

УДК 550.33 + 536.7

АСИМПТОТИКА МАЛОЙ РАЗНОСТИ ПЛОТНОСТЕЙ В ПРОБЛЕМЕ КОГЕРЕНТНЫХ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Гринфельд М. А.

Для асимптотического случая малой разности плотностей приводятся уравнения, описывающие (в низшем приближении) равновесные конфигурации при гетерогенных когерентных фазовых превращениях в однокомпонентной упругой среде. Ради краткости и некоторых вычислительных упрощений обе фазы предполагаются изотропными. Показывается, что в первом приближении равновесная температура негидростатической двухфазной конфигурации совпадает с температурой фазового равновесия гидростатически напряженных фаз в некоторых опорных конфигурациях. В низшем приближении получающаяся система уравнений равновесия совпадает с уравнениями классической линейной теории упругости, однако, в целом, проблема остается существенно нелинейной, так как содержит неизвестную границу и некоторое квадратичное по перемещениям граничное условие на ней. Полученные условия используются далее для нахождения решений некоторых краевых задач.

Полученные в работах [1, 2] условия равновесия при когерентных фазовых переходах и фазовых переходах с проскальзыванием представляют собой специальные краевые задачи для уравнений нелинейной теории упругости с неизвестными границами. Наличие неизвестных границ контакта различных фаз усугубляет трудности и без того сложной задачи описания равновесных конфигураций нелинейно-упругих материалов (например, в самой простой задаче такого рода для жидкой системы, когда дело сводится лишь к определению равновесных значений давления, температуры и масс фаз, условия равновесия вырождаются в сложную нелинейную алгебраическую систему). В силу этого значительный интерес представляет асимптотика малой разности плотностей фаз, которая в данной работе развивается на примере когерентных фазовых превращений в изотропной (в обоих фазовых состояниях) среде.

1. Условия равновесия при когерентных фазовых превращениях в простом однокомпонентном упругом материале. Следуя [1], рассмотрение будем вести в лагранжевых переменных x^i , причем для дальнейшего удобно несколько преобразовать полученные в [1] соотношения. Будем различать две изотропные упругие фазы индексами плюс и минус. Рассмотрим однородное упругое вещество, находящееся в фазовом состоянии плюс, и будем считать, что в рассматриваемой опорной конфигурации лагранжева система координат x^i аффинна с базисом x_{i+} . Рассмотрим теперь вторую опорную однородную конфигурацию того же вещества, но находящегося в фазовом состоянии минус, и предположим, что переходу из первой конфигурации во вторую соответствует деформация всестороннего растяжения—сжатия с коэффициентом подобия d , так что соответствующее поле перемещений $w(x)$ материальной точки с координатами x^i дается формулой $w = (d - 1) x^i x_{i+}$; базис этой конфигурации дается формулой $x_{i-} = dx_{i+}$.

Рассмотрим в координатном пространстве x^i поверхность $\xi - x^i = x^i(\xi^\alpha)$, $\alpha = 1, 2$. Согласно [1], проблема описания равновесия при когерентных фазовых переходах сводится к определению равновесной температуры θ , неизвестной границы ξ , поля перемещений фазы плюс $u_+(x)$

по одну сторону ξ и поля (дополнительных) перемещений фазы минус $u_-(x)$ по другую сторону, так, чтобы внутри фаз и на межфазной границе выполнялись, соответственно, условия а) и б) — д)

$$(1.1) \quad \text{а) } p_{,j}^{ji} = 0, \quad \text{б) } [U^i]_-^+ = 0, \quad \text{в) } [p^{ji}]_-^+ n_j = 0, \quad \text{д) } [v^{ji}]_-^+ n_j n_i = 0$$

Здесь p_{\pm}^{ji} — тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа, относящийся (для обеих фаз) к базису опорной конфигурации фазы плюс; индекс после запятой — символ частного дифференцирования, которое в рассматриваемом случае совпадает с ковариантным; U_{\pm}^i — компоненты полей полных перемещений по базису x_{i+} ($U_+ = u_+$, $U_- = w + u_-$); далее

$$(1.2) \quad v_{\pm}^{ij} = \psi x_{+}^{ij} - \frac{1}{m_{\pm}} p_{\pm}^{ik} U_{k,l\pm} x_{+}^{lj}$$

где ψ_{\pm} — плотности свободной энергии фаз на единицу массы; $x_{ij\pm}$ (x_{\pm}^{ij}), m_{\pm} — метрические тензоры и массовые плотности фаз в опорных конфигурациях. Через n_j обозначены компоненты единичной нормали к образу поверхности ξ в опорной конфигурации фазы плюс; при помощи отвечающих этой конфигурации метрических тензоров пространства и поверхности осуществляется ковариантное дифференцирование и «жонглирование» индексами (если явно не оговорено противное).

Для замыкания системы (1.1) (помимо условия постоянства абсолютной температуры и задания конкретного вида функции ψ) необходимо также задать условия на внешней границе тела либо на бесконечности

Обозначим через u_{i-}^* — компоненты поля u_- по базису x_{i-} . Свободную энергию ψ фазы минус естественно в дальнейшем задавать как функцию абсолютной температуры θ и градиентов перемещений $u_{i,j}^*$. Однако производные этой функции весьма сложным образом связаны с тензором p_{-}^{ji} вводимым проектированием тензоров напряжений с векторными компонентами P_{-}^j [3] на базис x_{i+} . Для преодоления этого затруднения введем другой тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа p_{-}^{*ji} при помощи разложения P_{\pm}^{*j} по базису опорной конфигурации фазы минус x_{i-} . Тензоры p_{\pm}^{*ji} связаны с плотностями свободной энергии ψ ($u_{k,l\pm}^*$, θ) обычными соотношениями (здесь и в дальнейшем для экономии места одновременно выписываются подобные формулы для обеих фаз, при этом индекс звездочка относится лишь к фазе минус)

$$p_{\pm}^{*ji} = m_{\pm} \partial \psi (u_{k,l\pm}^*, \theta) / \partial u_{i,j\pm}^*$$

Стандартные геометрические соотношения приводят к следующей связи между тензорами напряжений: $p_{-}^{ji} = p_{-}^{*ji} m_{+} d / m_{-}$.

