

УДК 539.3

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ВЕТВЛЕНИЕ В ТЕОРИИ ИЗГИБА СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК И КРУГЛЫХ МЕМБРАН

Волков С. И.

Исследуется способность к сохранению формы жестко защемленных упругих мембран и незамкнутых пологих сферических оболочек кругового очертания, находящихся в равновесии под действием равномерно заданного на контуре радиального напряжения и радиально распределенных по поверхности поперечных нагрузок, образующих поле с квазигауссовской вероятностной мерой. Предполагается, что поведение мембран и оболочек описывается взятыми в радиальном приближении уравнениями Кармана.

Используется следующий метод [1]. В пространстве возможных решений исходной краевой задачи конструируется индуцируемое вероятностной мерой нагрузок и оператором задачи обобщение плотности вероятности — функционал вероятности (ФВ) (впервые понятие плотности вероятности в функциональном пространстве индивидуальных реализаций случайного поля искомым параметром использовалось в задачах статистической гидромеханики [2]); моменты существенного изменения формы или резкого уменьшения несущей способности оболочек (и мембран) связываются с первым по возрастанию сжимающего усилия разветвлением мод ФВ.

Применение данного метода начинается с вывода уравнения для экстремалей ФВ в пространстве взятых с весом производных от функции прогиба по безразмерному переменному радиусу. В рамках метода Галеркина определяются решения названного уравнения. Выводятся простые соотношения, связывающие радиальные напряжения со статистическими характеристиками поля поперечных нагрузок в моменты разветвления этих решений. Показывается, что до момента первого разветвления ФВ имеет лишь одну экстремаль — тривиальную моду для мембран, нетривиальную моду для оболочек. Затем, начиная с указанного момента, ФВ мембран достигает максимумов на ответвившихся от тривиальной экстремали, а ФВ оболочек приобретает (в дополнение к существующему) новый максимум на еще одной нетривиальной экстремали. Приводятся результаты расчета сжимающих усилий первого разветвления мод ФВ в случае поперечных нагрузок с малым масштабом корреляций.

1. Рассмотрим осесимметричную упругую деформацию незамкнутой жестко защемленной пологой сферической оболочки кругового очертания, находящейся в равновесии под действием равномерно заданного на контуре радиального напряжения и радиально распределенной по поверхности поперечной нагрузки. Поведение такой оболочки описывается взятыми в радиальном приближении уравнениями Кармана [3]. Пусть радиусы опорного контура a и сферы R находятся в отношении $\epsilon = a/R \ll \ll 1$. Тогда в разрешенных относительно функции напряжений обезразмеренных уравнениях Кармана можно пренебречь членами второго и выше порядка по ϵ . В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} N[r; u] &= f(r) \\ N[r; u] &= Lu(r) + \alpha N_1[r; u] + \alpha \epsilon N_2[r; u], \quad L = \\ &= \frac{d^2}{dr^2} + \lambda - \frac{3}{4r^2} \\ N_1[r; u] &= \int_0^1 ds g(r, s) (rs)^{-3/2} u^2(s) u(r) \end{aligned}$$

$$N_2[r; u] = \int_0^1 ds g(r, s) (2r^{-3/2} u(r) + s^{-3/2} u(s)) u(s)$$

$$u = r^{1/2} \frac{dv}{dr}, \quad f(r) = r^{-1/2} \int_0^r ds \pi(s)$$

$$(1.2) \quad |r^{-3/2} u|_{r=0} < \infty, \quad u|_{r=1} = 0 \quad (v|_{r=1} = 0)$$

Безразмерные величины в выражениях (1.1), (1.2) связаны с размерными формулами

$$a \{r, v, z\} = \{\rho, V, Z\}, \quad Da^{-2} \{h\sigma_\rho, q\}$$

$$\alpha = (aR_*^{-1})^2, \quad R_*^2 = 2D (hE)^{-1}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

Здесь V — прогиб точек срединной поверхности Z , ρ — переменный радиус, E — модуль Юнга, h — толщина оболочки, D — цилиндрическая жесткость, σ_ρ — радиальное напряжение на контуре, q — поперечная радиально распределенная нагрузка, $g(r, s)$ — функция Грина задачи (1.1), (1.2) при $\alpha = \lambda = 0$; запись $\Phi[r; u]$ означает, что величина Φ является функцией r и функционалом поля $u(r)$.

Пусть Ω — пространство элементарных событий ω , U — множество, в котором ищутся решения уравнения (1.1) с условиями (1.2), F — множество зависящих от случая правых частей уравнения (1.1). Предположим, что отображение $\omega \rightarrow f(|\omega)$ характеризуется такой заданной на Ω неотрицательной нормированной борелевской мерой $\mu_f(\omega)$, что высшие моменты случайного поля $f(r)$ выражаются через низшие близким к гауссовскому полю способом. Спрашивается, какие элементы из U обладают при $\lambda > 0$ наибольшей вероятностью и при каких значениях λ происходит ветвление этих элементов.

2. Введем на отрезке $[0, 1]$ множество пробных функций Φ , включающих, в частности, ортонормированные собственные функции φ , линейризованной при $f = 0$ задачи (1.1), (1.2).

Положим

$$L[u, f, \varphi] = \int_0^1 dr (N[r; u] - f(r)) \varphi(r)$$

Выделим в $F \times U$ подмножество Γ всех пар $(f, u) \in F \times U$, которые удовлетворяют условию

$$(2.1) \quad L[u, f, \varphi] = 0, \quad \forall \varphi \in \Phi$$

Обозначим символом $u(r | \omega)$ (или $u[r; f(|\omega)]$) стохастическое решение исходной задачи, под которым будем понимать измеримое по Борелю отображение $\Omega \rightarrow U$ (со значением в точке ω), удовлетворяющее системе (2.1), (1.2) и отвечающее отображению $\omega \rightarrow f(r | \omega): \Omega \rightarrow F$ (существование таких решений следует из доказательства теоремы 1 работы [4]).

