

УДК 539.3 + 539.375

## КОНФИГУРАЦИОННЫЕ СИЛЫ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Черепанов Г. П.

Конфигурационная сила [1—3], возникающая в деформируемом твердом теле всякий раз, когда источник напряжений движется, физически представляет собой вклад внешнего поля деформаций и напряжений в диссипацию энергии, приходящуюся на единицу длины пути источника. Когда источник напряжений (сингулярность) является внутренним, конфигурационная сила служит основным параметром, контролирующим процесс движения, и можно ее называть движущей. Таковы случаи линейных сингулярностей типа контура трещин и дислокаций, точечных сингулярностей типа малых полостей и включений и др. Если сингулярность порождена непосредственно внешними силами, конфигурационная сила играет вспомогательную роль — такие случаи будут рассмотрены ниже. Это — задача о движении малого твердого тела по поверхности полупространства и разные схемы движения клина в безграничном упруго-пластическом пространстве.

**1. Движение малого твердого тела по поверхности полупространства.** Пусть сосредоточенная сила  $(T, 0, -N)$  движется с постоянной скоростью  $V$  по поверхности твердого полупространства  $z < 0$  (фиг. 1), которое растягивается напряжением  $\sigma_x^\infty$ ; поверхность его считается свободной от внешних нагрузок, за исключением движущегося со скоростью  $V$  начала координат точки  $O$ . Так как поле квазистатических напряжений и деформаций в твердом теле стационарно в системе координат  $Oxyz$ , для любых материалов при любых конечных деформациях имеет место следующее равенство [1—3]:

$$(1.1) \quad \Gamma = \int_{\Sigma} (Un_x - \sigma_{ij}n_j u_{i,x}) d\Sigma \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Здесь  $\Gamma$  — конфигурационный поток диссипации энергии твердого тела в начало координат,  $\Sigma$  — произвольная поверхность в нижнем полупространстве, охватывающая начало координат (контур края  $\Sigma$  лежит на границе  $z = 0$ ),  $\sigma_{ij}$  и  $u_i$  — компоненты напряжения и перемещения соответственно,  $n_i$  — составляющие орта внешней нормали к поверхности  $\Sigma$  ( $n_x = n_1$ ,  $u_{i,x} = u_{i,1}$ ),  $U$  — энергия деформаций в единице объема.

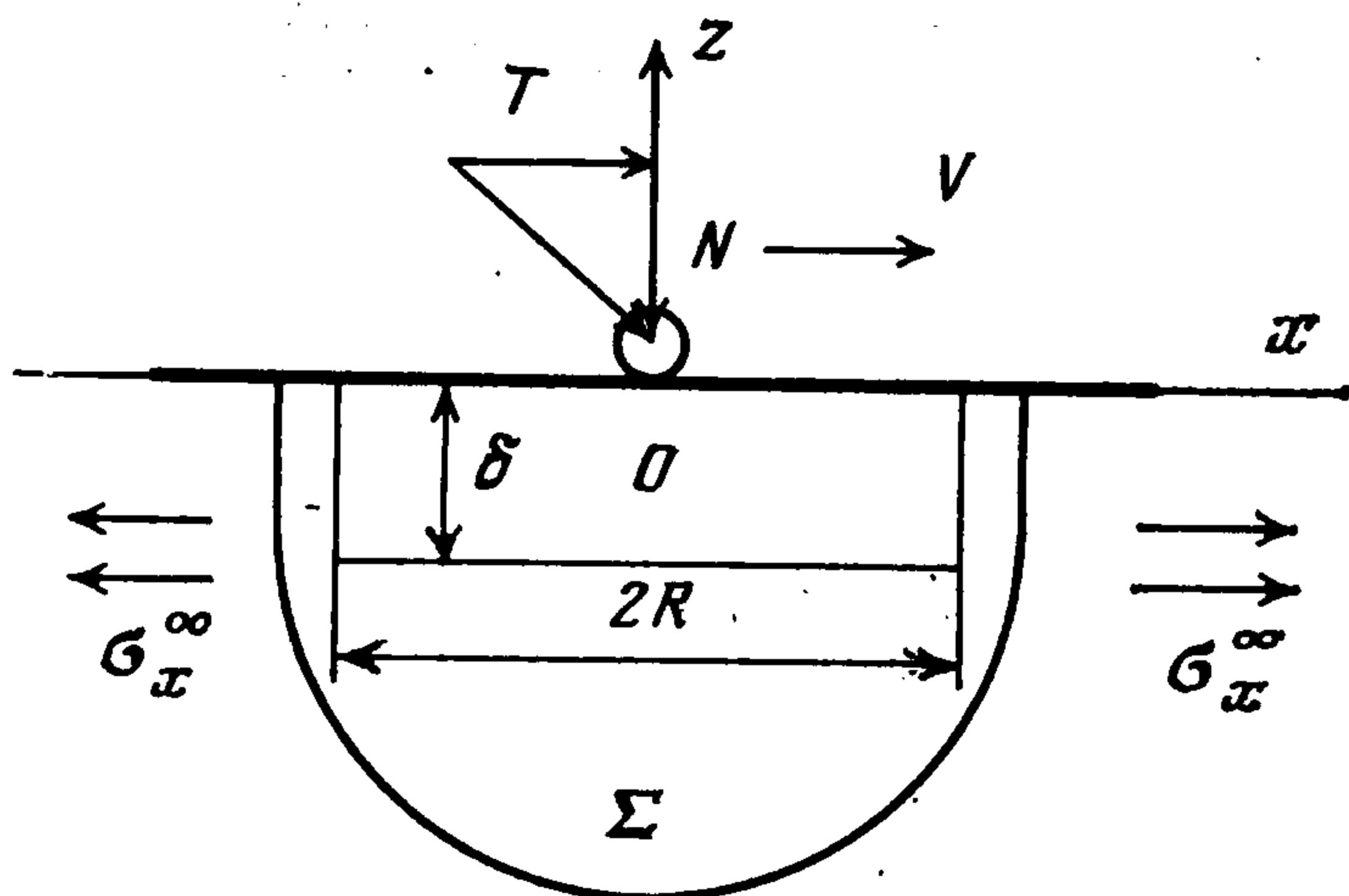
Вычисляя  $\Gamma$  по поверхности параллелепипеда  $|x_i| \leq R$  ( $i = 1, 2$ ),  $0 < x_3 < \delta$  при  $\delta \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow \infty$ ,  $\delta/R \rightarrow 0$ , получаем конфигурационную силу [1—3]