Разлагая ψ_{\pm} , p_{\pm}^{*ji} в ряды по аргументам $u_{k,l\pm}^*$ и $T = \theta - \theta^{\circ}$, получаем

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \psi_{\pm} &= \psi_{\pm}^{\circ} + \psi_{\theta\pm} T + \psi_{\pm}^{ij} u_{i,j\pm}^* + \frac{1}{2} \psi_{\theta\theta\pm} T^2 + \psi_{\theta\pm}^{ij} u_{i,j\pm}^* T + \\ &+ \frac{1}{2} \psi_{\pm}^{ijkl} u_{i,j\pm}^* u_{k,l\pm}^* + \dots \\ p_{\pm}^{*ji} &= m_{\pm} (\psi_{\pm}^{ij} + \psi_{\theta\pm}^{ij} T + \psi_{\pm}^{ijkl} u_{k,l\pm}^* + \frac{1}{2} \psi_{\theta\theta\pm}^{ij} T^2 + \\ &+ \psi_{\theta\pm}^{ijkl} u_{k,l\pm}^* T + \frac{1}{2} \psi_{\pm}^{ijklmn} u_{k,l\pm}^* u_{m,n\pm}^*) + \dots \end{aligned}$$

Считая фазы изотропными, а опорные конфигурации неискаженными, при помощи соотношений работы [4] коэффициенты разложений можно представить в форме

$$(1.4) \quad \begin{aligned} m_{\pm} \psi_{\pm}^{ij} &= -p_{\pm}^{\circ} x_{\pm}^{ij}, \quad m_{\pm} \psi_{\theta\pm}^{ij} = -K_{\pm} \alpha_{\pm} x_{\pm}^{ij} \\ m_{\pm} \psi_{\pm}^{ijkl} &= p_{\pm}^{\circ} (x_{\pm}^{il} x_{\pm}^{jk} - x_{\pm}^{ij} x_{\pm}^{kl}) + \lambda_{\pm} x_{\pm}^{ij} x_{\pm}^{kl} + \\ &+ \mu_{\pm} (x_{\pm}^{ik} x_{\pm}^{jl} + x_{\pm}^{il} x_{\pm}^{jk}) \end{aligned}$$

где p_{\pm}° , λ_{\pm} , μ_{\pm} , K_{\pm} , α_{\pm} — давления, изотермические модули Ламе и объемного сжатия и коэффициент температурного расширения в опорных конфигурациях фаз при температуре θ° .

2. Асимптотика малой разности плотностей. Предположим, что обе рассматриваемые фазы изотропны, причем указанные выше опорные конфигурации являются неискаженными и при температуре θ° начальные давления p_{\pm}° и удельные потенциалы Гиббса совпадают

$$(2.1) \quad p_+^{\circ} = p_-^{\circ} = p, \quad \psi_+^{\circ} + p/m_+ = \psi_-^{\circ} + p/m_-$$

Предположим далее, что коэффициент подобия d близок к единице

$$(2.2) \quad d = 1 + \delta\varepsilon; \quad \delta \sim 1, \quad \varepsilon \ll 1$$

а поля перемещений на внешней границе порядка ε .

В рассматриваемой ситуации естественно ожидать, что могут существовать равновесные конфигурации, содержащие обе фазы, причем параметры обеих фаз будут мало отличаться от опорных, так что поля перемещений фаз u_{\pm} , уравнение границы раздела x^i (ξ^{α}) и приращение равновесной температуры T представляются в виде рядов по малому параметру ε

$$(2.3) \quad u_{\pm} = \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N u_{N\pm}, \quad x^i(\xi, \varepsilon) = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N x_{i,N}^i(\xi), \quad T = \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N T_N.$$

Перейдем к выводу уравнений для определения первых ненулевых членов этих разложений. Заметим, что функции $x_{i,N}^i(\xi)$ определены лишь с точностью до произвольной замены координат на поверхности ξ^{α} . Чтобы локализовать всю эту неоднозначность в функции $x_0^i(\xi)$, будем в дальнейшем разыскивать уравнение поверхности в форме

$$(2.4) \quad x^i(\xi, \varepsilon) = x_0^i(\xi) + n_0^i(\xi) \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N a_N(\xi)$$

где n_0^i — компоненты единичной нормали к поверхности $x_0^i(\xi)$, а ряд дает расстояние поверхности $x^i(\xi, \varepsilon)$ от x_0^i вдоль нормали к последней.

Следующие соотношения вытекают непосредственно из геометрических соображений и разложений (2.2), (2.3):

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x_{i-} &= x_{i+}(1 + \delta\varepsilon), \quad x_{ij-} = d^2 x_{ij+} = (1 + 2\delta\varepsilon + \delta^2\varepsilon^2) x_{ij+}, \\ x_-^{ij} &= (1 - 2\delta\varepsilon + 3\delta^2\varepsilon^2) x_+^{ij} + o(\varepsilon^2), \quad u_{i-}^* = u_{i-}(1 + \delta\varepsilon), \\ U_-^i &= u_-^i + \delta\varepsilon x^i, \quad w^i \equiv w \cdot x_+^i = \delta\varepsilon x^i \\ m_- &= m_+(1 + \delta\varepsilon)^{-3} = m_+(1 - 3\delta\varepsilon + 6\delta^2\varepsilon^2) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Комбинируя соотношения (2.1), (2.5) находим

$$(2.6) \quad \psi_-^{\circ} = \psi_+^{\circ} + p(m_+^{-1} - m_-^{-1}) = \psi_+^{\circ} - 3p\delta\varepsilon(1 + \delta\varepsilon)/m_+ + o(\varepsilon^2)$$

Комбинируя далее соотношения (1.3), (1.4), (2.1) — (2.6) последовательно, получаем

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \psi_+ &= \psi_+^{\circ} + \varepsilon \left(\psi_{\theta+} T_1 - \frac{p}{m} v_{i,i+}^i \right) + o(\varepsilon) \\ p_+^{ji} &= -p x_+^{ij} + \varepsilon \{ p (v_{i,i+}^{ji} - x_+^{ij} v_{k,k+}^k) - \\ &\quad - K_+ \alpha_+ T_1 x_+^{ij} + \lambda_+ x_+^{ij} v_{k,k+}^k + 2\mu_+ v_{i,i+}^{(ij)} \} + o(\varepsilon) \\ \psi_+ x_+^{ij} - \frac{1}{m_+} p_+^{ik} u_{k,i+}^j &= \psi_+^{\circ} x_+^{ij} + \varepsilon \left\{ \frac{p}{m_+} v_{i,i+}^{ij} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\psi_{\theta+} T_1 - \frac{p}{m_+} v_{k,k+}^k \right) x_+^{ij} \right\} + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_- &= \psi_+^0 + \varepsilon \left\{ \psi_{\theta-T_1} - \frac{p}{m_+} (3\delta + v_{,k-}^k) \right\} + o(\varepsilon) \\ p_-^{ji} &= d \frac{m_+}{m_-} p_-^{*ji} = -px_+^{ij} + \varepsilon \{ p(v_{,i-}^{ji} - x_+^{ij} v_{,k-}^k - 2\delta x_+^{ij}) - \\ &- K_{\alpha} T_1 x_+^{ij} + \lambda_{x_+}^{ij} v_{,k-}^k + 2\mu_{v_{,i-}^{(ij)}} \} + o(\varepsilon) \\ \psi_{-x_+}^{ij} - \frac{1}{m_+} p_-^{ik} (u_{k,i-}^j + \varepsilon \delta \delta_k^j) &= \psi_+^0 x_+^{ij} + \\ &+ \varepsilon \left\{ \psi_{\theta-T_1} x_+^{ij} + \frac{p}{m_+} (v_{,i-}^{ij} - x_+^{ij} v_{,k-}^k - 2\delta x_+^{ij}) \right\} + o(\varepsilon), \quad v^i \equiv u_1^i \end{aligned}$$