Пусть M — проекция множества Γ на U , а $C(F \times M)$ — банахово пространство всех непрерывных на $F \times M$ комплексно-значных функционалов $\psi[f, u]$ с естественным определением нормы

$$\|\psi\| = \sup |\psi[f, u]|, \quad \forall \psi \in C(F \times M)$$

Тогда в условиях данной задачи существует [4] на $F \times M$ нормированная неотрицательная мера Радона μ^T , связанная с $\mu_f(\omega)$ соотношением

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} d\mu_f(\omega) \psi[f(|\omega), u(|\omega)] = \int_{F \times M} d\mu^T \psi[f, u]$$

Согласно замечаниям теоремы 2 работы [4], лебеговское расширение [5] меры μ^T удовлетворяет условиям

$$(2.3) \quad \int_{F \times M} d\mu^T \psi[f, u] L[u, f, \varphi] = 0$$

$$\int_{F \times M} d\mu^T |L[u, f, \varphi]|^2 = 0$$

$$\forall \psi \in C(F \times M), \quad \forall \varphi \in \Phi$$

Это значит, что мера μ^T сосредоточена на решениях уравнения (2.1). Сужение μ_0 этой меры на $C(F)$ совпадает с мерой, индуцированной отображением $\omega \rightarrow f(\omega)$. Продолжение $f(\omega) \rightarrow u(\omega)$ последнего отображения индуцирует меру, совпадающую с сужением μ_1 меры μ^T на $C(M)$.

В силу принятых условий случайное поле $f(r)$ подобно гауссовскому в смысле представления высших корреляционных моментов через низшие. Пусть его первый момент равен нулю, а второй корреляционный момент $K(r, r')$ является ядром невырожденной интегральной операции на множестве функций $W \supset U$, заданных на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих условиям (1.2). Из соотношений (1.1), (2.2), (2.3) тогда следует

$$(2.4) \quad \int_M d\mu_1 \int_0^1 dr \int_0^1 dr_1 N[r; u] K^{-1}(r, r_1) N[r_1; u] = \int_0^1 dr \delta(r, r_1) = 1$$

Здесь $\delta(r, r_1)$ — заданная на отрезке $[0, 1]$ и связанная условиями (1.2) δ -функция Дирака.

Предположим, что на множествах M и F соответственным образом существуют вспомогательные меры ν_1 и ν_0 , такие, что мера μ_1 абсолютно непрерывна относительно ν_1 , а мера μ_0 — относительно ν_0 . Согласно известной теореме Радона, отсюда вытекает существование производных Радона — Никодима $d\mu_1/d\nu_1$ и $d\mu_0/d\nu_0$. Производная $d\mu_1/d\nu_1$ определена для всех точек пространства M , за исключением, может быть, некоторого подмножества M_1 , для которого $\nu_1(M_1) = 0$. (В силу приведенного выше условия абсолютной непрерывности одновременно $\mu_1(M_1) = 0$.) Производная $d\mu_0/d\nu_0$ определена, в свою очередь, для всех точек пространства F , за исключением, может быть, некоторого подмножества F_1 , для которого $\nu_0(F_1) = 0$.

Мера неопределенности в информации — информационная энтропия, соответствующая данному статистическому распределению μ_i ($i = 0, 1$) — определяется формулой [6]

$$H_i = - \int_{S_i} d\mu_i \ln \frac{d\mu_i}{d\nu_i} \quad (S_0 = F, S_1 = M)$$

Вероятностную меру μ_1 можно найти по правилам теории информации [6, 7] методом Лагранжа из условия максимума энтропии H_1 , совместимого одновременно с неотрицательностью и нормированностью μ_1 и наличием интеграла (2.4). Условному экстремуму H_1 отвечает тогда абсолютный экстремум функционала

$$\psi = - \int_M d\mu_1 \left[\ln \frac{d\mu_1}{d\nu_1} + \beta_1 \int_0^1 dr \int_0^1 dr_1 N[r; u] K^{-1}(r, r_1) N[r_1; u] + \beta_2 \right]$$

Входящие сюда коэффициенты β_1, β_2 — лагранжевы множители. Максимум ψ достигается на мере

$$(2.5) \quad d\mu_1 = c \exp \{-\beta_1 S[u]\} d\nu_1; \quad c = \exp(-1 - \beta_2)$$

$$S[u] = \int_0^1 dr \int_0^1 dr_1 N[r; u] K^{-1}(r, r_1) N[r_1; u]$$

Величины β_1 и c определяются равенством (2.4) и условием нормированности меры μ_1 .

Требуемая согласно постулатам теории информации [6] инвариантность информационной энтропии (при индуцированном отображении $\omega \rightarrow f(|\omega) \rightarrow u[f(|\omega)]$ переходе от меры μ_0 к мере μ_1) обеспечивается выбором ν_1 в следующей форме:

$$(2.6) \quad -d\nu_1 = |\text{Det}[\Gamma^{-1}(u)]| d\nu_{11}$$

Здесь $d\nu_{11}$ — заданная на M обобщенная мера (по терминологии работы [8]), представляющая собой аналог элемента «объема» в пространстве функций $u(r)$ из M ; $\text{Det}[\Gamma^{-1}(u)]$ — детерминант Фредгольма интегральной операции на отрезке $[0, 1]$ с ядром $\Gamma^{-1}[r, r'; u]$. Двухточечная функция $\Gamma[r, r'; u]$ удовлетворяет условиям (1.2) и уравнению

$$\int_0^1 dr_1 \frac{\delta N[r; u]}{\delta u(r_1)} \Gamma[r_1, r'; u] = \delta(r, r')$$

Подставим соотношения (2.5), (2.6) во второй интеграл (2.4). Преобразованием (1.1) этот интеграл формальным образом сводится тогда к континуальному на F интегралу гауссовского типа

$$(2.7) \quad c \int_F d\nu_{01} f(r) f(r') \exp \left\{ -\beta_1 \int_0^1 dr \int_0^1 dr_1 f(r) K^{-1}(r, r_1) f(r_1) \right\} = K(r, r')$$

Здесь $d\nu_{01}$ — обобщенная мера на F — аналог элемента «объема» в пространстве функций $f(r)$ из F .