$$(1.2) \quad \Gamma = Tu_{x,x}^\infty$$

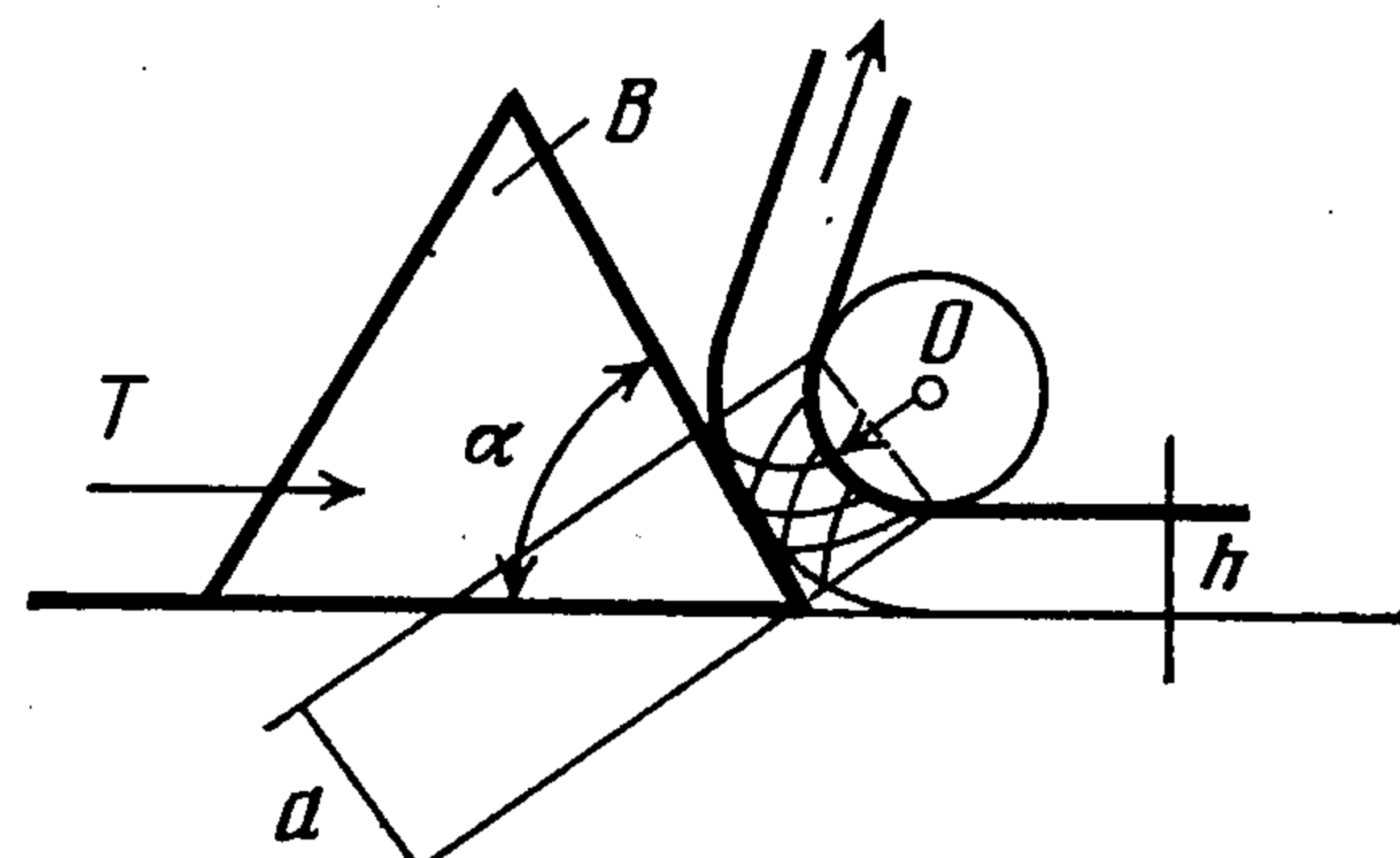
(величина  $u_{x,x}^\infty$  — функция  $\sigma_x^\infty$  и времени  $t$ , определяемая реологическим уравнением состояния).

Действительно, при  $\delta/R \rightarrow 0$  вклад в  $\Gamma$  от малых сторон прямоугольника будет бесконечно мал, а на большой стороне имеем  $n_x = n_y = 0$ ,  $n_z = -1$  (фиг. 1). Поэтому, согласно (1.1), будет (ниже интегрирование ведется в пределах от  $-R$  до  $+R$ )

$$\Gamma = \lim_{R \rightarrow \infty, \delta/R \rightarrow 0} \iint (\sigma_{xz}u_{x,x} + \sigma_{yz}u_{y,x} + \sigma_{zz}u_{z,x})|_{z=-\delta} dx dy$$



Фиг. 1.



Фиг. 2

По правилу Г-интегрирования [2, 3] имеем

$$\Gamma = \lim_{R \rightarrow \infty, \delta/R \rightarrow 0} \iint (\sigma_{xz}^s u_{x,x}^\infty + \sigma_{xz}^\infty u_{x,x}^s + \sigma_{yz}^s u_{y,x}^\infty + \sigma_{yz}^\infty u_{y,x}^s + \sigma_{zz}^s u_{z,x}^\infty + \sigma_{zz}^\infty u_{z,x}^s) |_{z=-\delta} dx dy$$

Индексы  $s$  и  $\infty$  относятся к собственному полю сингулярности и к невозмущенному полю соответственно.

Вследствие граничных условий

$$u_{y,x}^\infty = u_{z,x}^\infty = 0, \quad \sigma_{xz}^\infty = \sigma_{yz}^\infty = \sigma_{zz}^\infty = 0, \quad \iint \sigma_{xz}^s dx dy = T$$

Отсюда получаем формулу (1.2)

Полная диссипация энергии  $D$ , приходящаяся на единицу длины пути сосредоточенной силы, равна

$$(1.3) \quad D = T + T u_{x,x}^\infty = T (1 + u_{x,x}^\infty)$$

Пусть действие силы на полупространство передается через некоторое малое жесткое тело  $B$ ; тогда сила  $T$  будет равна сопротивлению, испытываемому телом  $B$ . (Одновременно величина  $T$  равна работе на единицу пути, совершаемой телом  $B$ . Подчеркнем, что соотношение (1.3) не есть уравнение сохранения энергии.)

При малых  $N$  и  $u_{x,x}^\infty = 0$  величина  $D = k + \mu_f N$ , где  $k$  и  $\mu_f$  — коэффициенты сцепления и трения соответственно (закон Кулона). Отсюда, согласно (1.3), получаем

$$1.4) \quad T = (k + \mu_f N) / (1 + u_{x,x}^\infty)$$

Это — обобщенный закон Кулона, учитывающий влияние деформации полупространства посторонними силами, которое может быть существенным для материалов, способных испытывать значительные деформации до разрушения (низкомодульные полимеры и композиты, некоторые полимеры и металлы при повышенных температурах). Формально, если пользоваться старой формулой Кулона, эффект конфигурационной силы приведет к уменьшению  $k$  и  $\mu_f$  при растяжении полупространства (и к увеличению  $k$  и  $\mu_f$  при сжатии).

При внедрении тела  $B$  в полупространство с существенными пластическими деформациями («пахание») естественно принять следующее допущение: диссипация энергии  $D$  прямо пропорциональна глубине внедрения  $h$ , т. е.  $D = \lambda h$ , где  $\lambda$  — некоторая постоянная системы, зависящая от скорости  $V$  и от формы индентора. Величина внедрения  $h$  как функция нормальной силы  $N$  определяется экспериментально для любого заданного индентора. Поэтому при пахании основную закономерность можно за

писать так:  $T = \lambda h(N)$ . При малых  $N$  и постоянной площадке контакта функция  $h(N)$  линейна. Этот предельный случай соответствует классическому закону Кулона.

В качестве примера пахания рассмотрим плоскую задачу о срезании стружки толщины  $h$  с идеального упругопластического полупространства; тело  $B$  — жесткий резец в форме угла  $\alpha$  (фиг. 2). Аппроксимируем окружностью радиуса  $r_0$  свободную поверхность стружки вблизи площадки контакта и будем считать всю стружку в окрестности этой площадки находящейся в пластическом состоянии. Поле напряжений в пластической области (и на площадке контакта) будет следующим [4]:

$$(1.5) \quad \sigma_r = -2\tau_s \ln \frac{r}{r_0}, \quad \sigma_\theta = -2\tau_s \ln \frac{r}{r_0} - 2\tau_s, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

