроводности.

Лемма. Пусть U, V — области на плоскости $\{x\}$, $\bar{U} \subset V$ и R — функция из $C([0, t_0];\ W_2^1(\Omega)) \cap C^1([0, t_0];\ W_2^{-1}(\Omega))$, удовлетворяющая начально-краевой задаче

$$(2.5)\qquad \begin{gathered}(\partial/\partial t - \Delta) R = f \text{ на } \{(x, t)\colon 0 < t < t_0,\ x \in \Omega \cap V\}\\ R|_{t=0} = 0 \text{ на } \Omega \cap V,\ R = 0 \text{ на } \{(x, t)\colon 0 < t < t_0,\ x \in \Gamma \cap V\}\end{gathered}$$

Тогда существует такая положительная постоянная c, зависящая от U, V, что

$$(2.6)\qquad \| R(\cdot, t) \|^p_{L_p(\Omega \cap U)} \leqslant c \int_0^t (\| f(\cdot, \tau) \|^p_{L_p(\Omega \cap V)} + \| R(\cdot, \tau) \|^p_{L_p(\Omega \cap V)})\, d\tau$$

$$(\forall p \in [1, \infty))$$

Доказательство. Пусть $F \in C^2(R^1)$ — неотрицательная четная функция, такая, что $F(O) = 0$, $0 \leqslant F'' \leqslant c$. Введем еще неотрицательную функцию $\eta \in C_0^\infty(V \cap \Omega^c)$, равную единице на $U \cap \Omega$. Умножая уравнение (2.5) на $\eta F'(R)$ и интегрируя по частям, находим

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \eta F(R)\, dx + \int_\Omega \eta F''(R) |\nabla_x R|^2\, dx - \int_\Omega F(R)\, \Delta\eta\, dx = \int_\Omega f F'(R)\, \eta\, dx$$

следовательно

$$\int_\Omega \eta F(R)\, dx \leqslant c \int_0^t \int_\Omega (|f|^p \eta + |F'(R)|^{p/(p-1)} \eta + F(R)\, |\Delta\eta|)\, dx\, d\tau$$

Пусть $F = (R^2 + \delta^2)^{p/2} - \delta^p$, $\delta > 0$ при $1 \leqslant p \leqslant 2$. В случае $p > 2$ положим

$$F(R) = |R|^p \text{ для } |R| < T;\quad F(R) = 2^{-1} p(p-1) T^{p-2} |R|^2 - p(p-2) T^{p-1} |R| + 2^{-1}(p-1)(p-2) T^p \text{ для } |R| > T$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, $T \to \infty$, получаем оценку (2.6).

Отметим, что при $f = 0$ на $[0, t_0] \times (\Omega \cap V)$ решение задачи (2.5) допускает оценку (она получается из (2.6) индукцией по N)

$$\| R(\cdot, t)\|^p_{L_p(\Omega\cap U)} \leqslant c_N t^{pN} \int_0^t \| R(\cdot, \tau)\|^p_{L_p(\Omega\cap U)}\, d\tau, \quad N=0, 1, \ldots \tag{2.7}$$

3°. *Асимптотика функции* T. Пусть δ — малое положительное число, $U_\delta(O) = \{x:\ 0 < r < \delta, \ |\theta| < \pi\}$. В силу оценки (2.7) справедливо неравенство

$$\| T(\cdot, t) - T_0 L(\cdot, t)\|_{L_p(U_\delta(0))} \leqslant c_N T_0 t^N, \quad 1 \leqslant p < \infty$$
$$N = 0, 1, \ldots$$

где L — функция, определенная в п. 1°. Отсюда вытекает неравенство, используемое в дальнейшем

$$\int_\Omega r^{-3/2} | T(x,t) - T_0 L(x,t)|\, dx \leqslant ct^N \tag{2.8}$$

Пусть (r, θ) — полярные координаты с центром в точке A и $U_\delta(A) = \{x:\ 0 < r < \delta,\ 0 < |\theta| < \pi/2\}$.

