Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 4, 1985

УДК 539.393

НЕКОТОРЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Боган Ю. А.

Для смешанной задачи теории упругости о деформации трансверсально-изотропного цилиндра при выборе специфического малого параметра доказывается, что уравнения нулевого приближения совпадают с уравнениями изгиба упругой изотропной пластины, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява [1]. Рассматриваются некоторые сингулярно возмущенные контактные задачи типа Синьорини.

1. Рассмотрим упругий трансверсально-изотропный цилиндр $Q = \omega\cdot(-h/2,\ h/2)$, где ω — ограниченная область на плоскости $(x_1,\ x_2)$ с достаточно гладкой границей γ. Малый параметр ε выберем следующим образом: $\varepsilon = \sqrt{E/E'}$, где E — модуль Юнга материала в плоскости изотропии материала $x_3 \equiv \text{const}$, E' — модуль Юнга в ортогональном направлении. В реальной физической ситуации параметр ε мал для упругого цилиндра, армированного в направлении вертикальной оси семейством борных или углеродных волокон, осевой модуль Юнга которых значительно выше модуля Юнга в окружном направлении.

Разделим напряжения на модуль Юнга E, сохраним для этих безразмерных напряжений прежние обозначения и согласно закону Гука выразим напряжения через деформации

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = a_{11}e_{11} + a_{12}e_{22} + a_{13}e_{33}, \quad \sigma_{12} = 2\,(1+\nu)^{-1}e_{12}\\
&\sigma_{22} = a_{12}e_{11} + a_{11}e_{22} + a_{13}e_{33}, \quad \sigma_{13} = 2b\varepsilon^{-2}e_{13}\\
&\sigma_{33} = a_{13}\,(e_{11} + e_{22}) + a_{33}\varepsilon^{-2}e_{33}, \quad \sigma_{23} = 2b\varepsilon^{-2}e_{23}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&a_{11} = (1-\mu^2\varepsilon^2)(1+\nu)^{-1}a_0^{-1}, \quad a_{12} = (\nu+\mu^2\varepsilon^2)(1+\nu)^{-1}a_0^{-1}\\
&a_{13} = \mu a_0^{-1}, \quad a_{33} = (1-\nu)\,a_0^{-1}, \quad a_0 = 1-\nu-2\mu^2\varepsilon^2\\
&e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

(по повторяющимся индексам суммирование от 1 до 3), $b = E'/G'$ — отношение модуля Юнга E' к модулю сдвига G' в направлении, ортогональном плоскости изотропии, ν — коэффициент Пуассона в плоскости изотропии, μ — побочный коэффициент Пуассона. Положительность потенциальной энергии деформации приводит к ограничениям $0 < \nu < 1$, $a_0 > 0$, $b > 0$.

Рассмотрим для системы уравнений теории упругости смешанную краевую задачу

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad f_i \in L_2(G), \quad i = 1, 2, 3\\
&\sigma_{i3}\,|_{x_3=\pm h/2} = 0, \quad u_i\,|_{\gamma\cdot(-h/2,\ h/2)} = 0
\end{aligned} \tag{1.2}$$

В дальнейшем, чтобы явно отметить зависимость решения задачи (1.2) от параметра ε, будем отмечать напряжения и перемещения индексом ε, обозначив при этом через σ_{ij}°, u_i° напряжения и перемещения в предельной задаче. Введем гильбертово пространство со стандартной нормой

$$V=\{u; u=(u_1, u_2, u_3), u_k \in H^1(Q), u_k|_{\gamma\times(-h/2,\, h/2)}=0, \quad k=1, 2, 3\}$$

$$\| u \|_V = \left\{ \int_Q (u_{i,k} u_{i,k} + u^2)\, dx \right\}^{1/2}$$

Обобщенное решение задачи (1.2) определяется стандартным образом [2] как функция $u^\varepsilon \in V$, такая, что для любой функции $v \in V$ выполняется интегральное тождество

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = L(v); \quad L(v) = \int_Q f_k v_k dx_1 dx_2 dx_3 \tag{1.3}$$

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \frac{1}{2}\int_Q \sigma_{ij}(u^\varepsilon) e_{ij}(v)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

Изучим вопрос о предельном поведении при $\varepsilon \to +0$ решения вариационной задачи (1.3).