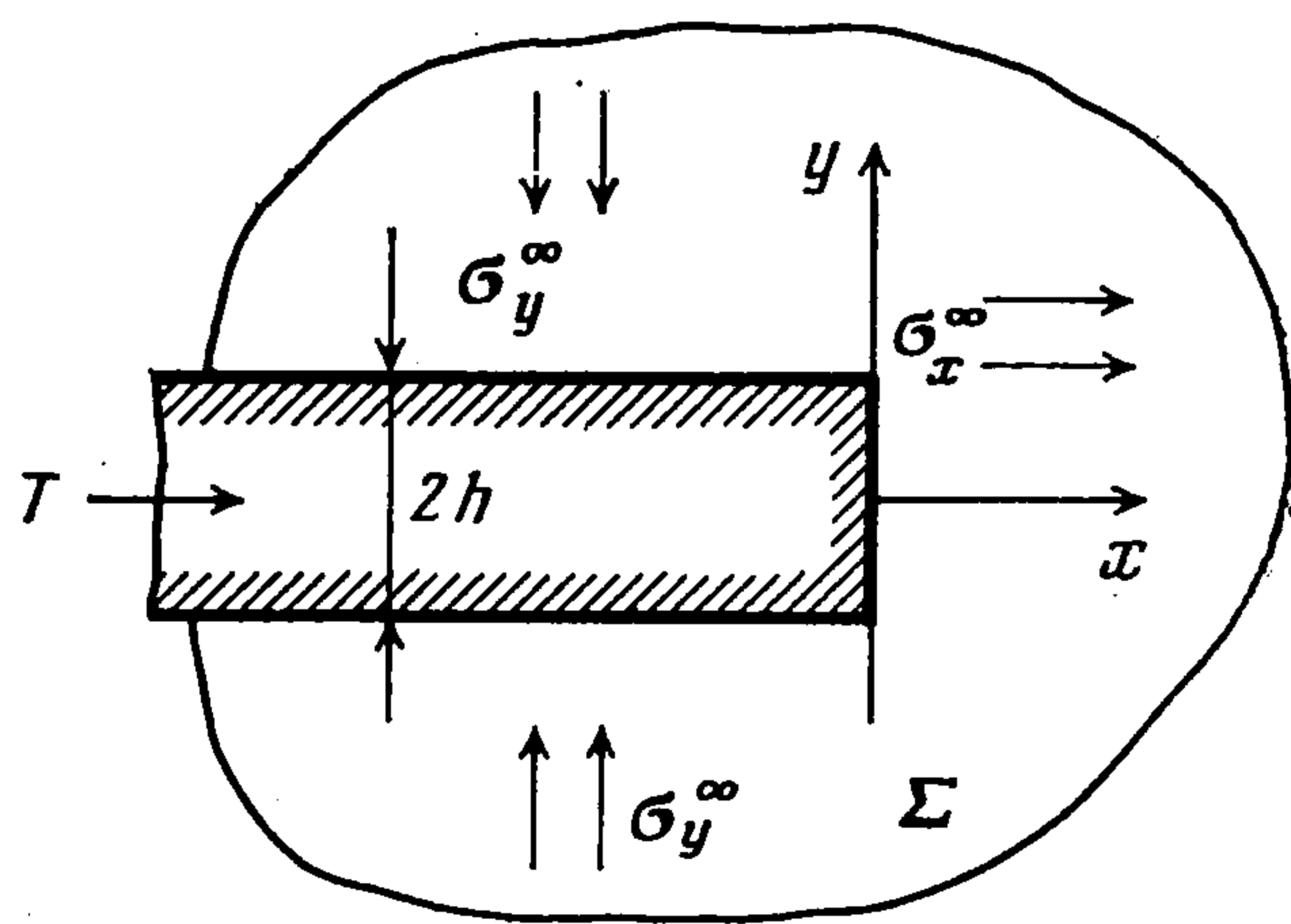
( $\tau_s$  — предел текучести на сдвиг,  $r, \theta$  — система полярных координат с центром  $O$  аппроксимирующей окружности). Будем считать приближенно, что на площадке контакта касательное напряжение равно нулю, а нормальное давление — напряжению  $\sigma_r$  в пластической области при  $r = r_0 + h$ . Отсюда получаем

$$(1.6) \quad T = 2a\tau_s \sin \alpha \ln(1 + h/r_0)$$

Длина площадки контакта  $a$  и радиус стружки  $r_0$  прямо пропорциональны  $h$ , причем коэффициенты пропорциональности могут зависеть только от  $\alpha, \tau_s/E$  и  $\nu$ , где  $\alpha$  — угол резца,  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона (на основании анализа размерностей). Так как при  $u_{x,x}^\infty = 0$  будет  $D = T$ , то приведенный пример подтверждает и поясняет допущение о том, что  $D \sim h$ .

Таким образом найдена следующая закономерность: сила сопротивления, действующая на резец со стороны материала, прямо пропорциональна глубине резания (толщине стружки), прочности материала на сдвиг и синусу угла наклона плоскости резца. Эту закономерность можно использовать для оптимального проектирования зубцов на буровом долоте (например, для выбора оптимальной величины и наклона зубца в наиболее перспективной конструкции зубца «strataпах»).

**2. Резание упруго-пластического тела.** Пусть полубесконечный прямоугольный жесткий резец толщины  $2h$  движется с постоянной скоростью  $V$  в бесконечном пространстве из идеального упругопластического материала (плоская деформация, фиг. 3).



Фиг. 3

Пространство на бесконечности считается подверженным действию напряжений  $\sigma_x^\infty$  и  $\sigma_y^\infty$  ( $\sigma_y^\infty < 0, \tau_{xy}^\infty = 0$ ). Для простоты боковые стороны резца будем считать гладкими, т. е. касательное напряжение трения на его боковой поверхности равно нулю. (Скорость движения мала по сравнению со скоростью звука.)

Для рассматриваемого стационарного поля напряжений и деформаций имеет место равенство [1]

$$(2.1) \quad \int_{\Sigma} (Un_x - \sigma_{ij}n_j u_{i,x}) d\Sigma = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

Здесь  $\Sigma$  — замкнутый контур, состоящий из контура поверхности резца  $\Sigma_c$  и произвольной дуги  $\Sigma_\infty$ , охватывающей резец; движущаяся прямоугольная декартова система координат  $xu$  связана с резцом (ось  $x$  — ось симметрии задачи). Напомним, что уравнение (2.1), так же как и (1.1), справедливо для любой реологической модели тела.

Справедливы следующие равенства:

$$(2.2) \quad \int_{\Sigma_c} (Un_x - \sigma_{ij}n_j u_{i,x}) d\Sigma = D - T$$

$$(2.3) \quad \Gamma = \int_{\Sigma_\infty} (Un_x - \sigma_{ij}n_j u_{i,x}) d\Sigma = -Tu_{x,x}^\infty - 2h\sigma_y^\infty$$

где  $T$  — внешняя сила, приложенная к резцу в направлении оси  $x$ ,  $D$  — полная диссипация энергии, приходящаяся на единицу длины пути резца,  $\Gamma$  — конфигурационная сила (вклад внешнего поля в диссипацию  $D$ ).

На боковых гранях резца  $n_x = 0$ ,  $u_{y,x} = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$ , поэтому в (2.2) в качестве  $\Sigma_c$  можно рассматривать лишь лобовую поверхность резца. Величина  $U$  на лобовой поверхности в данном случае упругопластического тела равна энергии диссипации единицы объема (диссипативная функция), так как упругая составляющая ввиду конечности деформаций пренебрежимо мала. Поэтому первое слагаемое в левой части (2.2) дает  $D$ . Далее, на лобовой поверхности вследствие равенства нормальных составляющих скорости имеем  $V = \partial u_x (x_{10} - Vt)/\partial t = -V\partial u_x/\partial x$  (где  $x_{10} = x + Vt$  — координата, связанная с неподвижным пространством на бесконечности), т. е.  $u_{x,x} = -1$ . Кроме того, величина  $\tau_{xy}u_{y,x}$  на лобовой поверхности будет нечетной функцией  $y$ . Отсюда вытекает (2.2). Можно доказать также, что равенство (2.2) справедливо при учете любого трения на боковых гранях резца и при учете упругой составляющей  $U$  на боковой части.

