Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 4, 1985

УДК 539.3

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Братусь А. С.

Рассматриваются задачи выбора распределений толщин упругих пластин с целью максимизации основной частоты свободных колебаний, а также задачи минимизации потенциальной энергии деформации. Получены необходимые и достаточные условия слабого локального экстремума в поставленных задачах оптимального проектирования. Эти условия сохраняют свой вид и для взаимных задач: минимизация веса пластины при ограничениях на основную частоту или потенциальную энергию деформации. Полученные условия заключаются в интегральной оценке на максимальный рост вторых производных от распределений толщин, удовлетворяющих необходимым условиям экстремума.

Задачи оптимизации форм упругих пластин решались численно [1—8]. Доказано [9], что эти задачи могут не иметь сильного экстремума. Показано [10, 11], что для существования решений достаточно наложить интегральные ограничения на характер роста производных допустимых распределений толщин.

1. Постановка задачи. Рассмотрим пластину переменной толщины $h(x, y)$, закрепленную по кусочно-гладкому контуру Γ, ограничивающему область D в плоскости xy. Пусть S — площадь области D, V — объем пластины. В недеформируемом состоянии срединная поверхность пластины совпадает с областью D. На части Γ_1 границы Γ пластина свободно оперта, на остальной части Γ_2 — жестко закреплена. Через $w(x, y)$ обозначим функцию прогибов пластины. Введем безразмерные переменные

$$x' = xS^{-1/2},\quad y' = yS^{-1/2},\quad h'(x, y) = h(x, y)\,SV^{-1} \tag{1.1}$$

В принятых обозначениях задача о частотах свободных колебаний имеет вид (штрихи у безразмерных переменных опускаем)

$$A(h)\,w(x, y) = \lambda h w(x, y),\quad \lambda = 12(1-\nu^2)E^{-1}S^4V^{-2}\omega^2 \tag{1.2}$$

$$(w)_\Gamma = 0\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{\Gamma_2} = 0,\quad \left(h^3\left(\Delta w - \frac{1-\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial n}\right)\right)_{\Gamma_1} = 0 \tag{1.3}$$

$$A(h) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}h^3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}h^3\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + 2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}h^3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \tag{1.4}$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона ω — частота свободных колебаний, $\partial w/\partial n$ — производная по внешней нормали к Γ, R — радиус кривизны, Δ — оператор Лапласа.

В переменных (1.1) задача о статическом изгибе пластины, нагруженной поперечной силой $p(x, y)$, имеет вид

$$A(h)\,w(x, y) = q(x, y),\quad q = 12(1-\nu^2)E^{-1}S^{-3/2}V^{-3}p(x, y) \tag{1.5}$$

где дифференциальный оператор $A(h)$ задан формулой (1.4), функция w удовлетворяет краевым условиям (1.3).

Рассмотрим пространства Соболева $W_2^k(D)$ $(k = 0, 1, 2)$ функций, суммируемых с квадратом вместе со своими производными до порядка k включительно. Полагая, что $h(x, y)$ — непрерывная в D функция, $h(x, y) \geqslant h_1 > 0$ $(h_1 = \text{const})$, введем билинейную симметричную положительно-определенную форму [12], порожденную оператором $A(h)$

(1.6)
$$A_h(w,u) = \iint_D a_h(w,u)\,dxdy, \quad a_h(w,u) =$$
$$= h^3(w_{xx}(u_{xx} + \nu u_{yy}) + w_{yy}(u_{yy} + \nu u_{xx}) + 2(1-\nu)\,w_{xy}u_{xy})$$

(индексы снизу означают вычисление соответствующих частных производных по x и y). Форма $A_h(w, u)$ определена и непрерывна на функциях из множества H, которое получается замыканием в пространстве $W_2^2(D)$ множества бесконечно дифференцируемых в $\bar{D}$ функций, удовлетворяющих краевым условиям (1.3).

Будем рассматривать слабые решения $w(x, y) \in H$ краевых задач (1.2), (1.5), удовлетворяющие интегральным тождествам

(1.7)
$$A_h(w, u) = \lambda(hw, u), \quad A_h(w, u) = (q, u)$$

справедливых для любых функций $u(x, y) \in H$. Здесь и далее скобками обозначено скалярное произведение в пространстве $L_2(D)$. При сделанных предположениях справедлива теорема о дискретном спектре для задачи на собственное значение и теорема о существовании решения краевой задачи, если $q \in H^*$, где H^* — пространство, сопряженное к пространству H [12, 13].