Снова применяя оценку (2.7) к $R = T - T_0 M$, находим, что

$$\| T(\cdot, t) - T_0 M(\cdot, t)\|_{L_1(U_\delta(A))} \leqslant c_N T_0 t^N \tag{2.9}$$

Здесь M — определенное в п. 1° автомодельное решение для первого квадранта, продолженное четным образом в четвертый квадрант.

Пусть теперь P — любая точка контура Γ, такая, что $|P - A| > \delta$, $|P - O| > \delta$; $U_\delta(P) = \{x \in \Omega:\ |x - P| < \delta\}$.

Введем в $U_\delta(P)$ координаты (n, s), где n — расстояние до Γ, $|s|$ — расстояние от ближайшей к x точки контура Γ до P, знак s выбирается в соответствии с положительным направлением обхода контура. Оператор Лапласа в координатах (n, s) имеет вид

$$\zeta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial n}\zeta\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial s}\zeta^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\right), \quad \zeta = 1 - nk(s)$$

(k — кривизна контура). Поэтому

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\mathrm{ert}\left(\frac{n}{2t^{1/2}}\right) = -\frac{k(s)}{\zeta(\pi t)^{1/2}}\exp\left(-\frac{n^2}{4t}\right)$$

В силу принципа максимума для уравнения теплопроводности

$$\left| T - T_0\,\mathrm{erf}\left(\frac{n}{2t^{1/2}}\right)\right| \leqslant T_0$$

Кроме того, граничные и начальные значения функции T, $T_0\,\mathrm{erf}\,(n/2t^{1/2})$ совпадают в $U_\delta^{\prime}(P)$, поэтому на основании неравенства (2.6) получим

$$\left\|\left(T - T_0\,\mathrm{erf}\left(\frac{n}{2t^{1/2}}\right)\right)\right\|_{L_1(U_\delta(P))} \leqslant \tag{2.10}$$
$$\leqslant c\left(\int_0^t \tau^{-1/2} \int_{U_\delta(P)} \exp\left(-\frac{n^2}{4\tau}\right) dn\, ds\, d\tau + t\right) \leqslant ct$$

И, наконец, пусть Q — любая точка области Ω, такая, что расстояние от нее до границы Γ больше δ. Обозначим через $U_\delta(Q)$ круг радиуса δ с центром в точке Q.

В силу оценки (2.7)

$$\| T(\cdot, t) - T_0\|_{L_1(U_\delta(Q))} \leqslant c_N T_0 t^N, \quad N = 0, 1, \ldots \tag{2.11}$$

3. Асимптотика коэффициентов интенсивности напряжений при $t \to \to +0$. 1°. *Асимптотика смещений вблизи вершины трещины.* Рассмотрим краевую задачу (1.2), в которую время t входит в качестве параметра. Если $t > 0$, то величины grad T и T имеют слабые особенности в вершине трещины, и поэтому асимптотика решения этой задачи

$$(u_r, u_\theta)(r, \theta) = c_1 (\cos\theta, -\sin\theta) + c_2 (\sin\theta, \cos\theta) + $$
$$+ (4\mu)^{-1} \sqrt{r/2\pi} \, (K_{\mathrm{I}} \varphi^{(\mathrm{I})}(\theta) + K_{\mathrm{II}} \varphi^{(\mathrm{II})}(\theta)) + O(r), \quad r \to 0$$
$$\varphi^{(\mathrm{I})}(\theta) = ((2\varkappa - 1)\cos\theta/2 - \cos 3\theta/2, \ -(2\varkappa + 1)\sin\theta/2 + $$
$$+ \sin 3\theta/2)$$
$$\varphi^{(\mathrm{II})}(\theta) = ((2\varkappa - 1)\sin\theta/2 - 3\sin 3\theta/2, \ (2\varkappa + 1)\cos\theta/2 - $$
$$- 3\cos 3\theta/2)$$

Здесь u_r, u_θ — компоненты вектора смещений в полярной системе координат, c_1, c_2 — некоторые функции времени, K_{I}, K_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений, зависящие от t, $\varkappa = 3 - 4\nu$ при плоской деформации и $\varkappa = (3 - \nu)/(\nu + 1)$ при плоском напряженном состоянии.