В качестве  $\Sigma_\infty$  возьмем контур прямоугольника  $|x| \leq R$ ,  $|y| \leq \delta$  при  $R \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow \infty$ ,  $\delta/R \rightarrow 0$ . Тогда вклад интеграла по малым сторонам прямоугольника будет пренебрежимо мал, а на сторонах  $y = \pm\delta$  будет  $n_x = 0$ ,  $n_y = 1$  и, воспользовавшись правилом Г-интегрирования [2, 3], имеем (ниже интегрирование ведется в пределах от  $-R$  до  $+R$ )

$$\Gamma = 2 \int (\sigma_{ij}^\infty n_j u_{i,x}^s + \sigma_{ij}^s n_j u_{i,x}^\infty) |_{y=\delta} dx = 2 \left( \sigma_y^\infty \int u_{y,x}^s dx + u_{i,x}^\infty \int \sigma_{ij}^s n_j dx \right)$$

Верхними индексами  $\infty$  и  $s$  отмечаются невозмущенная (т. е. в отсутствие клина) и возмущенная составляющие напряжений и деформаций соответственно. (Это разложение, очевидно, не содержит в себе никаких допущений; оно просто определяет возмущенную составляющую как разность полной и невозмущенной величин.) Далее используем условия равновесия и наличия скачка перемещения  $\Delta u_y = 2h$  в теле при обходе любого контура  $\Sigma_\infty$ . Имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int u_{y,x}^s dx = -h, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int \sigma_{ij}^s n_j dx = -T\delta_{1i}$$

Соотношение (2.3) доказано.

На основании (2.1) — (2.3) получаем

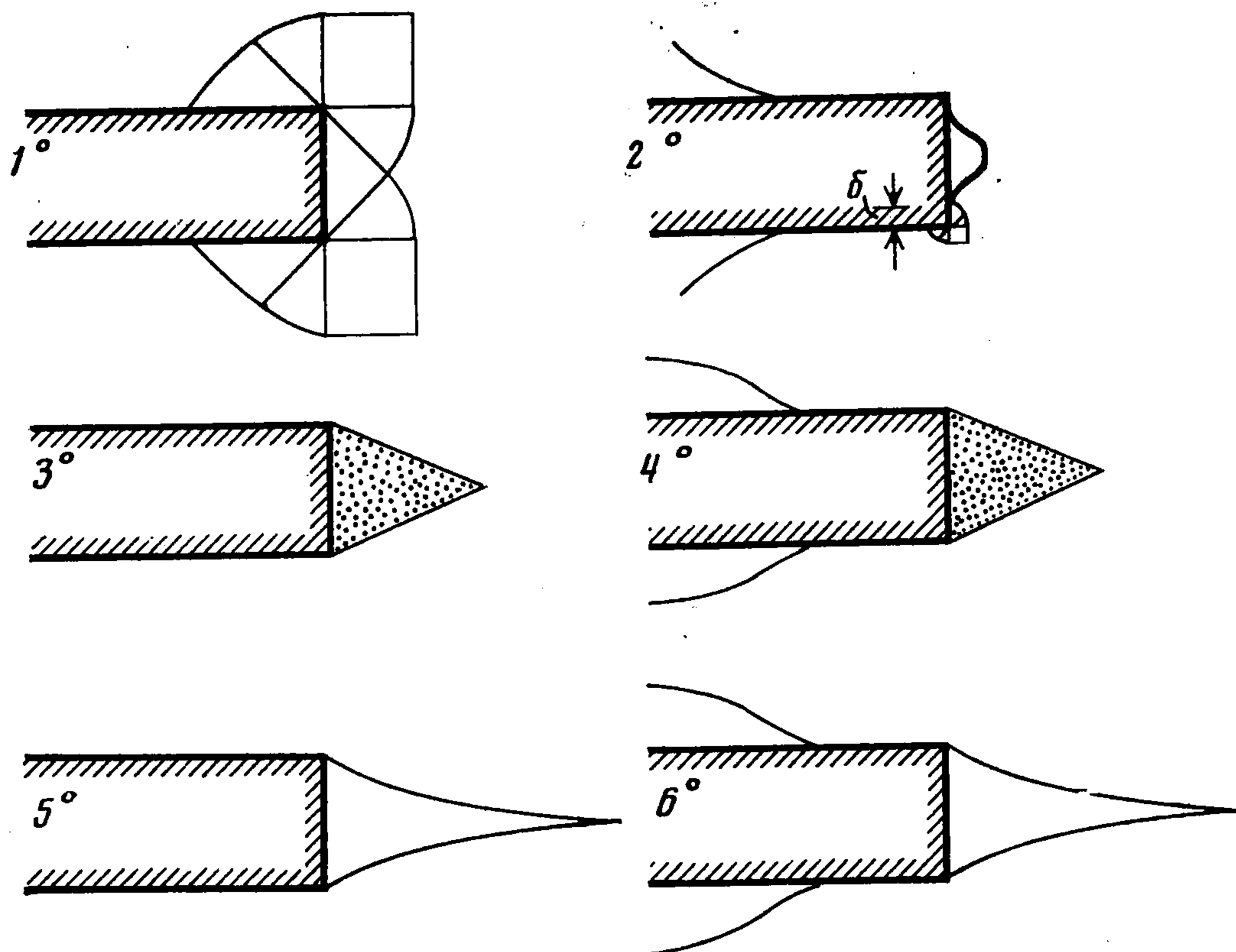
$$(2.4) \quad D = T + Tu_{x,x}^\infty + 2h\sigma_y^\infty$$

Это соотношение можно было бы получить также способом, указанным в п. 1, воспользовавшись значением Г-вычета для дислокации и сосредоточенной силы [1—3].

Отсюда находим следующее выражение для величины силы сопротивления резца:

$$T = (D - 2h\sigma_y^\infty) / (1 + u_{x,x}^\infty)$$

В случае  $\sigma_y^\infty > 0$  растяжение на бесконечности приведет к отрыву материала от боковых граней резца на некотором расстоянии от его лобовой части; задание  $\sigma_y^\infty$  становится некорректным. Допустим, что при достаточно больших  $r$  материал линейно-упругий с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  ( $\mu$  — модуль сдвига). В этом случае на бесконечности следует задавать коэффициент интенсивности напряжений внешнего поля  $K_I$ , равный  $\lim (\sigma_y \sqrt{2\pi r})$  при  $r \rightarrow \infty$  (где  $r$  — расстоя-



Фиг. 4

ние от лобовой части клина). Аналогично предыдущему получается следующее выражение для силы сопротивления:

$$T = \frac{ED - (1 - \nu^2) K_I^2}{E (1 + u_{x,x}^\infty)} \quad (K_I > 0, K_{II} = K_{III} = 0)$$

так как величина конфигурационной силы в данном случае вместо (2.3) будет равна

$$(2.5) \quad \Gamma = -T u_{x,x}^\infty - (1 - \nu^2) E^{-1} K_I^2$$

В отсутствие внешнего поля (когда конфигурационная сила равна нулю)  $D = T$ ; это соотношение позволяет определить  $D$  (опытным путем или из модельной теории) как функцию  $h$  и физических свойств материала.

В зависимости от относительной роли упругости и пластичности, а также от знака напряжения  $\sigma_y$  при больших  $r$  можно выделить следующие шесть основных вариантов симметричного обтекания резца упругопластическим материалом (фиг. 4).