Лемма 1. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c > 0$, не зависящая от ε, такая, что

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geqslant c \| u^\varepsilon \|_V^2 \tag{1.4}$$

Для доказательства оценим наименьшее собственное значение матрицы упругих постоянных при e_{11}, e_{22}, e_{33} в формулах (1.1) в зависимости от ε. Известно, что у симметричной положительно-определенной матрицы все собственные значения положительны; собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 этой матрицы имеют следующие порядки:

$$\lambda_1 = (1+\nu)^{-1}, \quad \lambda_2 \sim a_0^{-1}, \quad \lambda_3 \sim (1-\nu)\, \varepsilon^{-2} a_0^{-1}$$

Очевидно, λ_2, $\lambda_3 > \lambda_1$; пусть $\varepsilon < \varepsilon_0 = 2^{-1/2}(1-\nu)^{1/2} \mu^{-1}$. Тогда

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geqslant c_0 \int_Q e_{ij}(u^\varepsilon)\, e_{ij}(u^\varepsilon)\, dx_1 dx_2 dx_3 \geqslant c \| u^\varepsilon \|_V^2, \tag{1.5}$$

$$c_0 = \min\left(\lambda_{1/2}, \frac{1+\nu}{2}, b\varepsilon_0^{-2}\right)$$

Справедливость второго неравенства в (1.5) следует из справедливости в V второго неравенства Корна [2].

Лемма 2. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует единственное решение задачи (1.3), причем имеют место равномерные по ε оценки

$$\| u^\varepsilon \|_V \leqslant c_1, \quad \| \sigma_{ij}(u^\varepsilon) \|_{L_2} \leqslant c_2, \quad i, j = 1, 2 \tag{1.6}$$

$$\varepsilon^{-2} \| e_{i3}(u^\varepsilon) \|_{L_2}^2 \leqslant c_3, \quad i = 1, 2, 3$$

Действительно, правая часть равенства (1.3) — непрерывный линейный функционал на V, причем в силу теорем вложения $| L(u^\varepsilon) | \leqslant c_4 \| u^\varepsilon \|_V$. Но из (1.5) $a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geqslant c \| u^\varepsilon \|_V^2$, и потому $\| u^\varepsilon \|_V \leqslant c_1$. Квадратичная форма $a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon)$ ввиду положительной определенности представляется как сумма квадратов линейных форм от деформаций; так как правая часть равенства (1.3) оценена не зависящей от ε постоянной, получаем остальные оценки в (1.6).

Из леммы 2 следует, что из последовательности u^ε можно извлечь подпоследовательность (для которой сохраним прежнее обозначение), такую, что u^ε слабо сходится к некоторому элементу $u^\circ \in V$, $\sigma_{ij}(u^\varepsilon)$ слабо сходятся к $\sigma_{ij}(u^\circ)$ в V $(i, j = 1, 2)$, $e_{i3}(u^\varepsilon) \to 0$ сильно в $L_2(Q)$, $i = 1, 2, 3$.

Лемма 3. Функции u_1°, u_2°, u_3° представимы в виде

$$u_3^\circ = u_3^\circ(x_1, x_2), \quad u_3^\circ \in H_0^2(\omega) \tag{1.7}$$

$$u_k^\circ(x_1, x_2, x_3) = g_k(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_k}(x_1, x_2) \tag{1.8}$$

$$g_k(x_1, x_2) \in H_0^1(\omega), \quad k = 1, 2$$

Действительно, из $\| u^{\varepsilon}_{3, x_3} \| \leqslant c\varepsilon$ следует, что $\partial u_3^{\circ}/\partial x_3 = 0$, и поэтому u_3° не зависит от x_3. Далее, $\| u^{\varepsilon}_{3, x_k} + u^{\varepsilon}_{k, x_3} \|_{L_2} \leqslant c\varepsilon$, $k = 1, 2$, следовательно, $\overset{\circ}{u}_{k, x_3} = -\overset{\circ}{u}_{3, x_k}$ и, если обозначить через $g_k (x_1, x_2)$ след функции u_k° на плоскости $\{(x_1, x_2) \in \omega, x_3 = 0\}$, получим (1.8). В левой части второго равенства стоит функция, принадлежащая $H^1 (Q)$ и равная нулю на боковой поверхности, поэтому $u_3^{\circ} \in H_0^2 (\omega)$ и $g_k \in H_0^1 (\omega)$, $k = 1, 2$.