Введем дополнительные предположения относительно характера возможных распределений толщин пластинок. Обозначим через Q множество функций $h(x, y)$, удовлетворяющих условиям

(1.8)
$$\iint_D h(x,y)\,dx\,dy \leqslant 1, \quad 0 < h_1 \leqslant h(x,y) \leqslant h_2$$
$$(h_1, h_2 = \text{const}, h_2 > 1) \iint_D (\partial^2 h)^2\,dx\,dy =$$
$$\iint_D \left(\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^2\right)dxdy \leqslant C^2 = \text{const}$$

Последнее условие в (1.8) задает интегральное ограничение на рост вторых производных распределений толщин. Его необходимость диктуется следующими причинами. Во-первых, в силу теорем вложения Соболева [13] оно гарантирует непрерывность функции $h(x, y)$, что является естественным требованием к характеру распределений толщин. Во-вторых, оно является достаточным условием для существования решений задач оптимизации, которые будут поставлены ниже [10—11]. В-третьих, с точки зрения механики должна выполняться гипотеза о прямолинейном нормальном элементе Кирхгофа — Лява. Отсутствие последнего условия в (1.8) разрешает появление распределений толщин со сколь угодно большими значениями гауссовских кривизн, при этом трудно ожидать какого-либо удовлетворительного выполнения упомянутой гипотезы. (В [14] предельным переходом показано, что уравнения пластины асимптотически точны, если период изменения толщины T значительно больше самой толщины h, т. е. $h/T \ll 1$).

Замечание. Некоторые авторы [8], решая численно задачи оптимизации без последнего ограничения в (1.8) и получая сколь угодно большие «пики» распределений толщин, трактуют их как ребра жесткости. Однако математическая модель пластины с ребрами жесткости [15] не соответствует исходным уравнениям, при которых получены эти решения, что делает такую трактовку неоправданной.

Перейдем к постановке задач оптимального проектирования.

1°. Среди всех распределений толщин $h(x, y) \in Q$ найти распределение, при котором минимальное собственное значение спектральной задачи (1.7) будет максимальным.

2°. Среди всех распределений $h(x, y) \in Q$ найти такое, при котором величина потенциальной энергии деформации в краевой задаче (1.7) будет минимальной.

2. Вычисление вариаций функционалов. Пусть $h(x, y) \in Q$. Дадим функции h приращение в виде $\varepsilon\delta h(x, y)$, где ε — достаточно малое число, а $\delta h(x, y)$ — функция из $W_2^2(D)$. В силу условий (1.8) функция δh не является произвольной. Однако на данном этапе будем интересоваться зависимостью функционалов задач 1 и 2 от приращения δh без учета ограничений (1.8). К полной постановке задач оптимизации с учетом всех ограничений вернемся позже.

Воспользуемся результатами об аналитическом возмущении спектра самосопряженных операторов [16, 17], полагая, что первое собственное значение простое. При $h + \varepsilon\delta h$ первая собственная функция w_1 и первое собственное значение λ_1 задачи (1.7) можно представить в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра

$$
\begin{aligned}
&(2.1) \qquad \lambda_1 + \varepsilon\mu_1(h, \delta h) + \varepsilon^2\mu_2(h, \delta h) + o(\varepsilon^2) \\
&\qquad\qquad w_1(x, y) + \varepsilon v_1(x, y; \delta h) + \varepsilon^2 v_2(x, y; \delta h) + \varepsilon^3\psi_\varepsilon
\end{aligned}
$$

Здесь ψ_ε — функция, ограниченная в норме пространства $W_2^2(D)$ при $\varepsilon \to 0$.