*Вариант 1°.* При  $K_{Ic} \gg \mu \sqrt{h}$  и  $\sigma_y^\infty \leq 0$ , где  $K_{Ic}$  — вязкость разрушения, роль сил упругости вблизи конца резца пренебрежимо мала. В случае несжимаемого идеального упругопластического материала Треска—Сен-Венана семейство характеристик в пластической области вблизи конца резца можно принять, как для пластического клина с углом раствора  $3\pi/2$ . В этом случае согласно теории пластичности имеем на лобовой части [4]

$$(2.6) \quad \sigma_x = -2\tau_s (1 + \pi) - q, \quad \sigma_y = -2\pi\tau_s - q, \quad \tau_{xy} = 0$$

( $\tau_s$  — предел текучести на сдвиг,  $q$  — величина бокового подпора при  $y = \pm h$  вблизи углов резца, определяемая из решения упругопластической задачи в целом).

*Вариант 2°.* При  $K_{Ic} \gg \mu \sqrt{h}$  и  $K_I > 0$  кроме полостей на боковых гранях резца появится симметричная каверна на лобовой грани. Наличие этой каверны обусловлено конечностью пластических деформаций в концевой зоне и тем, что при  $K_I > 0$  любой разрыв в пластическом теле будет иметь параболически закругленный конец [1] (подсос, т. е. рас-

тягивающее контактное давление между резцом и материалом, исключается). В этом случае для хорошо развитой лобовой каверны напряжения на лобовой площадке контакта будут  $\sigma_x = -2\tau_s$ ,  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , так что сила сопротивления  $T = 4\delta\tau_s$ , где  $\delta$  — ширина площадки (определяемая из решения упругопластической задачи в целом).

*Вариант 3°.* При  $K_{Ic} \sim \mu\sqrt{h}$ ,  $\sigma_y^\infty \leq 0$  влияние упругого расклинивания существенно, так что перед лобовой гранью резца образуется упругая застойная зона, заполненная одним и тем же материалом, движущимся со скоростью резца (показана точками на фиг. 4). Решение этой задачи можно найти в «квазихрупком» приближении, т. е. считая, что пластическая область, охватывающая застойную зону, представляет собой достаточно тонкий слой вдоль ее границы.

*Вариант 4°.* При  $K_{Ic} \sim \mu\sqrt{h}$  и  $K_I > 0$  кроме застойной зоны предыдущего варианта появляются симметричные полости вдоль боковых граней резца. В этом случае квазихрупкое приближение также позволяет провести аналогичное эффективное исследование.

*Варианты 5° и 6°.* При  $K_{Ic} \ll \mu\sqrt{h}$  влияние пластичности мало по сравнению с упругим расклиниванием: перед резцом образуется зияющая квазихрупкая трещина нормального разрыва, а при  $K_I > 0$  появляются еще и полости по бокам клина. (Эти случаи являются предельными для вариантов 3° и 4° соответственно.)

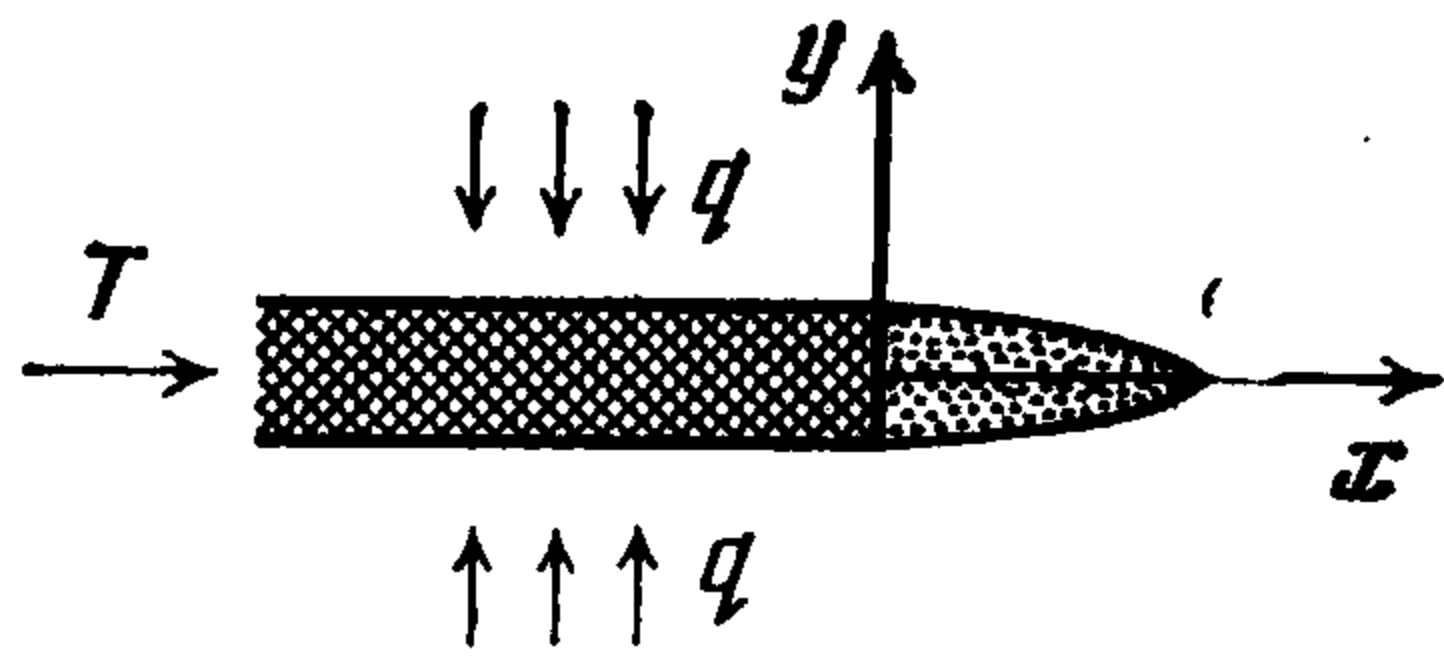
Ввиду наибольшей практической значимости вариантов 3° и 4° ниже дается решение соответствующих задач.

Одним из важнейших результатов приведенного общего качественного анализа процесса разрушения при резании является вывод о существенном влиянии предварительного напряжения обрабатываемой детали или образца: предварительное растяжение значительно облегчает резание, а сжатие — затрудняет. Этот результат является следствием влияния конфигурационной силы; при внутреннем резании оно наиболее существенно, однако и при поверхностном резании может быть значительным, если к отрываемой стружке прикладывать внешнюю силу (например, при помощи струи жидкости или газа). Полученный эффект может быть использован при проектировании оптимальной конструкции режущего инструмента.