Следуя [7], опишем процедуру вычисления коэффициентов K_{I} и K_{II}. Обозначим через $\mathbf{z}^{(\mathrm{I})}$, $\mathbf{z}^{(\mathrm{II})}$ поля смещений, удовлетворяющие однородным уравнениям Ламе и краевым условиям $\sigma(\mathbf{z}^{(j)}) \cdot \mathbf{n} = 0$ на Γ, ограниченные вне любой окрестности точки 0 и имеющие асимптотику

$$(z_r^{(j)}, z_\theta^{(j)})(r, \theta) = [2(1 + \varkappa)(2\pi r)^{1/2}]^{-1} \psi^{(j)}(\theta) + O(1), \quad r \to 0$$
$$\psi^{(\mathrm{I})}(\theta) = ((2\varkappa + 1)\cos 3\theta/2 - 3\cos\theta/2, \ -(2\varkappa - $$
$$- 1)\sin 3\theta/2 + 3\sin\theta/2)$$
$$\psi^{(\mathrm{II})}(\theta) = ((2\varkappa + 1)\sin 3\theta/2 - \sin\theta/2, \ (2\varkappa - 1)\cos 3\theta/2 - $$
$$- \cos\theta/2)$$

Так как $T = 0$ на $\Gamma \times (0, \infty)$ и $\sigma_n(U) = \sigma_{n\tau}(U) = 0$ на Γ, то согласно [7] при $t > 0$

$$K_j(t) = \gamma \int_\Omega \operatorname{grad} T(x, t) \, \mathbf{z}^{(j)}(x) \, dx, \quad j = \mathrm{I}, \mathrm{II} \tag{3.1}$$

Интегрируя в (3.1) по частям, получаем

$$K_j(t) = -\gamma \int_\Omega T(x, t) \, h_j(x) \, dx = -\gamma \int_\Omega (T(x, t) - T_0) \, h_j(x) \, dx \tag{3.2}$$
$$h_j(x) = \operatorname{div} \mathbf{z}^{(j)}(x)$$

Здесь было использовано равенство

$$\int_\Gamma z_n^{(j)} \, d\Gamma = 0$$

которое следует из формулы Бетти для векторов $\mathbf{z}^{(j)}$, x. Заметим, что $h_j = h_j^{(0)} + O(r^{-1/2})$, где

$$h_{\mathrm{I,II}} = \frac{(1 - \varkappa)}{(1 + \varkappa)\sqrt{2\pi}} r^{-3/2} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \frac{3\theta}{2}$$

2°. *Асимптотика коэффициентов интенсивности напряжений. Теорема* 1. Справедливы асимптотические формулы

$$K_{\mathrm{I}}(t) = \frac{4}{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \mu m T_0 t^{1/4} + \frac{2\gamma T_0}{\pi^{1/2}} t^{1/2} \int_\Gamma h_{\mathrm{I}}(x) \, d\Gamma + O(t^{3/4}) \tag{3.3}$$
$$K_{\mathrm{II}}(t) = \frac{2\gamma T_0}{\pi^{1/2}} t^{1/2} \int_\Gamma h_{\mathrm{II}}(x) \, d\Gamma + O(t^{3/4}), \quad t \to +0$$

где $m = \alpha_T (1 + \nu)(1 - \nu)^{-1}$, $\gamma = 2\mu\alpha_T (1 + \nu)(1 - 2\nu)^{-1}$ для плоской деформации и $m = \alpha_T (1 + \nu)$, $\gamma = 2\mu\alpha_T (1 + \nu)(1 - \nu)^{-1}$ для плоского напряженного состояния при нулевом теплообмене с внешней средой.

Интегралы в (3.3) понимаются в смысле главного значения:

$$\int_\Gamma h_j(x)\,d\Gamma = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C(\varepsilon)} h_j(x)\,d\Gamma, \quad C(\varepsilon) = \{x \in \Gamma: |x - 0| \geqslant \varepsilon\}$$

Предел справа существует потому, что

$$\left(\int_{C(\varepsilon_1)} - \int_{C(\varepsilon_2)}\right) h_j^{(0)}\,d\Gamma = 0$$

