Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 4, 1985

УДК 533.6.011 + 583.70

ДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГАЗОВЫХ ПОТОКАХ

Гречанный О. А., Токарчук В. В.

Развит метод Чепмена — Энскога (ЧЭ) решения кинетических уравнений для длинноволновых частей парных корреляционных функций неравновесного газа. Получены замкнутые системы гидродинамических уравнений, опьсывающие динамику пространственно-временных корреляций крупномасштабных флуктуаций гидродинамических полей в нестационарных неоднородных газовых потоках.

Существует два подхода к построению основных гидродинамических уравнений для пространственных корреляций флуктуаций на основе кинетической теории. При первом подходе используется стохастическое кинетическое уравнение для флуктуаций фазовой макроплотности одночастичных состояний [1—3]. Из него методом ЧЭ получена [4] замкнутая система уравнений для флуктуаций гидродинамических полей со сторонними источниками, корреляторы которых обобщают формулы Ландау — Лифшица на область неравновесных, но устойчивых состояний газа. Стохастические уравнения гидродинамики [4] в принципе могут быть использованы для получения уравнений динамики пространственных корреляций флуктуаций гидродинамических полей. Возникающая при этом задача последовательного расчленения мелко- и крупномасштабных пространственных корреляций оказывается весьма сложной и громоздкой в техническом отношении. Поэтому более эффективен другой подход, основанный непосредственно на уравнениях для парных корреляционных функций в одночастичном фазовом пространстве [5, 6]. Так, с применением техники проекционных операторов построена [5] замкнутая система уравнений динамики одновременных пространственных корреляторов флуктуаций гидродинамических полей в неоднородных стационарных состояниях газа. Аналогичные уравнения получены [6] феноменологическим путем.

Наиболее важная информация о характере пространственных статистических связей в ламинарных газовых потоках содержится в зависимости неоднородных членов уравнений для одновременных пространственных гидродинамических корреляторов от средних значений термодинамических сил, представляющих собой «тепловые источники» крупномасштабных гидродинамических корреляций. Рассчитаны [5, 6] наиболее простые линейные члены такой зависимости, которые неполностью описывают генерацию пространственных корреляций в неизотермических потоках сжимаемого газа.

Цель данной работы — дальнейшее развитие метода ЧЭ для получения гидродинамической асимптотики длинноволновых частей парных корреляционных функций неравновесного газа и построение на их основе замкнутой системы уравнений динамики для пространственно-временных корреляционных функций флуктуаций гидродинамических полей. Полученные ниже двухточечные гидродинамические уравнения для пространственно-временных корреляций в отличие от уравнений [5, 6] пригодны для исследования тепловых шумов в нестационарных потоках сжимаемого газа и учитывают как линейные, так и нелинейные по градиентам зависимости «источников» длинноволновых корреляций от средних значений термодинамических сил. Формальная структура развитого метода универсальна в том смысле, что если известно решение кинетического уравнения для среднего значения соответствующей фазовой макроплотности, то решение кинетического уравнения для длинноволновой части соответствующей корреляционной функции и явный вид «источниковых» членов в двухточечных гидродинамических уравнениях могут быть записаны сразу.

1. Исходные кинетические уравнения и постановка задачи. Рассмотрим простой однокомпонентный неравновесный газ. Пусть $f(t, x)$ и $\delta f(t, x)$ — среднее значение и флуктуации фазовой макроплотности одночастичных состояний, $x = (r, v)$. Тогда среднее значение $\Phi_\mu(t, r)$ и флуктуации $\delta\Phi_\mu(t, r)$ $(\mu = 0, 1, \ldots, 4)$ гидродинамических переменных определяются формулами

$$(1.1)\qquad \Phi_\mu(t, r) = \int dv \Psi_\mu(t, x) f(t, x), \quad \delta\Phi_\mu(t, r) = \int dv \psi_\mu(t, x)\,\delta f(t, x)$$

$$(1.2)\qquad \Psi_0 = m,\ \Psi_k = v_k/n,\ \Psi_4 = m(v-u)^2/(2n)$$

$$(1.3)\qquad \psi_0 = m,\ \psi_k = (v_k - u_k)/n,\ \psi_4 = [m(v-u)^2/2 - e]/n$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots, 4;\ \ k = 1, 2, 3;\ \ n = \rho/m)$$

Здесь $\Phi_0 = \rho$, $\Phi_k = u_k$, $k = 1, 2, 3$, $\Phi_4 = e = 3k_BT/2$ — средние значения массовой плотности, компонент гидродинамической скорости и плотности тепловой энергии, $\delta\Phi_0 = \delta\rho$, $\delta\Phi_k = \delta u_k$, $k = 1, 2, 3$, $\delta\Phi_4 = \delta e = 3k_BT/2$ — флуктуации соответствующих физических величин, m — масса молекулы, v — вектор скорости молекулы, k_B — постоянная Больцмана.