Выполняя по методу работы [9] континуальное интегрирование в (2.7), получим, что $\beta_1 = 1/2$.

Выделим в соотношениях (2.5), (2.6) обобщенную производную

$$(2.8) \quad P_e[u] = \frac{d\mu_1}{d\nu_1} = c |\text{Det}[\Gamma^{-1}(u)]| \exp \left\{ -\frac{1}{2} S[u] \right\}$$

Функционал $P_e[u]$, называемый в дальнейшем функционалом вероятности (ФВ), представляет собой бесконечномерное обобщение на функциональном пространстве M конечномерной плотности вероятности величин $u(r_i)$ из M (r_i — координаты точек конечного разбиения отрезка $[0, 1]$).

3. Условие локального экстремума требует обращения в нуль на экстремали $u = u_* \in M$ вариационной производной от ФВ $P_e[u]$. Соответствующее этому условию уравнение для u_* имеет вид

$$(3.1) \quad N[r; u_*] = - \int_0^1 dr_1 \int_0^1 dr_2 K(r, r_1) \frac{\delta}{\delta u(r_2)} \Gamma[r_2, r_1; u] \Big|_{u=u_*}$$

В правую часть уравнения (3.1) входит неаналитическая операция с ядром $\Gamma[r, r'; u = u_*]$. Однако из выражения (2.8) следует, что вырождение матрицы $\Gamma^{-1}[r, r'; u = u_*]$ наступает лишь на тех реализациях из U ее функционального аргумента u_* , вероятность которых равна нулю. Следовательно, операторы, ядра которых составляют матрицы $\Gamma[r, r'; u = u_*]$, аналитичны по вероятности относительно функционального аргумента u_* или иных параметров задачи.

Используя это обстоятельство, преобразуем уравнение (3.1) к виду, содержащему лишь члены низших порядков по параметру геометрической нелинейности α . Положим $\lambda = \lambda_0 + \gamma$. Пусть в малой окрестности λ_0

$$\text{Det} [\Gamma^{-1}(u)]|_{u=0} \neq 0$$

Тогда с ненулевой вероятностью возможно разложение слагаемых правой части (3.1) по степеням α . Учитывая лишь главные члены этого разложения, получим (вводя обозначение $\chi = u_*(r)$)

$$(3.2) \quad B(r; \lambda_0) \chi = -\gamma \chi - \alpha N_1[r; \chi] - \alpha \varepsilon N_2[r; \chi] + \\ + \alpha \psi_1(r; \lambda, \lambda_0) \chi + \alpha \varepsilon \psi(r; \lambda) + o(\alpha)$$

$$B(r; \lambda_0) \chi = L\chi|_{\lambda=\lambda_0} - \alpha \int_0^1 ds M(r, s; \lambda_0) \chi(s)$$

$$M(r, s; \lambda) = 2 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 dr_1 K(r, s) g(r_1, s) (r_1 s)^{-3/2} \times \\ \times [2\Gamma_0(s, r_1; \lambda) \Gamma_0(r_1, s_1; \lambda) + \Gamma_0(r_1, r_1; \lambda) \Gamma_0(s, s_1; \lambda)]$$

$$\psi(r; \lambda) = 2 \int_0^1 ds \int_0^1 ds_1 \int_0^1 dr_1 K(r, s) g(r_1, s_1) \Gamma_0(r_1, s; \lambda) \times \\ \times [2r_1^{-3/2} \Gamma_0(s_1, r_1; \lambda) + s_1^{-3/2} \Gamma_0(s_1, s_1; \lambda)]$$

$$\psi_1(r; \lambda, \lambda_0) \chi = \int_0^1 ds [M(r, s; \lambda) - M(r, s; \lambda_0)] \chi(s)$$

Здесь $B(r; \lambda_0)$ — линейный оператор; функция $\Gamma_0(r, s; \lambda)$ равна функции $\Gamma[r, r'; u=0]$ на значениях $\lambda > 0$ и в общем случае ограничена по вероятности.

Изучение решений уравнения (3.2) с аналитическими по вероятности операторами, выявление моментов их разветвления, выделение среди последних тех, которые отвечают рождению и взаимным переходам мод функционала вероятности, составляет содержание исследования на устойчивость (в ансамблевом смысле) данной и ей подобных [1] стохастических систем.

Обозначим символами $\zeta_m(r)$ нули оператора $B(r; \lambda_0)$. Ими будут при условиях (1.2) нетривиальные решения линейного уравнения

$$(3.3) \quad B(r; \lambda_0) \chi = 0$$

Через λ_{0m} обозначим значения величины λ_0 , соответствующие моментам необратимости оператора $B(r; \lambda_0)$.