Подставим соотношения (2.7) в систему условий равновесия (1.1). Приравнявая коэффициенты при ε , получаем соответственно

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & (\lambda x_+^{ij} v_{,k}^k + 2\mu v_{,i-}^{(ij)})_{,j} = 0, \quad \text{b)} \quad [v^j]_-^+ = \delta x_0^j \\ \text{c)} \quad & [p(v_{,i-}^{ji} - x_+^{ij} v_{,k}^k) - K_{\alpha} T_1 x_+^{ij} + \lambda x_+^{ij} v_{,k}^k + 2\mu v_{,i-}^{(ij)}]_-^+ n_{j0} = \\ & = -2p\delta n_{i0} \\ \text{d)} \quad & \left[\frac{p}{m} (v_{,i-}^{ij} - x_+^{ij} v_{,k}^k) + \psi_{\theta} T_1 x_+^{ij} \right]_-^+ n_{i0} n_{j0} = -2p\delta \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем n_{jM} — коэффициент при ε^M в разложении компонентов единичной нормали к поверхности контакта фаз. Из двух последних соотношений (2.7) можно исключить члены, содержащие начальное давление p , воспользовавшись соотношениями

$$(2.9) \quad \begin{aligned} [v_{,i-}^j]_-^+ (x_+^{ik} - n_0^i n_0^k) &= \delta (x_+^{jk} - n_{i0}^j n_{i0}^k), \quad [v_{,j-}^j]_-^+ = \\ &= [v_{,i-}^j]_-^+ n_{j0} n_{i0} + 2\delta, \quad [v_{,i-}^j]_-^+ n_{j0} = ([v_{,k-}^k]_-^+ - 2\delta) n_{i0} \end{aligned}$$

(в соотношениях (2.8), (2.9) все скачки вычисляются на поверхности x_0^i).

Для доказательства соотношений (2.9) продифференцируем второе из соотношений (2.8) по ξ^α , свернем результат с $x_{\beta_0}^k \xi_0^{\alpha\beta}$ ($\xi_0^{\alpha\beta}$ — метрический тензор на поверхности x_0^i) и воспользуемся известным тождеством $x_{\alpha_0}^i x_{\beta_0}^k \xi_0^{\alpha\beta} = x_+^{ik} - n_0^i n_0^k$, что немедленно приводит к первому из доказываемых соотношений. Опустив в нем индекс k и свернув результат по индексам j, k , приходим ко второму. Наконец, свернув первое из соотношений (2.9) с n_{j0} и используя второе, убеждаемся в справедливости последнего.

Используя (2.9), приводим последнюю пару соотношений (2.8) к форме

$$(2.10) \quad [\lambda x_+^{ij} v_{,k}^k + 2\mu v_{,i-}^{(ij)}]_-^+ n_{j0} = 0, \quad [\psi_{\theta}]_-^+ T_1 = 0$$

Второе из полученных соотношений ведет к важному заключению: при $[\psi_{\theta}]_-^+ \neq 0$ (что является общей ситуацией при фазовых переходах первого рода, когда скрытая теплота превращения не равна нулю) температура фазового равновесия в гетерогенной конфигурации в первом приближении не отличается от опорной θ° [5]. Для определения температурного эффекта необходимо, следовательно, перейти к расчету величины T_2 . Это можно сделать приравняв члены второго порядка малости по ε в последнем из соотношений (1.1). Громоздкие вычисления приводят к формуле

$$(2.11) \quad \begin{aligned} m_+ [\psi]_-^+ T_2 + 1/2 [\lambda v_{,i-}^i v_{,j-}^j + 2\mu v_{,i-}^{(ij)} v_{(i,j)}]_-^+ - \\ - [\lambda v_{,k-}^k v_{,i-}^i + 2\mu v_{,i-}^{(ik)} v_{k,i-}^j]_-^+ n_{i0} n_{j0} + \lambda_- \delta v_{,i-}^i + 2\mu_- \delta v_{,i-}^{ij} n_{i0} n_{j0} \end{aligned}$$

Это функциональное уравнение играет также принципиальную роль при определении положения неизвестной межфазной границы [5], поэтому приведем ключевые соображения и формулы, позволяющие установить его.

Применим к последнему из уравнений (1.1) дважды операцию ковариантного дифференцирования по скалярному параметру ε [6] (разумеется, после подстановки рядов

2.3)). Учитывая соотношения (2.1), однородность опорных конфигураций и свойства $\delta/\delta\varepsilon$ -производной, при $\varepsilon = 0$ получаем

$$(2.12) \quad \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 v^{ij}}{\partial \varepsilon^2} \right]_{\varepsilon=0}^+ + c n^k \left[\frac{\partial v^{ij}}{\partial \varepsilon, k} \right]_{\varepsilon=0}^+ \right\} n_i n_j + \left[\frac{\partial v^{ij}}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}^+ \frac{\delta n_i n_j}{\delta \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

(c — «скорость» границы, индуцируемая изменением параметра ε).

Используя соотношения (1.2)–(1.4), (2.3), (2.5)–(2.7), (2.10), находим (α — символ ковариантного дифференцирования по координатам ξ^α на поверхности $x^i_0(\xi)$)

$$(2.13) \quad n_i \Big|_{\varepsilon=0} = n_{i0}, \quad c \Big|_{\varepsilon=0} = a_1, \quad \frac{\delta n_i}{\delta \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = -a_{1; \alpha} x^i_{i0}{}^\alpha$$