Подставим (2.1) в первое уравнение (1.7) и соберем члены при одинаковых степенях ε. Получим интегральные равенства для функций w_1, v_1, $v_2 \in H$, справедливые для любых функций $u \in H$

$$
\begin{aligned}
(2.2) \qquad & B_h(w_1, u) = 0, \quad B_h(v_1, u) = -B_h^1(w_1, u) + \\
& + \mu_1(hw_1, u), \quad B_h(v_2, u) = -B_h^1(v_1, u) - \\
& - B_h^2(w_1, u) + \mu_1(hv_1, u) + \mu_1(w_1\delta h, u) + \mu_2(hw_1, u) \\
& (B_h(w, u) = A_h(w, u) - \lambda_1(hw, u))
\end{aligned}
$$

Здесь B_h^i $(i = 1, 2)$ — билинейные формы, определяемые по формуле (выражение $a_h(w, u)$ определено в (1.6))

$$
(2.3) \qquad B_h^i(w, u) = \frac{1}{i!}\iint\limits_D \left(\frac{d^i}{d\varepsilon^i}\left(a_{h+\varepsilon\delta h}(w, u) - \lambda_1(h + \varepsilon\delta h)uw\right)\right)_{\varepsilon=0} dxdy
$$

Пусть $\{\lambda_l\}_{l=2}^\infty$, $\{w_l(x, y)\}_{l=2}^\infty$ — остальные собственные значения и собственные функции задачи (1.7), вычисленные при $h = h(x, y)$. Собственные функции можно нормировать (δ_{ij} — символ Кронекера) [12]:

$$
(2.4) \qquad (w_i h, w_j) = \delta_{ij}, \quad A_h(w_i, w_j) = \sqrt{\lambda_i\lambda_j}\,\delta_{ij}
$$

Положим во втором равенстве (2.2) $u = w_1$ и учтем первое равенство и (2.4), тогда

$$
(2.5) \qquad \mu_1(h, \delta h) = B_h^1(w_1, w_1)
$$

Найдем выражение для функции v_1 в (2.1), дающей первую поправку по ε к собственной функции w_1. Система собственных функций $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ полна в H [12], поэтому справедливо представление

$$
(2.6) \qquad v_1(x, y; \delta h) = \sum_{s=1}^\infty q_s w_s(x, y)
$$

Подставим функцию v_1 во второе уравнение (2.2) и положим в нем последовательно $u = w_l$ $(l = 2, 3, \ldots)$, получим выражение для коэффициентов ряда (2.6)

$$q_s = -(\lambda_s - \lambda_1)^{-1} B_h^1 (w_1, w_s), \quad s = 2, 3, \ldots$$

Постоянная q_1 определяется из условия нормировки (2.4) и не существенна для дальнейших выкладок.

Положим в третьем уравнении (2.2) $u = w_1 \in H$ и используем выражение коэффициентов разложения (2.6) и условия (2.4). Имеем

$$(2.7) \qquad \mu_2(h, \delta h) = B_h^2(w_1, w_1) - \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(B_h^1(w_1, w_s))^2}{\lambda_s - \lambda_1}$$

Перейдем к краевой задаче (1.7). Решение ее при $h + \varepsilon\delta h$ может быть представлено в виде ряда по собственным функциям спектральной задачи (1.7), поэтому справедливо представление

$$w(x, y) + \varepsilon z_1(x, y; \delta h) + \varepsilon^2 z_2(x, y; \delta h) + \varepsilon^3 \psi_\varepsilon(x, y; \delta h)$$

где $w(x, y)$ — решение задачи (1.7) при $h = h(x, y)$. Подставим это разложение в (1.7). Получим интегральные равенства для функций w, z_1, $z_2 \in H$ ($A_h^i = B_h^i$ при $\lambda_1 = 0$; формы B_h^i ($i = 1, 2$) определены в (2.3))

$$(2.8) \qquad A_h(w, u) = (q, u), \quad A_h(z_1, u) + A_h^1(w, u) = 0$$

$$A_h(z_2, u) + A_h^1(z_1, u) + A_h^2(w, u) = 0 \qquad \forall u \in H$$

Функционал задачи — потенциальная энергия деформации — задается формулой

$$(2.9) \qquad U(h) = (q, w) = (A(h)w, w)$$

поэтому первая поправка по ε к значению функционала (2.9) равна (q, z_1).