Рассмотрим случай, когда каждому значению $\lambda_{0m} > 0$ отвечает только один нуль оператора $B(r; \lambda_0)$. В этом случае уравнение (3.2) допускает (аналогично нелинейным уравнениям с операторами в банаховых пространствах [10]) формальное решение вида

$$(3.4) \quad \chi(r) = \eta \zeta_m(r) - \alpha \int_0^1 ds R_m(r, s) [\alpha^{-1} \gamma \chi(s) + N_1[s; \chi] - \\ - \psi_1(s; \lambda, \lambda_0) + \varepsilon (N_2[s; \chi] - \psi(s; \lambda))] + o(\alpha)$$

$$(3.5) \quad \eta = \int_0^1 dr \chi(r) \zeta_m(r)$$

Здесь $R_m(r, s)$ — ядро оператора Грина, определяемое при условиях (1.2) выражением

$$B(r; \lambda_{0m}) R_m(r, r') + \int_0^1 ds \zeta_m(r) \zeta_m(s) R_m(s, r') = \delta(r, r')$$

4. Рассмотрим случай $\varepsilon = 0$ (круглые мембраны). В этом случае уравнение (3.1) имеет как нулевое, так и ненулевые решения. Зададимся вопросом, при каких значениях λ тривиальная экстремаль $u_* = 0$ — мода функционала вероятности мембран $P_0[u] = P_{\varepsilon=0}[u]$.

Аналогично нелинейным уравнениям с ограниченными с вероятностью единица операторами [10] решение уравнения (3.4) представимо при $\varepsilon = 0$ в виде следующего сходящегося по вероятности ряда:

$$(4.1) \quad \chi(r) = \sum_{k=1} \chi_k(r) \eta^k$$

Величины χ_k находятся методом неопределенных коэффициентов, т. е. путем подстановки (4.1) в (3.4) и последующего сравнения коэффициентов при одинаковых степенях η . Так называемое уравнение разветвления для величины η образуется подстановкой (4.1) в (3.5). В результате выполнения этих операций получаем

$$(4.2) \quad L_{11}(\lambda - \lambda_{0m}) - \alpha L_{12}(\lambda, \lambda_{0m}) + \alpha L_3 \eta^2 \approx 0$$

$$L_{11} = \int_0^1 dr \zeta_m^2(r), \quad L_{12}(\lambda, \lambda_{0m}) = \int_0^1 dr \zeta_m(r) \psi_1(r; \lambda, \lambda_0) \zeta_m$$

$$L_3 = \int_0^1 dr \int_0^1 ds (rs)^{-3/2} g(r, s) \zeta_m^2(r) \zeta_m^2(s)$$

Как явствует из выражений (3.2), (4.2), приближенными малыми решениями уравнения (3.1) являются следующие формы:

$$(4.3) \quad u_*(r) \approx u_{\pm}(r, \lambda - \lambda_{0m}) = \pm \beta \zeta_m(r)$$

$$\beta = [\alpha^{-1} | L^{(1)}(\lambda, \lambda_{0m}) L_3^{-1} | (\lambda - \lambda_{0m})]^{1/2}$$

$$L^{(1)}(\lambda, \lambda_{0m}) = L_{11} - \alpha L_{12}(\lambda, \lambda_{0m}) (\lambda - \lambda_{0m})^{-1}$$

Отсюда следует, что в области $0 < \lambda < p_{0m}$ (p_{0m} — наименьшая величина из последовательности $\{\lambda_{0m}\}$) уравнение (3.1) имеет лишь тривиальное решение. Это значит, что здесь функционал вероятности $P_0[u]$ достигает экстремума только на форме $u(r) = 0$. Характер этого экстремума устанавливается из непрерывности (по вероятности) функционала $P_0[u]$ и условий

$$(4.4) \quad P_0[u] \geq 0, P_0[u = 0] > 0, P[u \rightarrow \pm\infty] \rightarrow 0 + 0$$

Эти условия свидетельствуют в пользу того, что единственная здесь экстремаль $u_*(r) = 0$ — мода функционала $P_0[u]$.

Вторая вариация функционала $S_1[u] = -\ln(c^{-1}P_0[u])$ имеет в окрестности $u = 0$ вид простой квадратичной формы

$$(4.5) \quad \delta^2 S_1[u] = \frac{1}{2} \sum_m c_m(\lambda) u_m^2, \quad u_m = \int_0^1 dr \zeta_m(r) u(r)$$

Величины $c_m(\lambda)$ являются собственными числами оператора в левой части уравнения

$$(4.6) \quad \int_0^1 dr_1 \frac{\delta^2 S_1[u]}{\delta u(r_1) \delta u(r)} \Big|_{u=0} u(r_1) = c u(r)$$

Решения уравнения (4.6) совпадают по вероятности с нулями $\zeta_m(r)$ оператора $B(r, \lambda)$.

Функционал вероятности $P_0[u]$ имеет в области $0 < \lambda < p_{0m}$ только один экстремум — максимум на функции $u(r) = 0$. Следовательно, величина $S_1[u]$ является здесь в малой окрестности $u(r) = 0$ выпуклым вниз функционалом: $\delta^2 S_1[u] > 0$ и все $c_m(\lambda) > 0$. При достижении (и небольшом последующем превышении) сжимающим усилием λ значения p_{0m} собственное число $c_n(\lambda)$ переходит через нулевое в область отрицательных значений. Квадратичная форма (4.5) становится знаконеопределенной. Следовательно, тривиальное при $\varepsilon = 0$ решение уравнения (3.1) перестает быть модой функционала $P_0[u]$. В силу условий (4.4) у функционала $P_0[u]$ должны быть здесь моды среди оставшихся решений уравнения (3.1). В рамках используемых приближений в достаточно малой положительной полуокрестности p_{0m} таких решений два: $u_{\pm}(r; \lambda - p_{0m})$. Поскольку $P_0[u] = P_0[-u]$, оба эти решения будут аппроксимировать моды функционала вероятности мембран.