Из соотношений (1.2)–(1.4), (2.3)–(2.7), (2.10) находим

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v^{ij}}{\partial \varepsilon_+} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{p}{m_+} (v^{ij}_{\cdot, \cdot+} - x^ij_{\cdot+} v^k_{\cdot, k+}) \\ \frac{\partial v^{ij}}{\partial \varepsilon_-} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{p}{m_+} (v^{ij}_{\cdot, \cdot-} - x^ij_{\cdot+} v^k_{\cdot, k-} - 2\delta x^ij) \\ \frac{\partial v^{ij}}{\partial \varepsilon_{\cdot, k\pm}} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{p}{m_+} (v^{ij}_{\cdot, \cdot k\pm} - v^l_{\cdot, lk\pm} x^ij_{\cdot+}) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v^{ij}}{\partial \varepsilon_+^2} \Big|_{\varepsilon=0} n_{i0} n_{j0} &= \chi_+ m_+^{-1}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v^{ij}}{\partial \varepsilon_-^2} \Big|_{\varepsilon=0} n_{i0} n_{j0} = \\ &= \chi_- m_+^{-1} - \delta^2 - \delta v^k_{\cdot, k-} + \delta v^{ij}_{\cdot, \cdot-} n_{i0} n_{j0} - \frac{\lambda_-}{m_+} \delta v^i_{\cdot, i-} - \frac{2\mu_-}{m_+} \delta v^{ij}_{\cdot, \cdot-} n_{i0} n_{j0} \\ \chi_\pm &\equiv m_+ \psi_{\theta\pm} T_2 + \frac{\lambda_\pm}{2} v^k_{\cdot, k\pm} v^l_{\cdot, l\pm} + \mu_\pm v^{(k, l)\pm} v^k_{\cdot, \cdot\pm} - (\lambda_\pm v^k_{\cdot, k-} v^i_{\cdot, \cdot\pm} + \\ &+ 2\mu_\pm v^{(k, i)\pm} v_{k, \cdot\pm}) n_{i0} n_{j0} + p \{ u^{ij}_{\cdot, \cdot 2\pm} n_{i0} n_{j0} - u^i_{\cdot, i 2\pm} + \\ &+ \frac{1}{2} (v^i_{\cdot, j\pm} v^j_{\cdot, i\pm} - v^i_{\cdot, i\pm} v^j_{\cdot, j\pm}) - (v^i_{\cdot, \cdot\pm} v^j_{\cdot, \cdot\pm} - v^k_{\cdot, k-} v^i_{\cdot, \cdot-}) n_{i0} n_{j0} \} \end{aligned}$$

Используя (2.13), (2.14), представляем (2.12) в виде

$$(2.15) \quad \begin{aligned} [\psi_\theta]_{\cdot, \cdot}^+ m_+ T_2 + \frac{1}{2} [\lambda v^i_{\cdot, i} v^j_{\cdot, j} + 2\mu v^{(ij)} v_{i, j}]_{\cdot, \cdot}^+ - [\lambda v^k_{\cdot, k} v^i_{\cdot, i} + \\ + 2\mu v^{(ik)} v_{k, \cdot}^j]_{\cdot, \cdot}^+ n_{i0} n_{j0} + \lambda_- \delta v^i_{\cdot, i-} + 2\mu_- \delta v^{(ij)}_{\cdot, \cdot-} n_{i0} n_{j0} + \\ + p \{ [u^{ij}_{\cdot, \cdot 2}]_{\cdot, \cdot}^+ n_{i0} n_{j0} - [u^i_{\cdot, i 2}]_{\cdot, \cdot}^+ + \frac{1}{2} [v^i_{\cdot, j} v_{j, i} - v^i_{\cdot, i} v^j_{\cdot, j}]_{\cdot, \cdot}^+ - \\ - [v^i_{\cdot, \cdot} v^j_{\cdot, \cdot} - v^i_{\cdot, \cdot} v^j_{\cdot, \cdot}]_{\cdot, \cdot}^+ n_{i0} n_{j0} + \delta^2 + \delta v^i_{\cdot, i-} - \delta v^{ij}_{\cdot, \cdot-} n_{i0} n_{j0} + a_1 n_0^k n_{i0} n_{j0} \times \\ \times [v^i_{\cdot, j} - v^l_{\cdot, lk} x^ij_{\cdot+}]_{\cdot, \cdot}^+ - 2a_{1; \alpha} x^i_{i0}{}^\alpha n_{j0} ([v^i_{\cdot, \cdot} - v^k_{\cdot, k} x^ij_{\cdot+}]_{\cdot, \cdot}^+ + 2\delta x^ij_{\cdot+}) \} = 0 \end{aligned}$$

(напомним, что все скачки вычисляются на поверхности $x^i_0(\xi)$).

Заметим, что из (2.15) при $p = 0$ немедленно вытекает соотношение (2.11), однако для доказательства универсальности последнего следует показать, что коэффициент при p в (2.15) обращается в нуль. Подставляя (2.2), (2.3) в (3.1) и приравнявая коэффициенты при ε^2 , получаем

$$(2.16) \quad [u^i_{\cdot, i 2}]_{\cdot, \cdot}^+ + [v^i_{\cdot, j}]_{\cdot, \cdot}^+ n^j_0 a_1 = \delta n^i_0 a_1$$

Продифференцируем (2.16) по ξ^α и свернем результат с тензором $x^k_{\beta 0} \xi^{\alpha\beta}_0$. Используя обозначение $b_{ij} = b_{\alpha\beta} x^i_{i0}{}^\alpha x^j_{j0}{}^\beta = -n_{i0; \alpha} x^i_{j0}{}^\alpha$, где $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности x^i_0 , имеем

$$(2.17) \quad \begin{aligned} [u^i_{\cdot, i 2}]_{\cdot, \cdot}^+ (x^kl_+ - n_0^k n_0^l) + [v^i_{\cdot, j}]_{\cdot, \cdot}^+ (x^kl_+ - n_0^k n_0^l) n^j_0 a_1 + \\ + [v^i_{\cdot, j}]_{\cdot, \cdot}^+ (a_{1; \alpha} x^k{}^\alpha_{\cdot 0} n_0^j - a_1 b^{jk}) = \delta (a_{1; \alpha} x^k{}^\alpha_{\cdot 0} n^i_0 - b^{ki} a_1) \end{aligned}$$

Опуская в (2.17) индекс k и свертывая по i, k , получаем соотношение, которое при помощи (2.9) и тождества $x^i_{\alpha 0} n_{i0} = 0$ приводим к виду

$$(2.18) \quad \begin{aligned} [u^i_{\cdot, i 2}]_{\cdot, \cdot}^+ n_{i0} n_{j0} - [u^i_{\cdot, i 2}]_{\cdot, \cdot}^+ - [v^i_{\cdot, j}]_{\cdot, \cdot}^+ a_{1; \alpha} x^i_{i0}{}^\alpha n^j_0 + \\ + a_1 n_{i0} n_0^j n_0^l [v^i_{\cdot, j} - v^i_{\cdot, k} x^kl_+]_{\cdot, \cdot}^+ = 0 \end{aligned}$$

Теперь в обращении в нуль коэффициента при p в (2.15) можно убедиться, если воспользоваться соотношениями (2.9), (2.18) и

$$(2.19) \quad \begin{aligned} & 1/2 [v_{.,i}^i v_{.,j}^j]_{-}^{+} - [v_{.,i}^i v_{.,j}^j]_{-}^{+} - [v_{.,k}^k v_{.,j}^j]_{-}^{+} + n_{i0} n_{j0} = \\ & = -\delta^2 - \delta v_{.,i}^i + \delta v_{.,j}^j - n_{i0} n_{j0} \end{aligned}$$