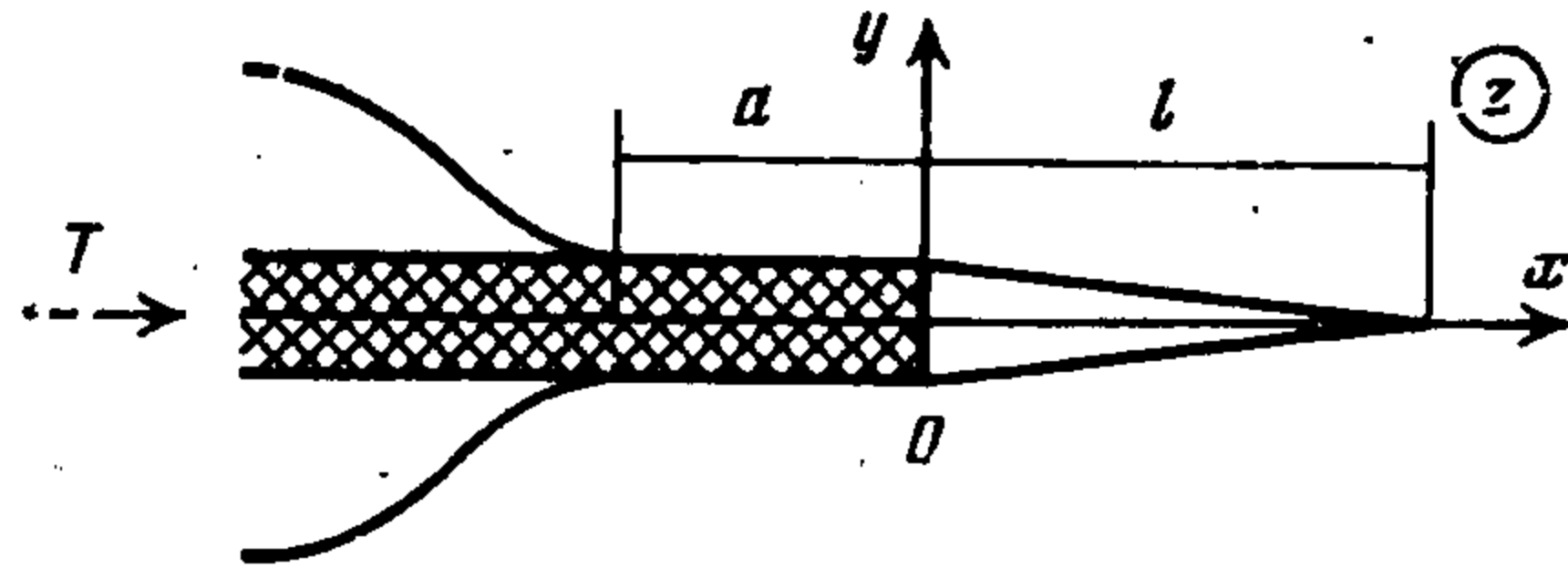
**3. Задача о расклинивании с застойной зоной при сжатии.** Пусть гладкий абсолютной жесткий полубесконечный тонкий клин расположен вдоль отрицательной полуоси  $x$ , а перед ним при  $y = 0$ ,  $0 < x < l$  имеется тонкая полость — застойная зона, заполненная обломками разрушенного материала (плоская задача, фиг. 5). На бесконечности пространство сжато напряжением  $\sigma_y = -q$  ( $q > 0$ ). Воздействие застойной зоны на берега полости будем моделировать постоянным давлением  $p > 0$  и касательной нагрузкой трения  $\tau > 0$ . В силу симметрии задачи можно ограничиться верхней полуплоскостью  $y > 0$ .

В итоге получаем следующую краевую задачу плоской теории упругости для полуплоскости  $y > 0$ :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} y = 0, \quad x < 0, \quad v = h, \quad \tau_{xy} &= 0 \\ y = 0, \quad 0 < x < l, \quad \sigma_y = -p, \quad \tau_{xy} &= \tau \\ y = 0, \quad x > l, \quad v = 0, \quad \tau_{xy} &= 0 \\ x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad \sigma_y = -q, \quad \sigma_x = \tau_{xy} &= 0 \end{aligned}$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Используем представления Колосова—Мусхелишвили плоской теории упругости

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \quad (z = x + iy) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 [z\Phi'(z) + \Psi'(z)] \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ \varphi'(z) &= \Phi(z), \quad \psi'(z) = \Psi(z) \end{aligned}$$

Здесь  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  — аналитические функции комплексной переменной  $z$  в верхней полуплоскости,  $u, v$  — перемещения.

В этой задаче кроме  $z = \infty$  есть две особые точки:  $z = 0$  и  $z = l$ . Точка  $z = l$  — это конец трещины отрыва; в ней функция  $\Phi(z)$  имеет порядок  $(z - l)^{-1/2}$ . В окрестности другой точки при недостаточном заполнении застойной зоны обломочным материалом упругое тело касается лобовой грани резца вблизи угловой точки, что приводит к бесконечным напряжениям вблизи этой точки (порядка  $x^{-1/2}$ ), к обдиранию тела и дальнейшему заполнению застойной зоны продуктами разрушения. Процесс обдирания прекращается, когда давление обломков в застойной зоне становится достаточно большим для того, чтобы раздвинуть стенки полости вблизи углов и свести к минимуму концентрацию напряжений вблизи  $z = 0$ . Рассмотрим последнюю, стационарную, стадию процесса обдирания, требуя, чтобы искомая функция  $\Phi(z)$  не имела степенной особенности в точке  $z = 0$ .

При помощи представлений (3.2), используя теорию сингулярных интегральных уравнений, решение краевой задачи (3.1) в указанном классе функций можно привести к следующему виду:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{4}q - \frac{1}{2}p - \frac{\tau}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{l}{z}\right) + \frac{1}{2}(p - q) \sqrt{\frac{z}{z-l}} \\ z\Phi'(z) + \Psi'(z) &= -\frac{1}{2}q + \frac{\tau}{\pi} \ln\left(1 - \frac{l}{z}\right) \\ (\sqrt{z/(z-l)} &\rightarrow 1 \text{ при } z \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

При помощи (3.2) и (3.3) находим форму полости перед резцом (при  $y = +0$   $0 < x < l$ )

$$(3.4) \quad \begin{aligned} v &= \frac{\kappa-1}{4\mu} \tau(x-l) + \frac{\kappa+1}{4\mu} (p-q) \left[ -\sqrt{x(l-x)} + \right. \\ &\quad \left. + l \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{l-x}{x}} \right] \end{aligned}$$

При  $x = 0$  перемещение  $v$  должно равняться  $h$

$$(3.5) \quad p - q = \frac{8\mu h}{\pi l(\kappa+1)} + \frac{2}{\pi} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \tau$$

Так как  $\tau = p\mu_f$ , где  $\mu_f$  — коэффициент трения, из уравнения (3.5) получаем давление  $p$  в стационарной застойной зоне

$$(3.6) \quad p = \left[ \frac{8\mu h}{\pi l(\kappa+1)} + q \right] \left( 1 - \frac{2}{\pi} \mu_f \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right)^{-1}$$

Согласно (3.3) и (3.5)

$$\Phi(z) = \frac{4\mu h + 2\tau l}{2\pi z(\kappa + 1)} \text{ при } z \rightarrow \infty$$

Это соответствует клиновой дислокации мощности  $2h$  и силе  $2\tau l$  на бесконечности.

Напряжение  $\sigma_x$  в застойной зоне определим из уравнения равновесия

$$d(v\sigma_x)/dx = -p\partial v/\partial x + \tau$$

Так как при  $x = l$  будет  $\sigma_x = 0$ , откуда получаем  $\sigma_x = -p + \tau(x - l)/v(x)$ . Следовательно, давление на лобовую грань клина

$$(3.7) \quad -\sigma_x = p + \tau l/h = p(1 + \mu_f l/h)$$

Поэтому сила лобового сопротивления  $T$  движению клина согласно (3.6) и (3.7) равна

$$(3.8) \quad T = 2h \left(1 + \mu_f \frac{l}{h}\right) \left[ \frac{8\mu h}{\pi l(\kappa + 1)} + q \right] \left(1 - \frac{2}{\pi} \mu_f \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^{-1}$$

При помощи (3.2) и (3.3) находим коэффициент интенсивности напряжений  $K_I = \sqrt{2\pi l}(p - q)$ , а из критерия хрупкого разрушения и уравнения (3.6) — длину полости перед резцом

$$(3.9) \quad l = \frac{4a^2}{\pi(b + \sqrt{b^2 - 4ac})^2}$$

$$\left( a = \frac{8\mu h}{\kappa + 1}, b = \frac{1}{\sqrt{2}} K_{Ic} \left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \mu_f\right), \right.$$

$$\left. c = \frac{2}{\pi} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} q\mu_f \right)$$

В частности, при  $q = 0$ ,  $\nu = 1/2$ ,  $\kappa = 1$  будет  $l = 32\pi^{-1}\mu^2 h^2 K_{Ic}^{-2}$  и очевидно, что уже при  $K_{Ic} < 3\mu\sqrt{h}$  требуемое условие  $l \gg h$  выполняется достаточно хорошо.