Таким образом, функционал вероятности мембран $P_0[u]$ имеет до момента $\lambda = p_{0m}$ первого ветвления тривиального решения уравнения на экстремали единственный экстремум — максимум на $u(r) = 0$, который в отмеченный момент переходит в новые максимумы приближенно на формах $u_{\pm}(r, \lambda - p_{0m})$.

Такое явление представляет собой пример стохастической бифуркации.

При достаточно малых $K(r, r')$ задача (3.3), (1.2) допускает в рамках метода Галеркина приближенные решения $\zeta_m(r) \approx \varphi_m(r) = (2r)^{1/2} |J_2(k_m)|^{-1} J_1(k_m r)$ ($J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n -го порядка, k_m — корни уравнения $J_1(x)$, $x > 0$). Значения λ_{0m} усилия λ , соответствующие моментам необратимости оператора $B(r, \lambda)$, находятся в этом случае в окрестностях величин k_m^2 . Приближенно

$$(4.7) \quad \lambda_{0m} \approx -q_m^2 = k_m^2 - (6\alpha\beta_m K_{mm})^{1/2}$$

$$K_{pp} = \int_0^1 dr \int_0^1 dr_1 \varphi_p(r) K(r, r_1) \varphi_p(r_1)$$

$$\beta_p = \sum_n k_n^{-2} \left(\int_0^1 ds s^{-3/2} \varphi_n(s) \varphi_p^2(s) \right)^2$$

Согласно выражениям (4.3), приближенными малыми решениями уравнения (3.1) будут при $\varepsilon = 0$ следующие формы:

$$(4.8) \quad u_{\pm}^{(m)}(r; \lambda, q_m^2) = \pm a_m(\lambda) [(\alpha\beta_m)^{-1} (\lambda - q_m^2)]^{1/2} \varphi_m(r)$$

$$a_m(\lambda) = |\lambda - k_m^2|^{-1} [(\lambda - q_m^2)^2 + 3(\lambda - q_m^2)(q_m^2 - k_m^2) + 3(q_m^2 - k_m^2)^2]^{1/2}$$

В случае $K = 0$ выражения (4.7), (4.8) определяют известную [10] последовательность $\{k_m^2\}$ точек бифуркации равновесий мембраны с нулевой поперечной нагрузкой и производные равновесных форм $v_{\pm}^{(m)}(r)$ прогибов

$$\frac{dv_{\pm}^{(m)}}{dr} \approx \pm [(\alpha\beta_m)^{-1} (\lambda - k_m^2)]^{1/2} |J_2(k_m)|^{-1} J_1(k_m r)$$

Пусть корреляционный момент $B(r, r')$ случайного поля безразмерных поперечных нагрузок $\pi(r)$ аппроксимируется δ -функцией

$$(4.9) \quad B(r, r') = A\delta(r, r')$$

Соответствующий этой аппроксимации корреляционный момент поля $f(r)$ имеет следующий вид:

$$(4.10) \quad K(r, r') = A \min(r, r') (rr')^{-1/2}$$

Проведенные по формулам (4.7), (4.10) расчеты показывают, что в достаточно широкой области изменения амплитуды $A = [0, 10]$, в которой справедливы используемые приближения, наименьшая величина из последовательности $\{q_m^2\}$ достигается на значении $m = 1$, т. е.

$$(4.11) \quad q_1^2 = \min \{q_m^2\} \approx k_1^2 - 0,69(\alpha A)^{1/2}, \quad k_1^2 \approx 14,69$$

Похожий на (4.11) случай (в смысле существования минимума последовательности $\{q_m^2\}$ на значении $m = 1$) имеет место для поля поперечных нагрузок с ненулевым радиусом корреляций и моментом

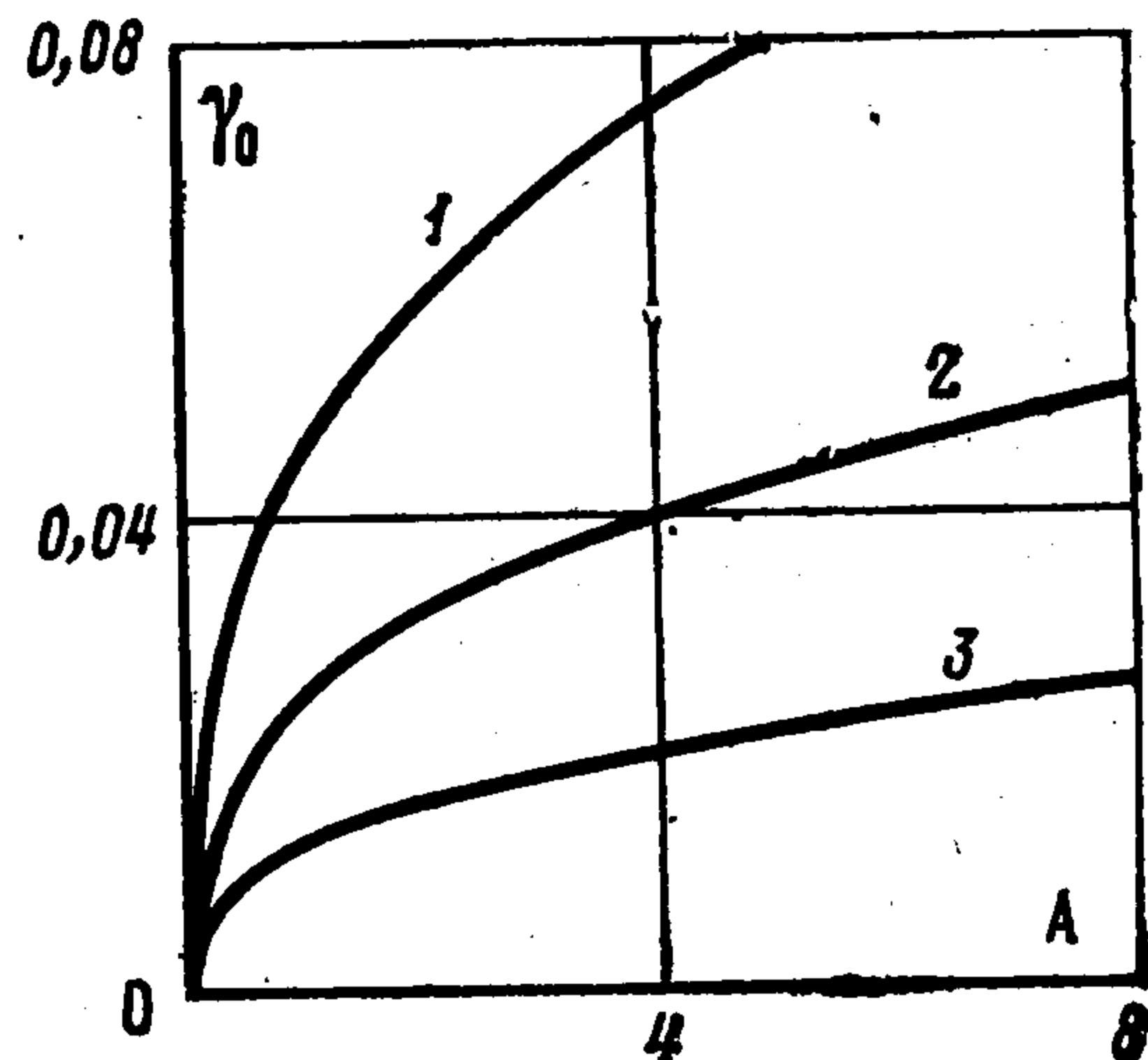
$$(4.12) \quad B(r, r') = A \exp\{-|r - r'| r_0^{-1}\}, \quad 0 < r_0 \ll 1$$