Известно [1, 3], что одно- и двухвременные корреляции фазовой макроплотности представимы в виде

$$(1.4)\qquad \langle \delta f(t, x_1)\,\delta f(t, x_2)\rangle = \delta(x_1 - x_2) f(t, x_1) + g(t, x_1, x_2)$$

$$(1.5)\qquad \langle \delta f(t+\tau, x_1)\,\delta f(t, x_2)\rangle = F(t+\tau, x_1; t, x_2) + G(t+\tau, x_1; t, x_2)$$

Функция распределения f и длинноволновая часть парной корреляционной функции g определяются уравнениями

$$(1.6)\qquad \mathrm{Kn}\left(\frac{\partial}{\partial t} + l_x\right) f(t, x) = J[f(t), f(t); x]$$

$$(1.7)\qquad \mathrm{Kn}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1,2} l_{x_i}\right) g(t, x_1, x_2) = \sum_{i=1,2} J'[f(t); x_i]\, g(t, x_1, x_2) + \delta(r_1 - r_2)\, I[f(t), f(t); x_1, x_2], \quad l_x = v\cdot\nabla + E\cdot\frac{\partial}{\partial v}$$

Здесь $J[f, f; x]$ и $J'[f; x]$ — интеграл столкновений Больцмана и его линеаризованный оператор. Функции F и G представляют собой двухвременную одночастичную и двухвременную двухчастичную корреляционные функции. Они удовлетворяют условиям

$$(1.8)\qquad F(t, x_1; t, x_2) = \delta(x_1 - x_2) f(t, x_1),\ G(t, x_1; t, x_2) = g(t, x_1, x_2)$$

и линеаризованному уравнению Больцмана, в частности

$$(1.9)\qquad \mathrm{Kn}\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + l_{x_1}\right) G(t+\tau, x_1; t, x_2) = J'[f(t+\tau); x_1]\, G(t+\tau, x_1; t, x_2)$$

В кинетические уравнения (1.6), (1.7), (1.9) введен параметр Кнудсена Kn для фиксации порядков величин отдельных членов на гидродинамической стадии эволюции газовой системы.

Из (1.1), (1.4) и (1.5) следует, что корреляционные функции флуктуаций гидродинамических полей состоят из двух слагаемых

$$(1.10)\qquad \langle \delta\Phi_\mu(t, r_1)\,\delta\Phi_\nu(t, r_2)\rangle = a_{\mu\nu}(t, r_1, r_2) + b_{\mu\nu}(t, r_1, r_2)$$

$$(1.11)\qquad \langle \delta\Phi_\mu(t+\tau, r_1)\,\delta\Phi_\nu(t, r_2)\rangle = \alpha_{\mu\nu}(t+\tau, r_1; t, r_2) + \beta_{\mu\nu}(t+\tau, r_1; t, r_2)$$

$(\mu, \nu = 0, 1, \ldots, 4)$, которые определяются формулами

$$(1.12)\qquad a_{\mu\nu}(t, r_1, r_2) = \delta(r_1 - r_2)\int dv_1 \psi_\mu(t, x_1)\,\psi_\nu(t, r_2, v_1) f(t, x_1)$$

$$b_{\mu\nu}(t, r_1, r_2) = \int dv_1\, dv_2 \psi_\mu(t, x_1)\, \psi_\nu(t, x_2)\, g(t, x_1, x_2)$$

$$\alpha_{\mu\nu}(t+\tau, r_1; t, r_2) = $$

$$= \int dv_1\, dv_2 \psi_\mu(t+\tau, x_1)\, \psi_\nu(t, x_2)\, F(t+\tau, x_1; t, x_2)$$

$$\beta_{\mu\nu}(t+\tau, r_1; t, r_2) = \int dv_1\, dv_2 \psi_\mu(t+\tau, x_1)\, \psi_\nu(t, x_2)\, G(t+\tau, x_1; t, x_2)$$

и в силу (1.8) удовлетворяют условиям

$$(1.13) \qquad \alpha_{\mu\nu}(t, r_1; t, r_2) = a_{\mu\nu}(t, r_1, r_2), \quad \beta_{\mu\nu}(t, r_1; t, r_2) = b_{\mu\nu}(t, r_1, r_2)$$

Слагаемые $b_{\mu\nu}$ и $\beta_{\mu\nu}$ в выражениях (1.10) и (1.11) для гидродинамических корреляторов обращаются в нуль в состоянии термодинамического равновесия. Слагаемые $a_{\mu\nu}$ и $\alpha_{\mu\nu}$ определяют пространственно δ-коррелированную часть флуктуаций, описывающую поведение мелкомасштабных тепловых флуктуаций, не исчезающих в состоянии термодинамического равновесия. Для неравновесного газа они исследованы в работах [7, 8].