**4. Задача о расклинивании с застойной зоной при растяжении.** В случае растяжения пространства поперек клина материал отойдет с боковых граней клина и вдоль  $y = 0$  при  $x < -a$  образуются симметричные пустые каверны (фиг. 6). В этом случае на бесконечности следует задавать коэффициент интенсивности напряжений  $K_I = K_I^\infty > 0$ . Эта задача принадлежит классу  $N$ , в котором принцип Сен-Венана не выполняется [1].

Для полуплоскости  $y > 0$  в остальных прежних допущениях имеет место следующая краевая задача:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} y = 0, \quad x < -a, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \\ y = 0, \quad -a < x < 0, \quad v = h, \quad \tau_{xy} = 0 \\ y = 0, \quad 0 < x < l, \quad \sigma_y = -p, \quad \tau_{xy} = \tau \\ y = 0, \quad x > l, \quad v = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \\ y = 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \sigma_x = \sigma_y = K_I^\infty/\sqrt{2\pi x}, \quad \tau_{xy} = 0 \end{aligned}$$

Из физических соображений в условиях стационарной стадии процесса следует, что в особых точках этой краевой задачи функция  $\Phi(z)$  ведет себя следующим образом:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} z \rightarrow -a, \quad z \rightarrow 0, \quad \Phi(z) = O(1); \\ z \rightarrow l, \quad \Phi(z) = K_I/[2\sqrt{2\pi(z-l)}] \end{aligned}$$

Здесь  $K_I$  — коэффициент интенсивности напряжений в конце застойной зоны (трещины с заполнителем).

В классе функций (4.2) решение краевой задачи (4.1) при помощи (3.2) можно привести к такому виду:

$$(4.3) \quad z\Phi'(z) + \Psi(z) = \frac{\tau}{\pi} \ln \left( 1 - \frac{l}{z} \right)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} X(z) \int_L \frac{f(x) dx}{X^+(x)(x-z)}$$

$$X(z) = \sqrt{z \frac{z+a}{z-l}}, \quad f = -\frac{\tau}{2\pi} \ln \left| 1 - \frac{l}{x} \right| +$$

$$+ \begin{cases} 0, & x < -a \\ -1/2\rho, & 0 < x < l \end{cases}$$

( $L: y = 0, -\infty < x < -a$  плюс  $y = 0, 0 < x < l$ )

$X(z) \rightarrow |\sqrt{x}|$  при  $z \rightarrow \infty + i0$

Через  $X^+(x)$  обозначено значение  $X(z)$  на верхнем берегу разреза.

Для определения неизвестных параметров задачи  $a, l, \rho, \tau, T$  служат два условия, задающих поведение  $\Phi(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  и  $z \rightarrow l$ , уравнение (3.7), уравнение  $\tau = \rho\mu_f$  и условие

$$(4.4) \quad y=0, \quad \int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} dx = h$$

Анализируя формулы (3.4), (3.6) и (3.9), можно заметить, что при реальных значениях  $\mu_f$  величины  $\rho, l$  и  $v(x)$  довольно слабо зависят от  $\tau$  (исключение составляет сила лобового сопротивления  $T$ ). Поэтому при вычислении  $a, l, \rho$  для простоты пренебрежем  $\tau$ , полагая  $\tau = 0$ . Величина  $T$  согласно (3.8) по-прежнему равна

$$(4.5) \quad T = 2\rho h (1 + \mu_f l/h)$$

где  $\rho$  и  $l$  найдем приближенно.

При помощи (3.6) и (4.4) при  $\tau = 0$  находим

$$(4.6) \quad y=0, \quad 0 < x < l, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(x+1)\rho}{4\mu\pi} X^+(x) \int_0^l \frac{dt}{X^+(t)(t-x)}$$

Кроме того, согласно (4.4) при  $\tau = 0$  имеем

$$(4.7) \quad z \rightarrow \infty, \quad \Phi(z) = \frac{\rho}{2\pi i \sqrt{z}} \int_0^l \frac{dx}{X^+(x)}$$

$$z \rightarrow l, \quad \Phi(z) = \frac{\rho}{2\pi} \left[ \frac{l(a+l)}{z-l} \right]^{1/2} \int_0^l \frac{dx}{|[x(x+a)(x-l)]^{1/2}|}$$

Условия (4.2), (4.3) и (4.5) при помощи (4.6) и (4.7) помогают получить следующие уравнения для отыскания  $a, l$  и  $\rho$  (все радикалы положительны):

$$(4.8) \quad \int_0^l \left[ \frac{l-x}{x(x+a)} \right]^{1/2} dx = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\pi}{2}} K_I^\infty$$

$$(4.9) \quad \int_0^l \frac{dx}{[x(x+a)(l-x)]^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{K_{Ic}}{\rho [l(l+a)]^{1/2}}$$

$$(4.10) \quad \int_0^l \left[ \frac{x(x+a)}{l-x} \right]^{1/2} dx \int_0^l \left[ \frac{l-t}{t(t+a)} \right]^{1/2} \frac{dt}{t-x} = \frac{4\pi\mu h}{\rho(x+1)}$$

5. Расклинивание с зияющей трещиной отрыва. Когда продукты разрушения удаляются из полости трещины (или же в начале расклинивания), влиянием заполнителя можно пренебречь. В этом случае при формулировке краевых задач (3.1) — при сжатии и (4.1) — при растяжении следует положить  $p = \tau = 0$ , а решение краевых задач искать в классе функций, имеющих интегрируемую особенность при  $z \rightarrow 0$ . Ограничимся случаем сжатия. Решение краевой задачи будет следующим:

$$(5.1) \quad \Phi(z) = \frac{-qz + C}{2\sqrt{z(z-l)}} + \frac{1}{4}q, \quad z\Phi'(z) + \Psi'(z) = -\frac{1}{2}q$$

( $\sqrt{z(z-l)} \rightarrow z$  при  $z \rightarrow \infty$ ,  $C$  — действительная постоянная).

На основании (3.2) и (5.1) находим форму полости трещины при  $y = +0$ ,  $0 < x < l$

$$(5.2) \quad v = \frac{\kappa + 1}{4\mu} \left[ (2C - ql) \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{l-x}} \right) - q \sqrt{x(l-x)} \right]$$

Так как  $v = h$  при  $x = 0$ , получаем

$$(5.3) \quad 2C - ql = \frac{8\mu h}{\pi(\kappa + 1)}$$

Согласно (3.2) и (5.1), имеем

$$(5.4) \quad K_I = \sqrt{2\pi/l} (C - ql), \quad C - ql = K_{Ic} \sqrt{l/(2\pi)}$$