Обозначим через V_{KL} замкнутое подпространство V, выделяемое условиями $e_{k3} (v) = 0$, $k = 1, 2, 3$. Известно [3], что V_{KL} изоморфно $[H_0^1 (\omega)]^2 \times H_0^2 (\omega)$. Рассмотрим интегральное тождество (1.3) на функциях $v \in V_{KL}$. Переходя к пределу по уже выбранной подпоследовательности и выполняя интегрирование по x_3, получим интегральное тождество

$$
\begin{aligned}
(1.9)\qquad & \frac{h}{1-\nu^2} \int_{\omega} [(\varepsilon_{11} (g) + \nu\varepsilon_{22} (g))\, \varepsilon_{11} (\psi) + (\nu\varepsilon_{11} (g) + \\
& + \varepsilon_{22} (g))\, \varepsilon_{22} (\psi) + 4 (1 - \nu)\, \varepsilon_{12} (g)\, \varepsilon_{12} (\psi)]\, dx_1 dx_2 + \\
& + \frac{h^3}{12 (1-\nu^2)} \int_{\omega} [(\delta_{11} (u_3^{\circ}) + \nu\delta_{22} (u_3^{\circ})\, \delta_{11} (\psi_3) + (\nu\delta_{11} (u_3^{\circ}) + \\
& + \delta_{22} (u_3^{\circ}))\, \delta_{22} (\psi_3) + 4 (1 - \nu)\, \delta_{12} (u_3^{\circ})\, \delta_{12} (\psi_3)]\, dx_1 dx_2 = \\
& = h \int_{\omega} \sum_{k=1}^{2} \langle f_k \rangle\, \psi_k dx_1 dx_2 + \int_{\omega} \sum_{k=1}^{2} \langle g_k \rangle \frac{\partial \psi_3}{\partial x_k}\, dx_1 dx_2 \\
& \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in [H_0^1 (\omega)]^2 \times H_0^2 (\omega) \\
& \varepsilon_{ij} (g) = \frac{1}{2} (g_{i,j} + g_{j,i}),\ \varepsilon_{ij} (\psi) = \frac{1}{2} (\psi_{i,j} + \psi_{j,i}), \quad i, j = 1, 2 \\
& \delta_{11} (\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}, \quad \delta_{22} (\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}, \quad \delta_{12} (\psi) = 2\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \\
& g_k = x_3 f_k, \quad k = 1, 2
\end{aligned}
$$

($\langle f_k \rangle$, $\langle g_k \rangle$ — средние по толщине пластины). Существование и единственность решения предельной задачи хорошо известны [3, 4]. Отсюда следует, что и вся исходная последовательность u^{ε} слабо сходится к u°, т. е. справедлива

Теорема 1. Решение задачи (1.3) слабо сходится к решению предельной задачи (1.9).

Вариационная задача (1.9) с точностью до коэффициентов соответствует задаче сжатия—растяжения и изгиба тонкой изотропной плиты. Необходимо, однако, отметить, что малость нормальных напряжений здесь доказать не удается.

Теорема 2. При $\varepsilon \to +0$ последовательность u^{ε} сходится к u° сильно в V.

Действительно, имеем

$$
\begin{aligned}
(1.10)\qquad & a^{\varepsilon} (u^{\varepsilon} - u^{\circ}, u^{\varepsilon} - u^{\circ}) = L (u^{\varepsilon} - u^{\circ}) - a_1^{\varepsilon} (u^{\circ}, u^{\varepsilon} - u^{\circ}) \\
& L (u^{\varepsilon} - u^{\circ}) = \int_Q f_k (u_k^{\varepsilon} - u_k^{\circ})\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \\
& a_1^{\varepsilon} (u^{\circ}, u^{\varepsilon} - u^{\circ}) = \frac{1}{2} \int_Q \Big[(a_{11} e_{11} (u^{\circ}) + a_{12} e_{22} (u^{\circ})\, e_{11} (u^{\varepsilon} - u^{\circ}) + \\
& + (a_{12} e_{11} (u^{\circ}) + a_{11} e_{22} (u^{\circ})\, e_{22} (u^{\varepsilon} - u^{\circ}) + \\
& + \frac{4}{1+\nu}\, e_{12} (u^{\varepsilon} - u^{\circ})\, e_{12} (u^{\circ})]\, dx_1\, dx_2\, dx_3
\end{aligned}
$$

Так как u^{ε} слабо сходится в V к u°, то по теореме вложения Реллиха u^{ε} сходится к u° сильно в $[L_2 (Q)]^3$, и поэтому $L (u^{\varepsilon} - u^{\circ}) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$; из слабой сходимости в $[L_2 (Q)]^3 e_{ij} (u^{\varepsilon})$ к $e_{ij} (u^{\circ}) (i, j = 1, 2)$

следует, что $a_1^\varepsilon(u^\circ, u^\varepsilon - u^\circ) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. С другой стороны

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - u^\circ, u^\varepsilon - u^\circ) \geqslant c\,\| u^\varepsilon - u^\circ \|_V^2$$

и из сходимости к нулю правой части равенства (1.10) следует сходимость к нулю левой; поэтому $\| u^\varepsilon - u^\circ \|_V \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.