Полагая во втором уравнении (2.8) $u = w$, из первого равенства (2.8) имеем $A_h(z_1, w) = A_h(w, z_1) = (q, z_1) = -A_h^1(w, w)$. Отсюда

$$(2.10) \qquad \delta U(h) = -A_h^1(w, w)$$

Для вычисления второй поправки по ε положим в третьем равенстве (2.8) $u = w \in H$, тогда $A_h(z_2, w) = -A_h^1(z_1, w) - A_h^2(w, w)$. Полагая теперь во втором равенстве (2.8) $u = z_1 \in H$, имеем $A_h^1(w, z_1) = A_h^1(z_1, w) = -A_h(z_1, z_1)$. В итоге получим выражение для второй вариации функционала (2.9)

$$(2.11) \qquad \delta^2 U(h) = (z_2, q) = A_h(z_2, w) = A_h(z_1, z_1) - A_h^2(w, w)$$

Замечание. Полученные формулы для вариаций функционалов представляют слабые функциональные производные по Гато. В дальнейшем используется свойство сильной дифференцируемости функционалов по Фреше. Для традиционных задач вариационного исчисления эти производные, как правило, совпадают. Для случая функционала потенциальной энергии деформации совпадение этих производных следует из результатов [10, 11]. Для функционала простого собственного значения доказательство совпадения слабых и сильных производных основывается на свойстве непрерывной зависимости собственных функций и собственных значений от элементов $h \in Q$.

3. Необходимые условия экстремума. Введем функции $\sigma^2(x, y) = h_2 - h(x, y)$, $\tau^2(x, y) = h(x, y) - h_1$, рассматривая σ и τ как новые управления в задачах 1° и 2° п. 1.

Рассмотрим сначала случай спектральной задачи (1.7). Составим расширенный функционал Лагранжа

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad L(h,\sigma,\tau) = & -\lambda_1(h) + \varkappa_1(h,1) + \varkappa_2(\partial^2 h, \partial^2 h) + \\
& + \iint_D \theta_1(x,y)(h(x,y) - h_1 - \tau^2(x,y))\,dxdy + \iint_D \theta_2(x,y)(h_2 - \\
& - h(x,y) - \sigma^2(x,y))\,dxdy
\end{aligned}
$$

($\varkappa_1$, $\varkappa_2 = \text{const} \geqslant 0$, θ_1, θ_2 — элементы из пространства $W_2^{-2}(D)$, сопряженного к пространству $W_2^2(D)$ [13] (выражение $(\partial^2 h)^2$ определено в (1.8)). Необходимые условия экстремума заключаются в выполнении условий [18]

$$(3.2)\qquad \delta_h L = 0, \quad \delta_\sigma L = 0, \quad \delta_\tau L = 0$$

$$(3.3)\qquad \varkappa_1((h,1) - 1) = 0, \quad \varkappa_2((\partial^2 h, \partial^2 h) - C^2) = 0$$

Здесь $\delta_h L$, $\delta_\sigma L$, $\delta_\tau L$ — первые вариации функционала (3.11) по управлениям h, σ, τ.

Учитывая формулу (2.5), из (3.2) получим

$$
\begin{aligned}
(3.4)\qquad & \delta_h L = -\mu_1(h, \delta h) + \varkappa_1(\delta h, 1) + 2\varkappa_2(\partial^2 h, \partial^2\delta h) + \\
& + (\theta_1 - \theta_2, \delta h) = 0 \\
& (\partial^2 h, \partial^2 \delta h) = \iint_D (h_{xx}\delta h_{xx} + 2h_{xy}\delta h_{xy} + h_{yy}\delta h_{yy})\,dxdy \\
& \theta_1(x,y)\tau(x,y) = 0, \quad \theta_2(x,y)\sigma(x,y) = 0
\end{aligned}
$$

Здесь и далее индексы внизу означают вычисление соответствующих частных производных.

Пусть $\sigma(x,y) \neq 0$ и $\tau(x,y) \neq 0$, тогда $\theta_1(x,y) = \theta_2(x,y) = 0$, т. е. $h_1 < h(x,y) < h_2$.

Множество таких точек $(x,y) \in D$ обозначим D_0.

Если $\sigma(x,y) \neq 0$, $\tau(x,y) = 0$, то $\theta_2(x,y) = 0$ и $h(x,y) = h_1$.

Если $\sigma(x,y) = 0$, $\tau(x,y) \neq 0$, то $\theta_1(x,y) = 0$ и $h(x,y) = h_2$.