Из уравнений (5.3) и (5.4) находим

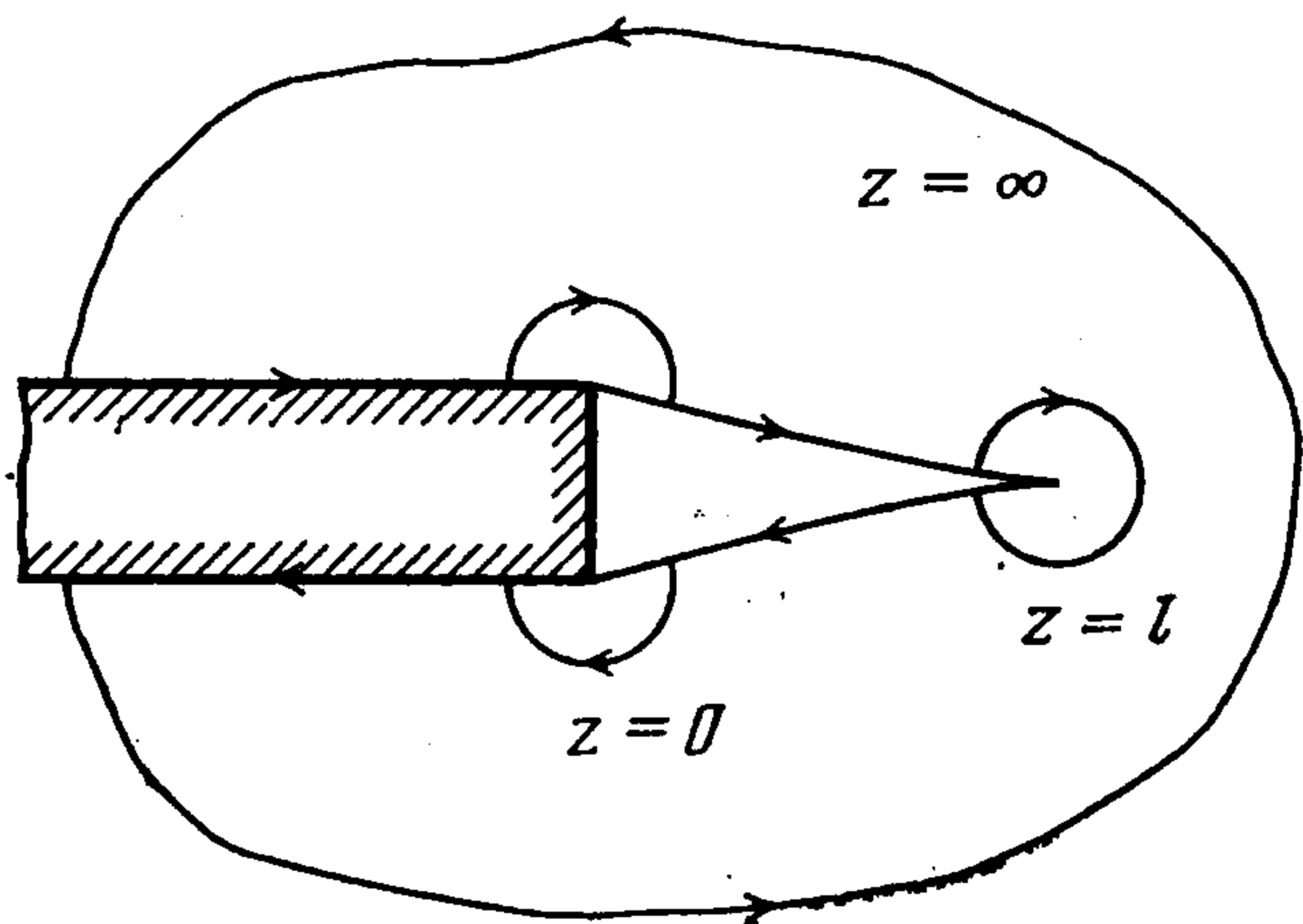
$$(5.5) \quad l = \frac{K_{Ic}^2}{2\pi q^2} \left[ \left( 1 + \frac{16q\mu h}{(\kappa + 1) K_{Ic}^2} \right)^{1/2} - 1 \right]^2$$

$$C = \frac{4\mu h}{\pi(\kappa + 1)} + \frac{1}{2}ql \quad (q > 0)$$

В частности, при  $q = 0$

$$l = \frac{32\mu^2 h^2}{\pi K_{Ic}^2 (1 + \kappa)^2}, \quad C = \frac{4\mu h}{\pi(\kappa + 1)}$$

Особые точки  $z = 0$ ,  $z = l$  и  $z = \infty$  являются единственными источниками (при  $z = \infty$ ) и стоками (при  $z = 0$  и  $z = l$ ) упругой энергии, так как клин идеально гладкий, а тело идеально упруго.



Фиг. 7

Рассмотрим инвариантный  $\Gamma$ -интеграл (2.1) по контуру, изображенному на фиг. 7. При помощи (5.1) и (3.2) можно найти

$$(5.6) \quad T = (1 - \nu^2) E^{-1} K_{Ic}^2 + 2qh \quad (q > 0)$$

Здесь  $T$  — сумма  $\Gamma$ -вычетов при обходе углов клина (при  $z = 0$ ). Первое слагаемое — это  $\Gamma$ -вычет при обходе точки  $z = l$ , а второе —  $\Gamma$ -вычет при обходе бесконечно удаленной точки.

На основании (5.6) на клин при его движении действует сила сопротивления  $T$ . Это простой и поучительный пример конфигурационной силы! Отметим работы [5—10], в которых различные, более сложные задачи о расклинивании рассматривались в классической постановке настоящего пункта.

При расклинивании тела гладким жестким клином с застойной зоной в условиях сжатия (фиг. 5) потенциалы  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , а также напряжения в нестационарной стадии процесса обдираания будут иметь степенную особенность в углах клина (при  $z = 0$ ). В этом случае кроме силы лобового сопротивления со стороны обломков на клин будет действовать также конфигурационная составляющая силы сопротивления. При помощи инвариантного  $\Gamma$ -интеграла можно показать, что эта составляющая равна

$$(5.7) \quad T = (1 - \nu^2)E^{-1}K_{Ic}^2 + 2h(q - p) + 2\tau\Delta u \\ (\Delta u = u(0, 0) - u(l, 0))$$

При расклинивании тела гладким жестким клином с застойной зоной в условиях растяжения (см. фиг. 6 и п. 4) конфигурационная составляющая силы сопротивления имеет вид

$$(5.8) \quad T = \Gamma_c - (1 - \nu^2)E^{-1}(K_I^\infty)^2 - 2hp + 2\tau\Delta u \\ (\Gamma_c = (1 - \nu^2)E^{-1}K_{Ic}^2, \Delta u = u(0, 0) - u(l, 0))$$

В стационарной стадии сила  $T$  в обоих случаях обращается в нуль.

Как следует из публикуемой работы, в контактных задачах о движении клиньев или штампов [11—15] при вычислении силы сопротивления необходимо учитывать конфигурационную составляющую этой силы, возникающую при обходе особых точек на площадке контакта. В частности, при разрезании упругого тела весьма тонким лезвием, конец которого проникает в самый конец идущей впереди трещины, сила сопротивления его движению будет равна критической силе  $\Gamma_c$  за вычетом конфигурационной силы от внешнего поля растяжения:

$$T = \Gamma_c - \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2$$

Аналогичное следствие справедливо в отношении работы резания: работа внешних сил, затраченная на движение резца, при  $K_I > 0$  уменьшается на величину работы конфигурационной силы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Cherapanov G. P.* Mechanics of Brittle fracture. N. Y.: McGraw-Hill, 1979. 950 p.
2. *Cherapanov G. P.* Invariant  $\Gamma$ -integrals.— Engng Fract. Mech., 1981, v. 14, No. 1, p. 39—58.
3. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 300 с.
4. *Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.* Уругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 240 с.
5. *Сметанин Б. И.* О расклинивании упругого бесконечного клина.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, с. 935—940.
6. *Сметанин Б. М.* Две щели в полосе конечной толщины.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 2, с. 366—369.
7. *Галаджева М. Р., Сирунян В. Х., Сметанин Б. И.* О расклинивании упругой полуплоскости.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1974, т. 27, № 2, с. 38—45.
8. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О расклинивании хрупких тел.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, с. 667—682.
9. *Звягин А. В.* Дозвуковое движение твердого тела в упругой среде.— Вестн. МГУ. Сер. 1, 1979, № 3, с. 60—64.
10. *Симонов И. В.* Трансзвуковое обтекание тонкого твердого тела упругой средой.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 1, с. 114—122.
11. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1953. 260 с.
12. Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
13. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
14. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
15. *Джонсон К. Л.* Сцепление и контакт деформируемых тел.— В кн.: Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV Междунар. конгр. IUTAM. М.: Мир, 1979. 765 с.

Москва

Поступила в редакцию  
10.IX.1984