Соотношение (2.19) можно получить из следующих четырех:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} [v_{.,i}^i v_{.,j}^j]_{-}^{+} &= 2v_{.,i}^i (h^l n_{l_0} + 2\delta) + (h^l n_{l_0} + 2\delta)^2 \\ [v_{.,j}^j v_{.,i}^i]_{-}^{+} &= 2v_{.,j}^j h^j n_{i0} + 2\delta (v_{.,i}^i - v_{.,j}^j n_{i0} n_{j0} + \delta) - (h^l n_{l_0})^2 \\ [v_{.,k}^k v_{.,j}^j]_{-}^{+} n_{i0} n_{j0} &= v_{.,k}^k h^i n_{k0} + v_{.,j}^j n_{i0} n_{j0} h^k n_{k_0} + (h^i n_{i0})^2 \\ [v_{.,k}^k v_{.,j}^j]_{-}^{+} n_{i0} n_{j0} &= v_{.,j}^j n_{i0} n_{j0} (h^k n_{k0} + 2\delta) + h^l n_{l_0} (v_{.,k}^k + h^k n_{k_0} + 2\delta) \end{aligned}$$

Здесь $h^i \equiv [v_{.,j}^j]_{-}^{+} n_{j0}$; для установления соотношений (2.20) необходимо использовать (2.9), а также следующее соотношение для разрыва произведения:

$$[ab]_{-}^{+} = a_{-} [b]_{-}^{+} + b_{-} [a]_{-}^{+} + [a]_{-}^{+} [b]_{-}^{+}$$

Плавление, понимаемое как превращение твердой фазы в жидкость относится к числу фазовых переходов с проскальзыванием, асимптотика малой разности плотностей для которых была развита в работе [5]¹. Можно показать, однако, что в случае, когда одна из фаз жидкая, соотношения (2.8, а, б), (2.10), (2.11) ведут к уравнениям, полученным для плавления в указанных работах.

Действительно, пусть фаза минус жидкая ($\mu_{-} = 0$) и занимает в равновесной конфигурации объем V внутри фазы плюс. В этом случае первое из уравнений (2.8) для фазы минус дает

$$(2.21) \quad v_{.,k-}^k = H = \text{const}, \quad x \in V$$

Первое из соотношений (2.10) можно теперь записать в форме

$$(2.22) \quad (\lambda_{+} v_{.,k+}^k x_{+}^{ij} + 2\mu_{+} v_{.,j+}^{(i,j)}) n_{j_0} = K_{-} H n_{i_0}^i$$

Интегрируя уравнение (2.21) по конечному объему V и используя соотношение (2.8, в)), имеем

$$(2.23) \quad \begin{aligned} HV &= \int_V dV v_{.,k-}^k = \int_{\xi} d\xi v_{-}^k n_{k0} = \int_{\xi} d\xi (v_{+}^k - \delta x^k) n_{k0} = \\ &= \int_{\xi} d\xi v_{+}^k n_{k0} - \Delta V m_{+}^{-1} \rightarrow \int_{\xi} d\xi v_{+}^k n_{k_0} = V \left(H + \frac{\Delta}{m_{+}} \right) \quad (\Delta \equiv 3\delta m_{+}) \end{aligned}$$

Используя далее последнее из соотношений (2.9) и первое из (2.10), а также $\mu_{-} = 0$, получаем

$$(2.24) \quad \begin{aligned} [\lambda v_{.,k}^k v_{.,j}^j + 2\mu v_{.,k}^{(i,j)}]_{-}^{+} n_{i0} n_{j0} &= (\lambda v_{.,l}^l x_{+}^{ki} + 2\mu v_{.,j}^{(k,i)})_{\pm} n_{i0} n_{j0} [v_{.,j}^j]_{-}^{+} = \\ &= K_{-} v_{.,l-}^l ([v_{.,i}^i]_{-}^{+} - 2\delta) \end{aligned}$$

Теперь, используя (2.24), приводим (2.11) к виду

$$(2.25) \quad 2m_{+} [\Psi]_{-}^{+} T_2 + \lambda_{+} v_{.,i+}^i v_{.,j+}^j + 2\mu_{+} v_{.,j+}^{(i,j)} v_{i,j+} + K_{-} H^2 - 2K_{-} H (v_{.,l+}^l - \Delta/m_{+}) = 0$$

Таким образом получены все условия равновесия работы [5].

3. Определение параметров равновесных эллипсоидальных включений твердой фазы. Рассмотрим в приближении малой разности плотностей задачу о равновесном ограниченном включении твердой фазы для случая когерентных превращений и линейного на бесконечности поля перемещений u_{+}^i (в случае фазовых переходов с проскальзыванием эта задача

¹ См. также: Гринфельд М. А. Гетерогенные системы с поверхностями фазовых переходов (применение вариационных принципов): Автореф. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М.: Ин-т физики Земли АН СССР, 1983. 34 с.

разбиралась в [5, 7]²

$$(3.1) \quad \lim_{x^i \rightarrow \infty} v_+^i(x) = \kappa_{.j}^i x^j$$

Будем искать равновесное включение в форме трехосного эллипсоида, а поля v_{\pm}^i в виде (ср. с [7])

$$(3.2) \quad v_{i-} = \beta_{ij} x^j, \quad v_{i+} = \frac{\gamma}{4\pi} \varphi_{.i} + \kappa_{ij} x^j$$

где φ — ньютонов потенциал соответствующего эллипсоида единичной плотности, β_{ij} и γ — некоторые постоянные. Внутренний потенциал однородного эллипсоида с центром в начале координат является квадратичной формой

$$(3.3) \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2} \omega_{ij} x^i x^j, \quad \varphi_0, \omega_{ij} = \text{const}$$

Ее коэффициенты определяются ориентацией и формой эллипсоида, зная которые можно решать обратную задачу и восстанавливать ориентацию и величины эксцентриситетов.

Внутри и вне тела потенциал удовлетворяет уравнениям

$$(3.4) \quad \text{a) } \varphi_{.i}^i = -4\pi, \quad \text{b) } \varphi_{.i}^i = 0$$

так что $\omega_{.i}^i = 4\pi$. Кроме того, потенциал φ на бесконечности обращается в нуль (вместе со всеми производными), непрерывен на границе эллипсоида Σ вместе с первыми производными, а разрывы вторых производных на границе Σ удовлетворяют соотношениям совместности $[\varphi_{.ij}]_+^+ = 4\pi N_i N_j$ (N_i — единичная нормаль к поверхности эллипсоида). Можно убедиться, что функции $v_{i\pm}$, задаваемые соотношениями (3.2), удовлетворяют уравнениям равновесия и граничному условию на бесконечности. Комбинируя соотношения совместности с соотношениями (3.2), (3.3), находим

$$(3.5) \quad v_{i,j+}|_{\Sigma} = \gamma \left(N_i N_j - \frac{1}{4\pi} \omega_{ij} \right) + \kappa_{ij}$$