Множество таких точек $(x,y) \in D$ обозначим соответственно через $D_{\min}$ и $D_{\max}$.

Случай $\sigma(x,y) = \tau(x,y) = 0$ невозможен, поскольку $h_1 < h_2$. Применим формулу Грина ([19], с. 109) (Γ_0 — граница области D_0)

$$(\partial^2 h, \partial^2 \delta h) = (\delta h, \Delta\Delta h) + \int_{\Gamma_0} \Delta h \frac{\partial \delta h}{\partial n}\,ds - \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial}{\partial n}\Delta h\right)\delta h\,ds$$

($\Delta\Delta$ — бигармонический оператор). Пусть выполняются условия

$$(3.5)\qquad (\Delta h)_{\Gamma_0} = 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial n}\Delta h\right)_{\Gamma_0} = 0$$

что соответствует гладкому выходу распределений толщин $h(x,y)$, и верхнее и нижнее ограничения h_2 и h_1. С учетом (3.3), (3.5) и формулы (2.5) запишем необходимые условия в виде ($b_h^1 = a_h^1 - \lambda_1 w_1^2$, $a_h^1 = da_h/dh$, форма a_h определена в (1.6))

$$(3.6)\qquad -b_h^1(w_1, w_1) + \varkappa_1 + 2\varkappa_2\Delta\Delta h = \theta_2 - \theta_1$$

Равенство (3.6) вместе с условиями (3.5) представляет краевую задачу относительно функции $h(x,y)$, решение которой следует понимать в слабом смысле, т. е. как интегральное тождество (3.4), справедливое для любых функций $\delta h \in W_2^2(D)$.

Неположительность элементов $\theta_1(x,y)$ и $\theta_2(x,y)$ из $W_2^{-2}(D)$ вытекает из необходимого условия второго порядка, требующего неотрицательности вторых вариаций функционала (3.1) по σ и τ [18]. Тогда условия (3.6) могут быть записаны в виде

$$
\begin{aligned}
(3.7)\qquad & -b_h^1 + \varkappa_1 \geqslant 0, \quad (x, y) \in D_{\min}, \quad h = h_1 \\
& -b_h^1 + \varkappa_1 \leqslant 0, \quad (x, y) \in D_{\max}, \quad h = h_2 \\
& -b_h^1 + \varkappa_1 - 2\varkappa_2 \Delta\Delta h = 0, \quad (x, y) \in D, \quad h_1 < h(x, y) < h_2 \\
& b_h^1 (w_1, w_1) = a_h^1 (w_1, w_1) - \lambda_1 w_1^2
\end{aligned}
$$

где функция h на границе области D_0 удовлетворяет условиям (3.5).

Аналогичные условия можно записать и в случае задачи на минимум потенциальной энергии. Они имеют вид (3.7) при замене $b_h^1(w_1, w_1)$ на $a_h^1(w_1, w_1)$.

Замечание. Условия (3.7) получены при предположениях регулярности поставленной экстремальной задачи [18]. Если условие регулярности не выполнено, то либо $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, либо $\varkappa_1 = 0$ $h(x, y) = \text{const}$.

4. Достаточные условия экстремума. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть при $h = h(x, y) \in Q$ в задаче максимизации первой собственной частоты выполняются необходимые условия экстремума (3.7), (3.3), причем первые два неравенства в (3.7) выполнены как строгие неравенства. Тогда функция $h(x, y)$ доставляет слабый локальный максимум поставленной задаче, если постоянная C в интегральном ограничении (1.8) удовлетворяет оценке $C^2 < h_1^2 (h_2 - h_1)/2\gamma$ на классе вариаций, удовлетворяющих условию $(\partial^2\delta h, \partial^2\delta h) < \infty$, где γ — постоянная, зависящая лишь от геометрии области D.