Здесь r_0 — масштабный параметр корреляций.

В обоих случаях (4.9), (4.12) стохастическая бифуркация равновесий мембраны наступает (с увеличением сжимающего усилия) раньше, чем детерминистическая бифуркация мембраны с нулевой поперечной нагрузкой.

Влияние стохастических нагрузок на способность к выпучиванию оценивается величиной относительного расстояния γ_0 между первой (по сжимающему усилию) точкой бифуркации равновесий мембраны с нулевой поперечной нагрузкой и точкой стохастической бифуркации. В данном случае

$$(4.13) \quad \gamma_0 = (k_1^2 - q_1^2) k_1^{-2}$$



Фиг. 1

На фиг. 1 представлены для случая $\alpha = 0,1$ расчетные зависимости величины γ от амплитуды A корреляционных моментов случайного поля поперечных нагрузок. Кривая 1 соответствует δ -коррелированному полю нагрузок (момент (4.9)). Кривые 2, 3 отвечают полям нагрузок с корреляционными моментами типа (4.12) с масштабными параметрами $r_0 = 0,1$ и $r_0 = 0,01$ соответственно. Из вида этих кривых следует, что предрасположенность к выпучиванию исходной формы отличимо повышается для мембран со стохастической поперечной нагрузкой по сравнению с мембранами с нулевой поперечной нагрузкой даже в области $A < 1$.

5. Рассмотрим случай $0 < \varepsilon \ll 1$ (пологие оболочки). При малых ε и α задача (3.2), (1.2) допускает в рамках метода Галеркина приближенное решение

$$(5.1) \quad \chi(r) \approx \eta \zeta_m(r)$$

Входящий в (5.1) параметр η подчинен уравнению

$$(5.2) \quad \alpha \varepsilon L_0 + [L_{11}(\lambda - \lambda_{0m}) - \alpha L_{12}(\lambda, \lambda_{0m})] \eta + \alpha \varepsilon L_2 h^2 + \alpha L_3 \eta^3 \approx 0$$

Коэффициенты уравнения (5.2) удовлетворяют соотношениям (4.2) и равенствам

$$L_0 = \int_0^1 dr \zeta_m(r) \psi(r, \lambda), \quad L_2 = \int_0^1 dr \int_0^1 ds r^{-1/2} \zeta_m^2(r) g(r, s) \zeta_m(s)$$

Уравнение (5.2) имеет до момента $\lambda = \lambda_{1m}$ одно — нетривиальное — решение η_0 . Начиная с этого момента таких решений будет три: η_0, η_+, η_-

η_- . В рамках приближения $\zeta_m(r) \approx \varphi_m(r)$ получаем

$$(5.3) \quad \lambda_{1m} \approx \mu_m^2 = q_m^2 + (2^{-1}6^{1/2}\varepsilon\alpha^{1/2}\tau_m\beta_m^{-1/2}K_{mm})^{2/3}$$

$$\gamma_m = k_m^{-2} \int_0^1 ds s^{-2/3} \varphi_m^3(s)$$

В окрестностях величин $\lambda = \lambda_{1m}$ поведение амплитуд η_0, η_{\pm} характеризуется следующей зависимостью от λ :

$$(5.4) \quad \eta_0 \sim (4 - g_m(\lambda))^{1/3} - y_m$$

$$(5.5) \quad \eta_{\pm} \sim -g_m^{1/3}(\lambda) [2^{-1/3} \pm (-4^{-1/3} + 3^{-1}d_m(\lambda)g_m^{-2/3}(\lambda))^{1/2}] - y_m$$

$$y_m = 2\varepsilon(3\beta_m)^{-1}\tau_m, \delta_m = \lambda - \lambda_{0m}, d_m(\lambda) = -3y_m^2 + (\alpha\beta_m)^{-1}\delta_m$$

$$g_m(\lambda) = y_m [(\alpha\beta_m)^{-1}\delta_m - (6\alpha^{-2}\beta_m^{-1}K_{mm})^{1/3}]$$