Используя (3.1) — (3.5), второе из граничных условий (2.8) и первое из (2.10) можно представить в виде линейных форм координат x^i и компонентов единичной нормали N_i соответственно. В силу имеющегося произвола в выборе этих величин на поверхности эллипсоида заключаем, что для существования решения указанного вида необходимо соблюдение следующих соотношений между константами:

$$(3.6) \quad \frac{\gamma}{4\pi} \omega^{ij} - \kappa^{ij} + \beta^{ij} + \delta x^{ij} = 0$$

$$(3.7) \quad \lambda_+ \kappa_{.k}^k x^{ij} + 2\mu_+ \kappa^{(ij)} + 2\mu_+ \gamma \left(x^{ij} - \frac{\omega^{ij}}{4\pi} \right) - \lambda_- \beta_{.k}^k x^{ij} - 2\mu_- \beta^{(ij)} = 0$$

Будем рассматривать соотношения (3.4), (3.6), (3.7) как систему уравнений относительно величин ω^{ij} , β^{ij} , γ . Из (3.6) следует ($[ij]$ — символ альтернирования)

$$(3.8) \quad \beta^{[ij]} = \kappa^{[ij]}$$

Симметризуя систему (3.6), умножая ее на $2\mu_+$ и складывая результирующее соотношение с (3.7), получаем

$$(3.9) \quad \beta^{(ij)} = \frac{\lambda_+ \kappa_{.k}^k - \lambda_- \beta_{.k}^k + 2\mu_+ (\gamma + \delta)}{2(\mu_- - \mu_+)} = \beta x^{ij}$$

² См. указ публ. на с. 587.

Комбинируя (3.6), (3.9), имеем

$$(3.10) \quad \omega^{ij} = \frac{4\pi}{\gamma} [\kappa^{(ij)} - (\beta + \gamma) x^{ij}]$$

Остается определить постоянные γ и β ; для этого свернем (3.9), (3.10) по свободным индексам. Используя (3.4), получаем систему, решая которую, находим

$$(3.11) \quad \gamma = \frac{(K_- - K_+) \kappa^k_k - 3K_- \delta}{K_- + 4/3\mu_+}, \quad \beta = \frac{(K_+ + 4/3\mu_+) \kappa^k_k - 4\mu_+ \delta}{3K_- + 4\mu_+}$$

Для того чтобы функции (3.2) давали решение задачи о фазовом равновесии, необходимо также, чтобы во всех точках на поверхности эллипсоида выполнялось соотношение (2.11). Используя соотношения (3.2), (3.5), (3.8) — (3.11), убеждаемся, что последнее требование будет выполнено, если температура T_2 дается формулой (σ^{ij} — напряжения на бесконечности)

$$(3.12) \quad -2m_+ [\psi_0]_-^+ T_2 = \frac{\lambda_+}{9K_+^2} (\sigma^k_k)^2 + \frac{1}{2\mu_+} \left[3 \left(K_- H - 2\mu_+ \gamma - \frac{\lambda_+}{3K_+} \sigma^k_k \right)^2 + 4\mu_+ \gamma \left(K_- H - \mu_+ \gamma - \frac{\lambda_+}{3K_+} \sigma^k_k \right) \right] + K_- H^2 - 2K_- H \left(\frac{1}{3K_+} \sigma^k_k - \frac{\Delta}{m_+} \right) \\ \sigma^{ij} \equiv \lambda_+ \kappa^k_k x^{ij} + 2\mu_+ \kappa^{(ij)}$$

Приведенное решение показывает, что в рассматриваемом случае напряжение в эллипсоидальном включении оказывается гидростатическим, а равновесная температура, форма эллипсоида и напряженное состояние вне его описываются теми же соотношениями, что и в случае перехода изотропного твердого тела в жидкое состояние. В связи с этим здесь остаются в силе и многие другие соотношения, найденные в цитированных работах.

Заметим, что возможность построения решений с включениями новой фазы в форме эллипсоида связана лишь с условием когерентности, изотропностью матрицы, возможностью аппроксимации плотности свободной энергии матрицы разложением до членов второго порядка малости по градиентам перемещений и постоянством этих градиентов на бесконечности. В то же время предположение об изотропности и линейной упругости включения, а также о специальном характере аффинной «собственной» деформации Δ_{ij} отнюдь не является существенным ограничением при построении решений указанного типа. В частности, в случае изотропных фаз, но произвольного тензора собственной деформации, с помощью полученных в работе [8] соотношений можно найти следующие формулы, обобщающие (3.9), (3.10):

$$(3.13) \quad \beta_{(ij)} = x_{ij} L - \frac{\mu_+}{\mu_+ - \mu_-} \Delta_{(ij)} \\ \beta_{[ij]} = \kappa_{[ij]} - \Delta_{[ij]} \\ \frac{\omega^{ij}}{4\pi} \gamma^* = Q^{ij} - x^{ij} L \\ L = \frac{\lambda_- + 2\mu_-}{3K_- + 4\mu_+} \left(\frac{\lambda_+ + 2\mu_+}{\lambda_- + 2\mu_-} \kappa^k_k + \frac{\mu_+}{\mu_+ - \mu_-} \Delta^k_k \right) \\ Q^{ij} = \kappa^{(ij)} + \frac{\mu_-}{\mu_+ - \mu_-} \Delta^{(ij)} \\ \gamma^* = \frac{(K_- - K_+) \kappa^k_k - K_- \Delta^k_k}{K_- + 4/3\mu_+}$$

Из соотношений (3.13) следует, что эллипсоид оказывается соосным тензору Q^{ij} , который, в свою очередь, соосен тензору напряжений на бесконечности в случае плавления ($\mu_- = 0$) либо в рассмотренном ранее случае собственной деформации всестороннего растяжения $\Delta_{ij} = \delta x_{ij}$. В случае всестороннего растяжения на бесконечности эллипсоид оказывается соосным тензору собственной деформации $\Delta_{(ij)}$. В остальных случаях ориентация эллипсоида определяется обоими факторами — характером деформаций на бесконечности и собственной деформацией преобразования.