Доказательство. Достаточные условия слабого локального максимума [18] заключаются в положительной определенности вторых вариаций функционала (3.1) на вариациях δh, для которых выполняется (выражение $(\partial^2 h, \partial^2\delta h)$) определено в (3.4))

$$
(4.1)\qquad (\delta h, 1) = 0, \quad (\partial^2 h, \partial^2\delta h) = 0, \quad (\theta_1 - \theta_2, \delta h) = 0
$$

Из положительной определенности вторых вариаций по σ и τ имеем: $\theta_1(x, y) > 0$, $\theta_2(x, y) > 0$. Поэтому на оптимальном решении $h(x, y)$ неравенства (3.7) выполняются в виде строгих, а из (3.4) следует, что $h(x, y) = h_1$ на $D_{\min}$ и $h(x, y) = h_2$ на $D_{\max}$. Следовательно, проверку положительной определенности второй вариации по h достаточно производить лишь на вариациях $\delta h_0 \in W_2^2(D)$, которые обращаются в нуль на множестве $D_{\min} \cup D_{\max}$. Отсюда следует [13], что $\delta h_0 = (\delta h_0)_x = (\delta h_0)_y = 0$ на границе областей D_0 и $D_{\min}$, $D_{\max}$. Используем формулу (2.7), замечая, что второй член в (2.7), взятый со знаком минус, будет неотрицателен, поскольку $\lambda_s > \lambda_1$, $s = 2, 3, \ldots$. Имеем

$$
(4{,}2)\qquad \delta_h^2 L \geqslant -B_h^2(w_1, w_1) + \varkappa_2 \iint\limits_D (\partial^2\delta h_0)^2\, dx\, dy
$$

Справедлива оценка (далее максимум берется по области D_0 $a_h^2 = d^2 a_h/dh^2$)

$$
B_h^2(w_1, w_1) = (a_h^2(w_1, w_1), \delta h_0^2) \leqslant \max |\delta h_0|^2 \iint\limits_D a_h^2(w_1, w_1)\, dx\, dy \leqslant
$$

$$
(4.3)\qquad \leqslant 6 h_1^{-2} \max |\delta h_0|^2 \iint\limits_D a_h(w_1, w_1)\, dx\, dy = 3\lambda_1 h_1^{-2} \max |\delta h_0|^2
$$

Здесь использовано неравенство $h/h_1 \geqslant 1$ и соотношение $a_h(w_1, w_1) h^{-2} = a_h^2(w_1, w_1)/6$, вытекающее из определения форм a_h и a_h^2 в (1.6), а также равенство $A_h(w_1, w_1) = \lambda_1$, следующее из (1.7).

Из теоремы вложения Соболева [13] следует оценка ($\| \delta h_0 \|_2$ — норма элемента δh в пространстве $W_2^2(D)$)

$$
\max |\delta h_0|^2 \leqslant \gamma_1 \| \delta h_0 \|_2^2
$$

с фиксированной постоянной γ_1, зависящей лишь от геометрии области D_0.

Используя неравенства Фридрихса и Пуанкаре [12] и условия (4.1), можно доказать, что справедлива оценка

$$\max |\delta h_0|^2 \leqslant \gamma \iint_D (\partial^2 \delta h_0)^2 \, dx \, dy, \qquad \gamma = \text{const} > 0$$

Из (4.2) и (4.3) с помощью последнего неравенства имеем

$$\delta_h^2 L \geqslant (\varkappa_2 - 3\gamma h_1^{-2} \lambda_1) \iint_D (\partial^2 \delta h_0)^2 \, dx \, dy$$

Для положительной определенности этого выражения необходимо, чтобы

$$\varkappa_2 > 3\gamma \lambda_1 h_2^{-2} \tag{4.4}$$

Из (4.5) получим оценку сверху для значений постоянной C в ограничении (1.8). Для этого проинтегрируем последнее уравнение в (3.7) по области D_0, учитывая (3.5). Имеем (S_0 — мера множества D_0);

$$S_0 \varkappa_1 = \iint_{D_0} b_h^1 (w_1, w_1) \, dx \, dy$$

Умножим равенство (3.7) на h и проинтегрируем его по области D_0 с учетом (3.5). Получим

$$2\varkappa_2 \iint_{D_0} (\partial^2 h)^2 \, dx \, dy = \iint_{D_0} h b_h^1 (w_1, w_1) \, dx \, dy - \varkappa_1 \iint_{D_0} h \, dx \, dy \tag{4.5}$$