При больших абсолютных значениях величины $\xi_m = (\alpha\beta_m)^{-1}\delta_m$ асимптотика решений уравнения (5.2) приобретает такой вид:

$$(5.6) \quad \eta_0 \sim \begin{cases} \eta_{01} = -6\varepsilon\tau_m K_{mm}\beta_m^{-1}(\lambda - \lambda_{0m})^{-3}, \xi_m \rightarrow -\infty \\ \eta_{02} = \text{sign}(g_m(\lambda))\xi_m^{1/2}, \xi_m \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$(5.7) \quad \eta_+ \sim -\eta_{02}, \quad \eta_- \sim -\eta_{01}, \quad \xi_m \rightarrow \infty$$

Выделим из последовательности $\{\lambda_{1m}\}$ наименьшую величину λ_{1k} . Предположим, что ей соответствует только одна пара $(\zeta_k(r), \lambda_{0k})$. Тогда в первом приближении уравнение (3.1) имеет при малых ε, α простые решения типа (5.1)

$$(5.8) \quad \chi(r) \approx \eta\varphi_k(r)$$

Подставляя сюда вместо η выражения (5.4)–(5.7), получим асимптотику малых решений уравнения на экстремали ФВ оболочек $P_\varepsilon[u]$ до и после первой точки их разветвления.

Функционал $P_\varepsilon[u]$ непрерывен по вероятности на множестве M . Он удовлетворяет условиям

$$(5.9) \quad P_\varepsilon[u] \geq 0 \quad (\forall u \in M), \quad P_\varepsilon[u \rightrightarrows \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}] \rightarrow 0 + 0$$

Из этих условий следует, что в области $0 < \lambda < \mu_k^2 = \min\{\mu_m^2\}$ единственная экстремаль $\chi(r) \approx \eta_0\varphi_k(r)$ является в рамках используемых приближений модой ФВ $P_\varepsilon[u]$.

Приближенно с момента $\lambda = \mu_k^2 = \min\{\mu_m^2\}$ у уравнения на экстремали (3.1) появляются (при $\varepsilon > 0$) два новых нетривиальных решения: $\chi_{\pm}(r) = \eta_{\pm}\varphi_k(r)$. Оба этих решения исходят на плоскости (λ, η) из одной точки с координатами

$$\lambda = \mu_k^2, \quad \eta \sim -(2^{-1}g_k(\lambda = \mu_k^2))^{1/3} - 2\varepsilon(3\beta_k)^{-1}\tau_k$$

Из соотношений (5.4), (5.8) следует, что в области $0 < \lambda < \mu_k^2$ кривая $\eta_-(\lambda)$ лежит на плоскости (λ, η) между кривыми $\eta_0(\lambda)$ и $\eta_+(\lambda)$. (Заметим, что при $\xi_k \rightarrow \infty$ амплитуды η_+, η_0 различаются только знаком, а величина η_- пропорциональна малому отношению ε/α при $\varepsilon \ll \alpha$). Отсюда и из условий (5.9) вытекает, что в рамках используемых приближений функционал $P_\varepsilon[u]$ имеет в области $\lambda > \mu_k^2$ максимумы на формах $\chi_0(r) = \eta_0\varphi_k(r), \chi_+(r) = \eta_+\varphi_k(r)$. Момент возникновения второго максимума при $\lambda = \mu_k^2$ сопровождается неравенством $P_\varepsilon[\chi_+] < P_\varepsilon[\chi_0]$, которое сменяется при $\xi_k \rightarrow \infty$ приближенным равенством $P_\varepsilon[\chi_+] \lesssim P_\varepsilon[\chi_0]$.