Доказательство. Зафиксируем достаточно малое число $\delta > 0$. Пусть $\Gamma_\delta = \{x \in \Omega: \operatorname{dist}(x, \Gamma) < \delta\}$, $U_\delta(O)$ и $U_\delta(A)$ — окрестности точек O и A, определенные в п. 1.2, $\Gamma_{0\delta} = \Gamma_\delta \setminus (U_\delta(O) \cup U_\delta(A))$. Положим

$$I_{0j}(t) = -\int_{U_\delta(O)} (L - 1)\,h_j\,dx, \quad I_{Aj}(t) = -\int_{U_\delta(A)} (M - 1)\,h_j\,dx \tag{3.4}$$

$$I_{1j}(t) = \int_{\Gamma_{0\delta}} \operatorname{erfc}\left(\frac{n}{2t^{1/2}}\right) h_j(x)\,dx$$

где n — расстояние до границы. Пусть

$$R_j(t) = K_j(t) - \gamma T_0 (I_{0j}(t) + I_{Aj}(t) + I_{1j}(t))$$

Из (3.2), (3.4) следует, что

$$R_j(t) = -\gamma\Bigg(\int_{U_\delta(O)} (T - T_0L)\,h_j\,dx + \int_{U_\delta(A)} (T - T_0M)\,h_j\,dx +$$
$$+ \int_{\Gamma_{0\delta}} \left(T - T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{n}{2t^{1/2}}\right)\right) h_j\,dx + \int_{\Omega - \Gamma_\delta} (T - T_0)\,h_j\,dx\Bigg)$$

Так как $h_j = O(r^{-3/2})$ то, используя оценки (2.8) — (2.11), получаем, что $R_j(t) = O(t)$.

Таким образом, для получения формул (3.3) достаточно исследовать функции I_{0j}, I_{Aj}, I_{1j} при малых t, к чему и перейдем.

Вычислим интегралы

$$J_{0j}(t) = -\int_{U_\delta(O)} (L - 1)\,h_j^{(0)}\,dx$$

Имеем

$$J_{01}(t) = -\int_0^\delta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(l_k\left(\frac{r^2}{4t}\right) - 1\right) \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta\, \frac{(1 - \varkappa)}{(1 + \varkappa)\sqrt{2\pi}} \times \tag{3.5}$$
$$\times\, r^{-1/2} \cos\frac{3}{2}\theta\,dr\,d\theta = \frac{2(1 - \varkappa)}{3\sqrt{\pi}(1 + \varkappa)}\, t^{1/4} \int_0^\infty (l_1(x) - 1)\, x^{-3/4}\,dx + O(t)$$

Здесь было использовано соотношение $l_1(x) - 1 = O(x^{-1})$ при $x \to \infty$. Интегрируя в последнем интеграле в (3.5) по частям и применяя формулы [8]

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x}x^{c-a}\Phi(a, c; x)\right] = (c - a)\,e^{-x}x^{c-a-1}\Phi(a - 1, c; x)$$

$$\Phi\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}; x\right) = \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3/4)\,\Gamma(7/4)} \int_0^1 e^{xu}(1 - u)^{3/4} u^{-1/4}\,du$$

находим

$$J_{01}(t) = \frac{2\Gamma(7/4)(\varkappa - 1)}{\pi^{1/2}\Gamma(5/2)(\varkappa + 1)}\, t^{1/4} \int_0^\infty e^{-x}\Phi\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}; x\right) dx + O(t) =$$
$$= \frac{4}{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\, t^{1/4} + O(t)$$

Поскольку L — четная, а $h_{II}^{(0)}$ — нечетная функции θ, то $J_{02} = 0$. Обозначим

$$H_j = h_j - h_j^{(0)}, \quad J_{1j} = I_{0j} - J_{0j} = - \int\limits_{U_\delta(O)} (L-1) H_j \, dx$$

Представим J_{1j} в виде сумм двух интегралов, первый из которых распространен на множество $\{x\colon\ 0 < r < t^{1/2}, |\theta| < \pi\}$, а второй — на множество $\{x\colon\ t^{1/2} < r < \delta, |\theta| < \pi\}$. В силу оценки $|H_j| \leqslant cr^{-1/2}$ и ограниченности функции L первый интеграл равен $O(t^{3/4})$. Во втором интеграле заменим функцию $L - 1$ на ее асимптотику

$$-\chi(\tau)\operatorname{erfc}\left(r\frac{\sin\tau}{2t^{1/2}}\right) + O\left(\left(\frac{r^2}{4t}\right)^{-N}\right), \quad \frac{r^2}{4t} \to \infty$$