2. Можно изучить и некоторые сингулярно возмущенные неравенства. Рассмотрим в качестве примера следующую задачу Синьорини. Пусть K — замкнутый выпуклый конус в $W = \{u = (u_1, u_2, u_3), u_k = 0$ на $\gamma \cdot (-h/2, h/2), u_k \in H^1(Q), k = 1, 2, 3\}$, определяемый условием $u_3 \leqslant 0$ на нижнем основании Γ_0 цилиндра. Рассмотрим асимптотическое поведение при $\varepsilon \to +0$ решения неравенства

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v - u^\varepsilon) \geqslant (f, v - u^\varepsilon) \quad \forall v \in K, \quad f_1 = f_2 = 0 \tag{2.1}$$

Свяжем с неравенством (2.1) задачу со штрафом

$$a^\varepsilon(u^{\varepsilon,\eta}, v) + \frac{1}{\eta}\int\limits_{\Gamma_0} [u_3^{\varepsilon,\eta}]^+ v_3\, dx_1\, dx_2 = (f, v), \quad \eta > 0 \tag{2.2}$$

Изучим поведение нелинейной задачи (2.2) при $\varepsilon \to +0$. Оценки (1.6) в этом случае сохраняются, поэтому из последовательности $u^{\varepsilon,\eta}$ можно выделить подпоследовательность $u^{\varepsilon_n,\eta}$, такую, что $u^{\varepsilon_n,\eta} \to u^{0,\eta}$ слабо в W и сильно в $[L_2(Q)]^3$, $e_{i3}(u^{\varepsilon,\eta}) \to 0$ $(i = 1, 2, 3)$ сильно в $L_2(Q)$ и предельные функции $u^{0,\eta}$ имеют вид (1.7) и (1.8). При этом семейство следов функций $u^{\varepsilon,\eta}$ сильно компактно в $L_2(\Gamma)$, Γ — граница Q. Так как $f_1 = f_2 = 0$, $g_1(x) = g_2(x) = 0$, единственной отличной от нуля является функция $u_3^{0,\eta} \in H_0^2(\omega)$.

Рассмотрим интегральное тождество (2.2) на подпространстве V_{KL}, перейдем к пределу при $\varepsilon \to +0$ и проинтегрируем по высоте. В результате получим, что $u_3^{0,\eta}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$b(u_3^{\circ,\eta}, v_3) + \frac{1}{\eta}\int\limits_\omega [u_3^{\circ,\eta}]^+ v_3\, dx_1\, dx_2 = h\int\limits_\omega \langle f_3\rangle\, dx_1\, dx_2 \tag{2.3}$$

где $b(u, \psi)$ — билинейная форма, стоящая второй в левой части формулы (1.9). Задача (2.3) — в точности задача со штрафом о контакте пластины с жестким недеформируемым основанием.

Существование единственного решения задачи (2.3) хорошо известно. Поэтому и вся последовательность $u^{\varepsilon,\eta}$ сходится к $u^{0,\eta}$. Переходя в (2.3) к пределу при $\eta \to +0$, получим, что $u_3^{0,0}$ удовлетворяет вариационному неравенству

$$b(u_3^{\circ,\circ}, v_3 - u_2^{\circ,\circ}) \geqslant (g_3, v_3 - u_3^{\circ,\circ}), \quad \forall v_3 \in K \cap V_{KL} \tag{2.4}$$

Переход к пределу при $\eta \to +0$ обосновывается известными способами.

Следовательно, справедлива

Теорема 3. При $\varepsilon \to +0$ решение вариационного неравенства (2.1) слабо сходится к решению вариационного неравенства (2.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
3. *Destuinder Ph.* Comparaison entre les modeles tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en élasticité.— RAIRO Anal. Numer., 1981, v. 15, No. 4, p. 331—369.
4. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 5, с. 914—924.

Новосибирск

Поступила в редакцию 24.IV.1984