4. Гетерогенные конфигурации с однородными напряженно-деформированными состояниями фаз. Прежде всего на основании соотношений второго пункта рассмотрим вопрос о равновесном сосуществовании полупространств, вещество которых представляет собой различные изотропные упругие фазы, подвергнутые аффинной деформации. Итак, пусть фаза плюс (фаза минус) подвергается аффинной деформации $v_i^+ = \kappa_{.j}^i x^j$ ($v_i^- = \kappa_{.j}^i x^j$) относительно своей опорной конфигурации, где $\kappa_{.j}^i$ — некоторые постоянные тензоры. Если указанные полупространства находятся в состоянии полного термодинамического равновесия вдоль плоскости $b_i x^i = b_0$ (без ограничения общности можно считать, что вектор b_i нормирован на единицу и, таким образом, совпадает с единичной нормалью к плоскости n_i), то в силу условий равновесия (2.8), (2.10), (2.11) должны выполняться следующие алгебраические соотношения (уравнения равновесия внутри фаз выполняются в рассматриваемом случае автоматически):

$$(4.1) \quad \begin{aligned} [\kappa_{.j}^i]_-^+ x^j - \delta x^i |_{b_i x^i = b_0} &= 0 \\ [\lambda \kappa_{.k}^k x^{ij} + 2\mu \kappa^{(ij)}]_-^+ n_i &= 0 \\ m_+ [\psi_0]_-^+ T_2 + 1/2 [\lambda \kappa_{.i}^i \kappa_{.j}^j + 2\mu \kappa^{(ij)} \kappa_{ji}]_-^+ - [\lambda \kappa_{.k}^k \kappa^{ij} + \\ + 2\mu \kappa^{(ik)} \kappa_{.j}^j]_-^+ n_i n_j + \lambda_- \delta \kappa_{.i}^i + 2\mu_- \delta \kappa_{.ij} n_i n_j &= 0 \end{aligned}$$

Дифференцируя первое из этих соотношений по координатам на плоскости ξ^α и свертывая результат с x_k^α , получаем

$$(4.2) \quad [\kappa_{ik}]_-^+ = h_i n_k + \delta (x_{ik} - n_i n_k) \quad (h_i \equiv [\kappa_{ij}]_-^+ n^j)$$

Из девяти соотношений (4.2) имеется только шесть независимых, так как (4.2) обращается в тождество при свертывании с вектором n^k . Следовательно, десять независимых соотношений, входящих в последнюю пару системы (4.1) и (4.2), связывают 18 констант κ_{\pm}^{ij} , две независимые компоненты единичной нормали n_i и приращение равновесной температуры T_2 . Таким образом, для однозначного определения кусочно-однородной равновесной конфигурации указанных полупространств можно произвольно задать, например, аффинную деформацию фазы плюс и ориентацию границы раздела n_i . Для того чтобы рассчитать сопряженное равновесное напряженно-деформированное состояние фазы минус (т. е. тензор $\kappa_{.j}^i$), при помощи (4.2) представим второе из соотношений (4.1) в форме

$$(4.3) \quad \{[\lambda]_-^+ \kappa_{.k}^k x^{ij} + 2[\mu]_-^+ \kappa_+^{(ij)} + \lambda_- h^k n_k x^{ij} + 2\mu_- h^{(i} n^{j)} + 2\delta \lambda_- x^{ij} + \\ + 2\delta \mu_- (x^{ij} - n^i n^j)\} n_j = 0$$

Свертывая (4.3), с n_i , получаем

$$(4.4) \quad h^k n_k = -\frac{1}{\lambda_- + 2\mu_-} ([\lambda]_-^+ \kappa_{.k}^k + 2[\mu]_-^+ \kappa_+^{(kl)} n_k n_l + 2\delta \lambda_-)$$

Подставляя (4.4) в соотношение (4.3), получаем

$$(4.5) \quad h^i = n^i \frac{\lambda_- + \mu_-}{\mu_- (\lambda_- + 2\mu_-)} \left(-\frac{\mu_- [\lambda]_-^+}{\lambda_- + \mu_-} \kappa_{.k+}^k + 2 [\mu]_-^+ \kappa_+^{(kl)} n_k n_l - \right. \\ \left. - \frac{2\delta \lambda_- \mu_-}{\lambda_- + \mu_-} \right) - \frac{2 [\mu]_-^+}{\mu_-} \kappa_+^{(ik)} n_k = n^i R - \frac{[\mu]_-^+}{\mu_+ \mu_-} \sigma_+^{ij} n_j \\ R \equiv \frac{\mu_+ \lambda_- - \lambda_+ \mu_-}{\mu_+ (\lambda_- + 2\mu_-) (3\lambda_+ + 2\mu_+)} \sigma_{.k+}^k - \frac{2\delta \lambda_-}{\lambda_- + 2\mu_-} + \\ + \frac{[\mu]_-^+ (\lambda_- + \mu_-)}{\mu_- \mu_+ (\lambda_- + 2\mu_-)} \sigma_+^{kl} n_k n_l \\ (\sigma_{\pm}^{ij} = \lambda_{\pm} \kappa_{.k\pm}^k x^{ij} + 2\mu_{\pm} \kappa_{\pm}^{(ij)})$$

Здесь σ_+^{ij} — тензор напряжений в фазе плюс; при выводе представления вектора h^i через σ_+^{ij} использовалось соотношение

$$\kappa_+^{(ij)} = \frac{1}{2\mu_+} \left(\sigma_+^{ij} - \frac{\lambda_+ \sigma_{.k+}^k}{3\lambda_+ + 2\mu_+} x^{ij} \right)$$

Тензор κ_-^{ij} и тензор напряжений фазы минус σ_-^{ij} даются соотношениями

$$(4.6) \quad \kappa_{ij-} = \kappa_{ij+} - h_i n_j - \delta (x_{ij} - n_i n_j) = \\ = \kappa_{ij+} - n_i n_j \left(-\frac{\mu_- [\lambda]_-^+}{\lambda_- + \mu_-} \kappa_{.k+}^k + 2 [\mu]_-^+ \kappa_+^{kl} n_k n_l - \right. \\ \left. - \frac{\mu_- (3\lambda_- + 2\mu_-) \delta}{\lambda_- + \mu_-} \right) \frac{\lambda_- + \mu_-}{\mu_- (\lambda_- + 2\mu_-)} - \delta x_{ij} + \frac{2 [\mu]_-^+}{\mu_-} \kappa_{(ik)+} n^k n_j \\ (4.7) \quad \sigma_-^{ij} = \lambda_- x^{ij} (\kappa_{.k+}^k - h^k n_k - 2\delta) + 2\mu_- \{ \kappa_+^{(ij)} - h^{(i} n^{j)} - \\ - \delta (x^{ij} - n^i n^j) \} = 2\mu_- x^{ij} \left(R - \delta - \frac{[\mu]_-^+}{2\mu_- \mu_+} \right) - 2\mu_- n^i n^j (R - \delta) + \\ + \frac{\mu_-}{\mu_+} \sigma_+^{ij} + \frac{[\mu]_-^+}{\mu_+} n_k (\sigma_+^{ik} n^j + \sigma_+^{jk} n^i)$$