а функцию H_j — на сумму $H_j^{\pm}(r) + O(\tau r^{-1/2})$, где $H_j^{\pm} = \lim H_j$ при $\theta \to \pm\pi$. Тогда

$$J_{1j}(t) = \int\limits_{t^{1/2}}^{\delta} \int\limits_0^{\delta} \operatorname{erfc}\left(\frac{r\sin\tau}{2t^{1/2}}\right) d\tau \, (H_j^+ + H_j^-)\, r\, dr + O(t^{3/4})$$

Далее, так как

$$\int\limits_0^{\delta} \operatorname{erfc}\left(\frac{r\sin\tau}{2t^{1/2}}\right) d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}r} t^{1/2} + O\left(\frac{t}{r^2}\right)$$

$$J_{1j}(t) = \frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\gamma_\delta} h_j \, d\Gamma + O(t^{3/4}), \qquad \gamma_\delta = \Gamma \cap U_\delta(O)$$

(интеграл понимается в смысле главного значения). Таким образом

$$I_{01}(t) = \frac{4}{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} t^{1/4} + \frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\gamma_\delta} h_{I} \, d\Gamma + O(t^{3/4})$$

$$I_{02}(t) = \frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\gamma_\delta} h_{II} \, d\Gamma + O(t^{3/4}).$$

Асимптотика интегралов I_{Aj}, I_{1j} находится аналогично, даже несколько проще, и имеет вид

$$I_{Aj} + I_{1j} = \frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\Gamma \setminus \gamma_\delta} h_j \, d\Gamma + O(t^{3/4})$$

откуда следуют формулы (3.3)

Замечание. Согласно доказанной теореме, сумма квадратов коэффициентов интенсивности $\overline{K}^2 = K_I^2 + K_{II}^2$ растет при малых t как $\mathrm{const}\cdot t^{1/2}$. Из представлений температуры в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа с однородными условиями Дирихле на Γ следует, что $\overline{K}^2(t) \sim \mathrm{const}\cdot\exp(-2\lambda_1 t)$ при больших t, где λ_1 — первое собственное число задачи Дирихле для оператора Лапласа. Поскольку $\overline{K}^2$ — непрерывная функция времени (см. (3.2)), то в некоторый момент времени она достигает максимума. Если этот максимум достаточно мал, то трещина устойчива.

Согласно теореме 1, при $T_0 > 0$ коэффициент K_I положителен для малых t, т. е. при охлаждении контура Γ в вершине трещины возникают растягивающие напряжения. В случае $T_0 < 0$ напряжения будут сжимающими. В частности, из (3.3) определяется асимптотика момента t^* начала распространения трещины

$$t^* \sim \left(\frac{\pi}{4\Gamma(3/4)} \frac{K_{IC}}{\mu m} \frac{1}{T_0}\right)^4, \qquad T_0 \gg 1$$

Здесь T_0 — скачок температуры в вершине трещины, K_{IC} — критическое значение коэффициента интенсивности растягивающих напряжений.

4. Учет теплообмена. Пусть Ω — та же область, что и раньше, а $T(x, t)$ — решение уравнения

(4.1) $$\Delta T - \sigma^2 T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Это уравнение описывает среднее по толщине распределение температуры в тонкой пластинке $\Omega \times [-h, h]$, на боковых поверхностях которой происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры по закону Ньютона, $\sigma^2 = k/h$, где k — коэффициент относительной теплоотдачи.

Как и в п. 1.1, предположим, что в начальный момент времени пластинка имела температуру T_0, а затем ее торцы мгновенно приобрели температуру T_1, т. е.