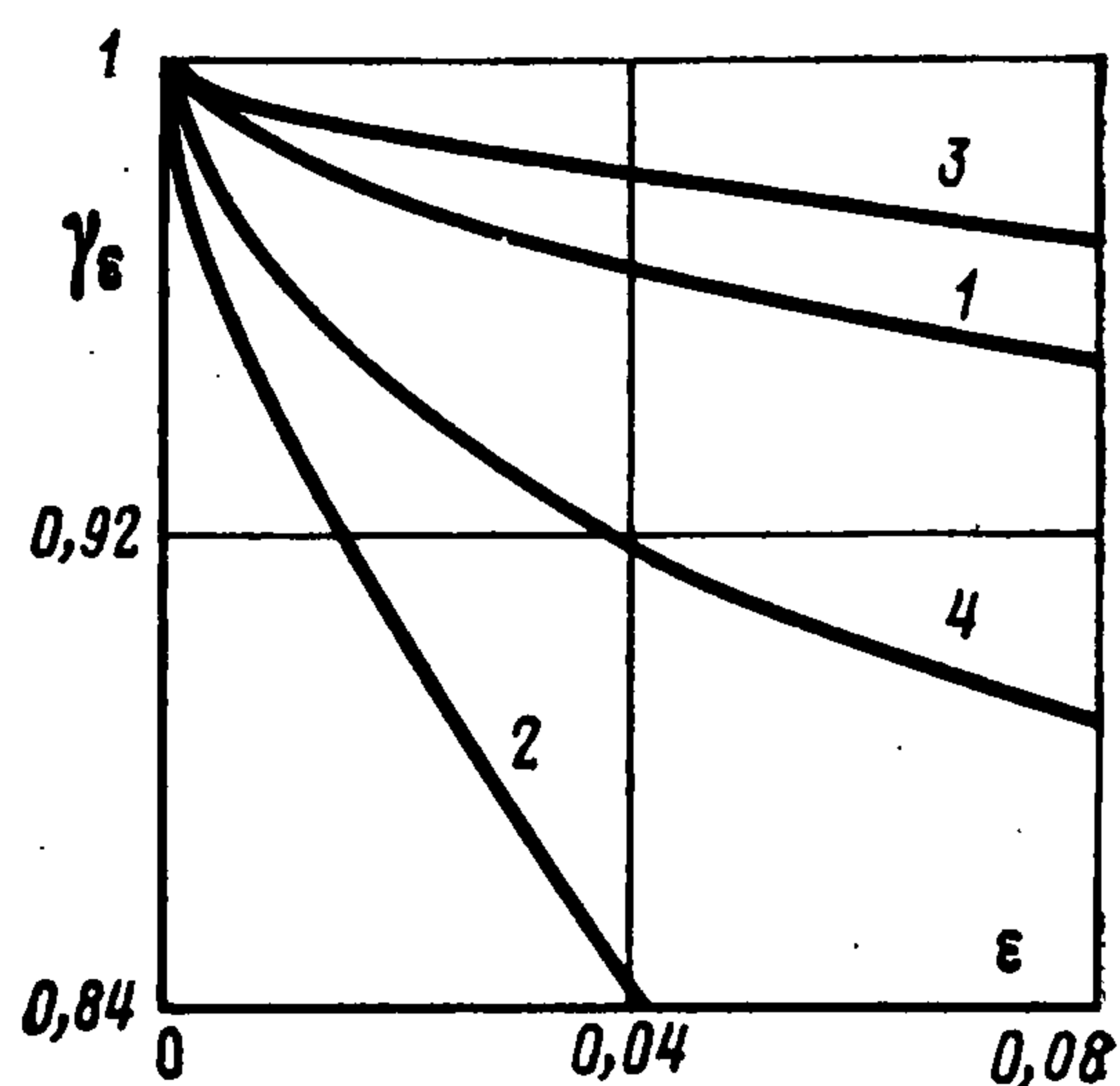
Таким образом, для данной стохастической упругой системы (незамкнутая пологая сферическая оболочка кругового очертания со случайной гауссовской поперечной нагрузкой и с равномерным на контуре радиальным напряжением) наиболее вероятной формой прогибов в области $\lambda < \mu_k^2 = \min \{\mu_m^2\}$ является единственно форма $v_0(r)$, для которой

$$\frac{dv_0(r)}{dr} \approx \eta_0 I_k(r), \quad I_k(r) = |J_2(k_k)|^{-1} J_1(k_k r)$$

В области $\xi_k \rightarrow \infty$ наиболее вероятных форм прогибов две: $v_0(r)$ и $v_+(r)$, причем

$$\frac{dv_0(r)}{dr} \sim \eta_{02} I_k(r), \quad \frac{dv_+(r)}{dr} \sim -\eta_{02} I_k(r)$$

Пусть V_* — множество возможных форм прогибов оболочки, а V_0, V_+ — его подмножества, представляющие собой непересекающиеся окрестности элементов $v_0 \in V_0, v_+ \in V_+$ из V_* соответственно. Наличие при $\xi_k \rightarrow \infty$ двух равновесных форм прогибов $v_0(r), v_+(r)$, имеющих на V почти равные максимальные вероятности существования (взамен одной максимально-вероятной формы $v_0(r)$ при $\lambda < \mu_k^2$), порождает при малых возмущениях системы в случае $\lambda > \mu_k^2$ немалую вероятность перехода с одного из элементов множества V_0 на один из элементов множества V_+ . Такое явление представляет собой пример стохастического прощелкивания.



Фиг. 2

Для поперечных нагрузок с корреляционными моментами (4.9), (4.12) наименьшая величина из последовательности $\{\mu_m^2\}$ достигается в области $A = [0, 10]$ на значении $m = 1$, т. е. имеет место равенство $\mu_1^2 = \min \{\mu_m^2\}$. Влияние параметра ϵ на стохастическое ветвление можно оценить по отношению

$$\gamma_\epsilon = \frac{k_1^2 - \mu_1^2}{k_1^2 - q_1^2}$$

На фиг. 2 даны расчетные зависимости величины γ_ϵ от ϵ для разных значений амплитуды корреляционных моментов. Кривые 1, 3 отвечают δ -коррелированным полям поперечных нагрузок с амплитудами $A = 0,1$ и $A = 9,4$ соответственно. Кривые 2, 4 отвечают полям поперечных нагрузок с моментами типа (4.12) при одном общем значении параметра $r_0 = 0,1$ и двух значениях $A = 0,1, A = 9,4$ соответственно. Ход кривых на фиг. 2 говорит о том, что начальная кривизна оболочки оказывает задерживающее влияние на возможность стохастического ветвления. Иными словами, с ростом ϵ требуется все большее сжимающее усилие, чтобы у функционала вероятности появилось два максимума вместо одного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков С. И. Пример стохастической бифуркации в теории изгиба неидеальных пластин.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 876—883.
2. Edwards S. F. The statistical dynamics of homogeneous turbulence.— J. Fluid Mech., 1964, v. 18, pt. 2, p. 239—273.
3. Феодосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. М.: Оборониздат, 1949. 344 с.

4. *Арсеньев А. А.* О существовании стохастических и статистических решений у нелинейных уравнений. — В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1977, с. 25—34.
5. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Кн. 6. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967, 396 с.
6. *Стратонович Р. Л.* Теория информации. М.: Сов. радио, 1975. 423 с.
7. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.
8. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
9. *Славнов А. А.* Континуальный интеграл в теории возмущений. — Теорет. и матем. физика, 1975, т. 22, № 2, с. 177—185.
10. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
13.VI.1984