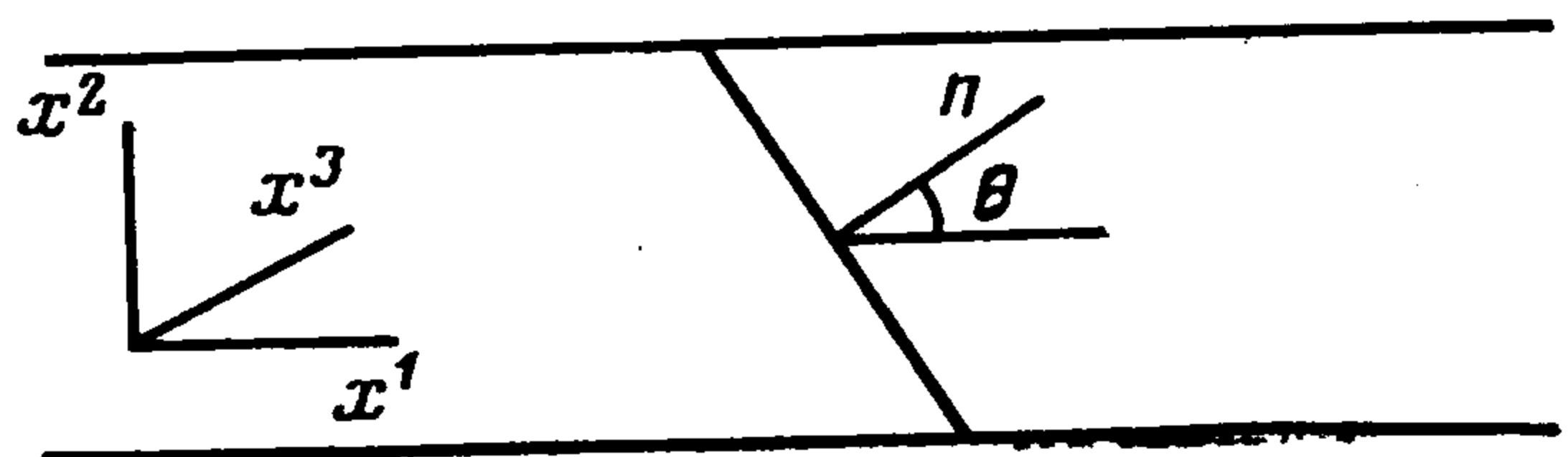
Для нахождения равновесной температуры остается подставить полученные формулы в последнее из соотношений (4.1).

Формулы п. 4 можно использовать для решений некоторых краевых задач. Рассмотрим, к примеру, двумерную задачу о двухфазных гетерогенных равновесиях в полосе, загруженной на внешних границах $x^2 = \text{const}$ постоянным нормальным усилием $\sigma^{23} = -p$ и касательным усилием $\sigma^{21} = \tau$ и свободными поверхностями $x^3 = \text{const}$ (фигура). Рассмотрим решения, которым соответствуют аффинные деформации обеих фаз, разделенных плоскостями. Обозначим через θ угол наклона разделяющей плоскости, а через σ_{\pm} — значения напряжений σ^{11}_{\pm} в обеих фазах. Из условия однородности фаз заключаем, что тензоры напряжений в фазах имеют вид ($a, b = 1, 2$)

$$(4.8) \quad \|\sigma_{\pm}^{ab}\| = \begin{vmatrix} \sigma_{\pm} & \tau \\ \tau & -p \end{vmatrix}$$

Соотношения (4.7), (4.8) приводят к следующим уравнениям для определения величин σ_+ и θ :

$$(4.9) \quad pc + \frac{2\mu_- (\mu_+ \lambda_- - \lambda_+ \mu_-)}{\mu_+ (3\lambda_+ + 2\mu_+) (\lambda_- + 2\mu_-)} (\sigma_+ - p) + \\ + \frac{\lambda_- c q}{\lambda_- + 2\mu_-} - \frac{2\delta \mu_- (3\lambda_- + 2\mu_-)}{\lambda_- + \mu_-} - R \sin^2 \theta = 0 \\ (c\sigma_+ - cp - R') \sin \theta \cos \theta = 0$$



Здесь использованы обозначения

$$(4.10) \quad c = \frac{\mu_+ - \mu_-}{\mu_+}, \quad q = \sigma_+ \cos^2 \theta - 2\tau \sin \theta \cos \theta - p \sin^2 \theta,$$

$$R' = \frac{2\mu_-}{\lambda_- + 2\mu_-} \left\{ \frac{\mu_+ \lambda_- - \lambda_+ \mu_-}{\mu_+ (3\lambda_+ + 2\mu_+)} (\sigma_+ - p) - (3\lambda_- + 2\mu_-) \delta + cq \frac{\lambda_- + \mu_-}{\mu_-} \right\}$$

С помощью обозначений (4.10) условие незагруженности поверхностей $x^3 = \text{const}$ можно представить в виде

$$(4.11) \quad \sigma_{-33} = R - cq = 0$$

При $p = \tau = 0$ соотношения (4.9), (4.11) принимают вид

$$(4.12) \quad D \cos^2 \theta = 0, \quad D \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$D + \frac{c(\lambda_- + 2\mu_-)}{6\mu_- K_-} \sigma_+ \sin^2 \theta = 0$$

$$D \equiv -\frac{1}{6} \left[\frac{\lambda}{\mu K} \right]_-^+ \sigma_+ - \frac{c(\lambda_- + \mu_-)}{3\mu_- K_-} \sigma_+ \sin^2 \theta - \delta$$

Система (4.12) имеет следующие решения:

$$1) \sin \theta = 0, \quad \sigma_+ = -6\delta / \left[\frac{\lambda}{\mu K} \right]_-^+ \quad (= \sigma_-)$$

$$2) \cos \theta = 0, \quad \sigma_+ = -6\mu_+ \delta \left(\frac{\lambda_+}{K_+} + \frac{\lambda_-}{K_-} \right)^{-1} \quad \left(= \frac{\mu_+}{\mu_-} \sigma_- \right)$$

Таким образом, первому (второму) решению соответствуют межфазные плоскости, перпендикулярные (параллельные) оси x^1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринфельд М. А. Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 824—828.
2. Гринфельд М. А. О двух типах гетерогенных фазовых равновесий.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 3, с. 567—569.
3. Мовчан А. А. Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение.— Инж. сб., 1960, т. 29, с. 3—20.
4. Гринфельд М. А., Мовчан А. А. Фазовые переходы второго рода в изотропной упругой среде.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1979, № 12, с. 85—89.
5. Гринфельд М. А. Об одной асимптотике в проблеме гетерогенных когерентных фазовых равновесий однокомпонентных упругих сред.— Докл. АН СССР, 1984, т. 275, № 1, с. 43—47.
6. Гринфельд М. А. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в нелинейно-упругом материале.— ПММ, 1978, т. 42, № 5, с. 883—898.
7. Бердичевский В. Л. Зародыши расплава в твердом теле.— Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 1, с. 80—84.
8. Гринфельд М. А. Об одной новой задаче математической физики, связанной с проблемой когерентных фазовых превращений.— Докл. АН СССР, 1984, т. 279, № 1, с. 72—76.

Москва

Поступила в редакцию
9.II.1984