(4.2) $$T|_{t=0} = T_0, \quad T|_\Gamma = T_1 \quad \text{при} \quad t > 0$$

Возникающие в пластинке смещения удовлетворяют краевой задаче

(4.3) $$\lambda_* \Delta \mathbf{U} + (\mu + \lambda_*) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U} = \gamma_* \operatorname{grad} T \quad \text{на } \Omega$$

$$\lambda_* \operatorname{div} \mathbf{U} + 2\mu \frac{\partial U_n}{\partial n} = \gamma_* T \quad \text{на } \Gamma$$

$$\mu \left(\frac{\partial U_n}{\partial \tau} + \frac{\partial U_\tau}{\partial n} \right) = 0 \quad \text{на } \Gamma$$

$$(\lambda_* = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad \gamma_* = 2\mu\alpha_T (1 + \nu)(1 - \nu)^{-1})$$

Пусть F — решение краевой задачи

$$\partial F/\partial t - \Delta F = 0, \ F|_{t=0} = 1, \ F|_\Gamma = 0$$

Непосредственно проверяется, что функция

(4.4) $$T(x, t) = \exp(-\sigma^2 t)(T_0 - T_1) F(x, t) + T_1 \left(1 - \sigma^2 \int_0^t \exp(-\sigma^2 \tau) F(x, \tau)\, d\tau\right)$$

удовлетворяет задаче (4.1), (4.2). Обозначим через $Q_{\mathrm{I}}(t)$, $Q_{\mathrm{II}}(t)$ коэффициенты интенсивности напряжений, порождаемые температурным полем F в пластинке при нулевом теплообмене с внешней средой. Пусть еще $K_{\mathrm{I}}(t)$, $K_{\mathrm{II}}(t)$ — коэффициенты интенсивности напряжений в исходной задаче. Из формул (3.2), (4.4) следует, что (j = I, II)

(4.5) $$K_j(t) = \exp(-\sigma^2 t)(T_0 - T_1) Q_j(t) - \sigma^2 T_1 \int_0^t \exp(-\sigma^2 \tau) Q_j(\tau)\, d\tau$$

Используя теорему 1, отсюда получаем равенство

$$K_{\mathrm{I}}(t) = K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t) + R_{\mathrm{I}}(t), \text{ где}$$

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t) = \frac{4}{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \mu (1 + \nu) \alpha_T \sigma^{-1/2} T_1 S\left(\frac{T_0 - T_1}{T_1}, \sigma^2 t\right)$$

$$S(\Lambda, y) = \Lambda e^{-y} y^{1/4} - \int_0^y e^{-\tau} \tau^{1/4}\, d\tau$$

Остаток R_{I} и коэффициент интенсивности K_{II} допускают оценку

$$|R_{\mathrm{I}}(t)| + |K_{\mathrm{II}}(t)| \leqslant c(|T_0| + |T_1|) \min\{\sigma^{-1}, t^{1/2}\}$$

где c не зависит от T_0, T_1, σ, t.

В силу (4.5), (3.3) при $\sigma^2 t \leqslant 1$ коэффициенты K_{I}, K_{II} имеют ту же асимптотику, что и при отсутствии теплообмена (см. (3.3)). Тем самым напряжения вблизи вершины трещины при малых $\sigma^2 t$ — сжимающие при $T_1 > T_0$ и растягивающие при $T_1 < T_0$.

В случае $\sigma^2 t \gg 1$, $t \ll 1$ имеем

$$K_{\mathrm{I}}(t) \sim -\sqrt{2}\,\mu(1+\nu)\,\alpha_T\sigma^{-1}T_1$$

и, в частности, напряжения будут растягивающими (сжимающими) при $T_1 < 0$ $(T_1 > 0)$.

Изучим характер напряжений в промежуточной зоне изменения $\sigma^2 t$, ограничиваясь главным членом асимптотики $K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t)$. Его поведение зависит от знака чисел T_0, T_1, $T_0 - T_1$.

Если $T_1 > 0$, $T_0 < T_1$ или $T_1 < T_0 < 0$, то функция $K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t)$ изменяется монотонно от нуля до $K_{\mathrm{I}}^{(0)}(\infty) = -\sqrt{2}\mu\,(1+\nu)\,\alpha_T\sigma^{-1}T_1$.