Если $\varkappa_2 > 0$, то из (3.3) следует

$$\iint_{D_0} (\partial^2 h)^2 \, dx \, dy = C^2 \tag{4.6}$$

С другой стороны, справедливо неравенство $h/h_2 \leqslant 1$ и поэтому

$$\varkappa_1 S_0 \geqslant h_2^{-1} \iint_{D_0} h b_h^1 (w_1, w_1) \, dx \, dy$$

Из (4.5), (4.6) и оценки (4.4) имеем

$$C^2 \leqslant \frac{h_2^2}{6\gamma\lambda_1} \iint_D h b_h^1 (w_1, w_1) \, dx \, dy \left(1 - S_0^{-1} h_2^{-1} \iint_{D_0} h \, dx \, dy\right)$$

Из определения формы $b_h^1 (w_1, w_1)$ в (3.7) получим

$$b_h^1 (w_1, w_1) = a_h^1 (w_1, w_1) - \lambda_1 w_1^2 \leqslant a_h^1 (w_1, w_1)$$

Воспользуемся равенствами (1.6) и (2.3), определяющими формы a_h и a_h^1. Тогда $h a_h^1 (w_1, w_1) = 3 a_h (w_1, w_1)$ и

$$\iint_{D_0} h b_h^1 (w_1, w_1) \, dx \, dy \leqslant 3 \iint_D a_h (w_1, w_1) \, dx \, dy = 3\lambda_1$$

Наконец, воспользуемся оценкой

$$S_0^{-1} \iint_{D_0} h \, dx \geqslant h_1$$

В итоге имеем оценку, указанную в теореме 1.

Теорема 2. Пусть при $h(x, y) \in Q$ в задаче минимизации функционала (2.9) выполняются необходимые условия экстремума (3.7), (3.3) с $-b_h^1 (w_1, w_1) = a_h^1 (w_1, w_1)$. Причем неравенства в (3.7) выполнены как строгие. Тогда функция $h(x, y)$ доставляет слабый локальный минимум поставленной задаче, если постоянная C в ограничении (1.8) удовлетворяет оценке, приведенной в условии теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Полученные результаты гарантируют существование слабого экстремума в рассмотренных задачах, если постоянная C в (1.8) достаточно мала, т. е. если кривизна поверхности $h = h(x, y)$ изменяется достаточно плавно. Они позволяют объяснить расходимость процесса оптимизации при больших отношениях h_2/h_1 [8]. В этом случае может нарушаться накладываемое в теоремах 1, 2 условие на максимальный рост производных от распределений толщин, удовлетворяющих необходимому условию экстремума, и в стационарных точках нельзя гарантировать оптимум.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В., Картвелишвили В. М., Миронов А. А.* Численное решение двумерных задач оптимизации упругих пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 68—78.
2. *Баничук Н. В., Картвелишвили В. М., Миронов А. А.* Задачи оптимизации с локальными критериями качества в теории изгиба пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1, с. 124—131.
3. *Haug E.* Optimal design of elastic structures for maximum stiffness.— Intern. J. Solids and Structures, 1968, v. 4, No. 7, p. 689—700.
4. *Гура Н. М., Сейранян А. П.* Оптимальная круглая пластинка при ограничениях по жесткости и частоте собственных колебаний.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 138—145.
5. *Прагер В.* Основы теории оптимального проектирования конструкций. М.: Мир, 1977. 109 с.
6. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
7. *Троицкий В. А., Петухов Л. В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
8. *Ольхофф Н.* Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981. 277 с.
9. *Лурье К. А., Черкаев А. В.* О применении теоремы Прагера к задаче оптимального проектирования тонких пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6, с. 157—159.
10. *Литвинов В. Г.* Задача оптимального управления собственной частой пластины переменной толщины.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 4, с. 866—877.
11. *Литвинов В. Г.* Оптимальное управление коэффициентами в эллиптических системах.— Дифференц. уравнения, 1982, № 6, с. 1036—1047.
12. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
13. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
14. *Kohn R. V., Vogelius M.* A new model for thin plates with rapidly varying thickness.— I. Proc. University of Maryland, 1982, August, No. 988.
15. *Самсонов А. М.* Оптимальное положение упругого тонкого ребра на упругой пластине.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1, с. 132—138.
16. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.— Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. 525 с.
17. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
18. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
19. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.IX.1984