Если $T_1 < 0$, $T_0 > 0$, $T_0 > T_1$, то $K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t) > 0$ и в момент $t_* = \sigma^{-2}(T_0 - T_1)/(4T_0)$ принимает наибольшее значение

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t_*) = \frac{4}{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\mu\,(1+\nu)\,\sigma^{-1/2}\,T_1 S\left(\frac{T_0 - T_1}{T_1}, \frac{T_0 - T_1}{4T_0}\right)$$

В случае $0 < T_1 < T_0$ функция $K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t)$ положительна на интервале $(0, t_0)$, $t_0 = \sigma^{-2}R\,((T_0 - T_1)/T_1)$, где $y = R(\Lambda)$ — единственный положительный корень уравнения $S(\Lambda, y) = 0$. При $t > t_0$ она отрицательна и изменяется от нуля до $K_{\mathrm{I}}^{(0)}(\infty)$. Наибольшее значение функции $K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t)$ равно $K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t_*)$.

sgn T_0	sgn T_1	sgn $(T_0 - T_1)$	Вид напряжений	Критерий устойчивости
$\pm$	$+$	$-$	Сжимающие	Трещина устойчива
$+$	$-$	$+$	Растягивающие	$K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t_*) < K_{\mathrm{I}C}$
$-$	$-$	$+$	Растягивающие	$K_{\mathrm{I}}^{(0)}(\infty) < K_{\mathrm{I}C}$
$+$	$+$	$+$	Растягивающие при $t < t_0$, сжимающие при $t > t_0$	$K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t_*) < K_{\mathrm{I}C}$
$-$	$-$	$-$	Сжимающие при $t < t_0$, растягивающие при $t > t_0$	$K_{\mathrm{I}}^{(0)}(\infty) < K_{\mathrm{I}C}$

Наконец, при $T_0 < T_1 < 0$ величина $K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t)$ отрицательна на интервале $(0, t_0)$, меняет знак в момент t_0 и монотонно возрастает до $K_{\mathrm{I}}^{(0)}(\infty)$.

Непосредственно проверяются следующие асимптотические формулы:

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t_*) \sim \frac{4e^{-1/4}}{\sqrt{2}\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\mu\,(1+\nu)\,\sigma^{-1/2}(T_0 - T_1), \quad |T_0| \gg |T_1|$$

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t_*) \sim \frac{8\sqrt{2}}{5\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\mu\,(1+\nu)\,\sigma^{-1/2}T_1\left(\frac{T_0 - T_1}{T_1}\right)^{5/4}, \quad T_0 T_1^{-1} \to 1 + 0$$

Момент t_0 — возрастающая функция отношения T_0/T_1, такая, что

$$t_0 \sim \frac{5}{4}\sigma^{-2}\,\frac{T_0 - T_1}{T_1}, \quad T_0 T_1^{-1} \to 1 + 0$$

$$t_0 \sim \sigma^{-2}\log\frac{T_0}{T_1}, \quad T_0 T_1^{-1} \to +\infty$$

Выводы из проведенного исследования функции $K_{\mathrm{I}}^{(0)}(t)$ собраны в таблице ($K_{\mathrm{I}C}$ — критическое значение коэффициента интенсивности растягивающих напряжений).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В. З.* Осесимметричная температурная задача для пространства с дискообразной трещиной.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 117—124.
2. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Квазистатическая температурная задача для плоскости с разрезом.— Проблемы прочности, 1970, № 2, с. 46—51.
3. *Кудрявцев Б. А.* Квазистационарная задача термоупругости для плоскости с полубесконечным разрезом.— Динамика сплошной среды. Сб: статей. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродин. СО АН СССР, 1970, с. 24—31.
4. *Побережный О. В., Гайвась И. В.* Влияние нестационарного температурного поля и теплоотдачи пластины на коэффициенты интенсивности напряжений.— Прикл. механика, 1982, № 6, т. 18, с. 124—127.
5. *Побережный О. В.* О влиянии величины области действия температурной нагрузки на коэффициенты интенсивности напряжений пластины с полубесконечным разрезом.— Математические методы и физико-механические поля: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1983, с. 55—59.
6. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
7. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.— Math. Nachr., 1977, B. 76, S 29—60.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. 294 с.

Поступила в редакцию
13.VII.1984

Москва