Корреляторы $b_{\mu\nu}$ и $\beta_{\mu\nu}$ содержат в себе наиболее интересную информацию о статистических свойствах неравновесных флуктуаций в газовых потоках. Они учитывают крупномасштабные флуктуации с большим радиусом корреляции, существующие только в неравновесных системах, описывают длинноволновые статистические связи, обусловливающие тонкую пространственно-временную статистическую структуру неоднородных потоков. Именно часть $b_{\mu\nu}$ корреляционной функции (1.10) определяет влияние крупномасштабных флуктуаций на течение и теплообмен в газе [9], обусловливая эффекты молярного переноса. Кроме того, было показано [10], что части $b_{\mu\nu}$ и $\beta_{\mu\nu}$ гидродинамических корреляторов учитывают наиболее характерные особенности гидродинамических флуктуаций вблизи порога конвективной устойчивости потока. А именно, при приближении параметров течения к критическим значениям, соответствующим потере устойчивости, интенсивность пространственных корреляций и их радиус аномально растут. Заметим, что при этом составляющие $a_{\mu\nu}$ части (1.10) не имеют особенностей, сохраняют порядок величины, характерной для уровня равновесных тепловых шумов [8] и, следовательно, могут быть опущены в окрестности неравновесной критической точки.

Уравнения динамики для корреляторов $b_{\mu\nu}$ и $\beta_{\mu\nu}$ получим из связанных систем уравнений (1.6), (1.7) и (1.6), (1.9). При этом следует рассматривать расширенные наборы гидродинамических переменных: Φ_μ, $b_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, \ldots, 4$) для (1.6), (1.7) и Φ_μ, $\beta_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, \ldots, 4$) для (1.6), (1.9). Тогда классы нормальных решений уравнений (1.6), (1.7), (1.9), описывающие гидродинамическую стадию эволюции газа, имеют вид

$$(1.14) \qquad f(t, x) = f[\Phi(t); x], \; g(t, x_1, x_2) = g[\Phi(t), b(t); x_1, x_2]$$
$$G(t+\tau, x_1; t, x_2) = G[\Phi(t+\tau), \beta(t+\tau, t); x_1, x_2]$$

2. Гидродинамическая асимптотика длинноволновых частей парных корреляционных функций. Рассмотрим класс нормальных асимптотических при $\mathrm{Kn} \to 0$ решений уравнений (1.6), (1.7) вида

$$(2.1) \qquad f = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Kn})^n f^{(n)}[\Phi(t); x], \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Kn})^n g^{(n)}[\Phi(t), b(t); x_1, x_2]$$

В соответствии со схемой метода ЧЭ [11] введем формальное разложение временной производной в уравнениях (1.6), (1.7)

$$(2.2) \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Kn})^n \frac{\partial^{(n)}}{\partial t}$$

и ограничим класс функций (2.1) условиями неразложимости гидродинамических переменных Φ и b

$$\int dv \Psi_\mu f^{(n)} = \delta_{n0}\Phi_\mu, \quad \int dv_1\, dv_2 \psi_\mu(x_1)\psi_\nu(x_2) g^{(n)} = \delta_{n0} b_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

Получающиеся при помощи таких решений кинетических уравнений (1.6), (1.7) гидродинамические уравнения для Φ и b в N-м приближении имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_\mu = \sum_{n=0}^{N} (\mathrm{Kn})^n \frac{\partial^{(n)}}{\partial t}\Phi_\mu, \quad \frac{\partial}{\partial t} b_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{N} (\mathrm{Kn})^n \frac{\partial^{(n)}}{\partial t} b_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

Явные выражения для $\partial^{(n)}\Phi/\partial t$ и $\partial^{(n)}b/\partial t$ определяются из условий разрешимости уравнений для $f^{(n+1)}$ и $g^{(n+1)}$ соответственно.

Ограничимся построением первых двух приближений функции g, используя известные результаты [11] решения уравнения Больцмана (1.6) методом ЧЭ. Введем обозначение $\partial^{(n)}\Phi_\mu(t, r)/\partial t = \Theta_\mu^{(n)}[\Phi(t); r]$. Уравнения Навье — Стокса будем записывать в форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_\mu(t, r) = \Lambda_\mu[\Phi(t); r] = \Theta_\mu^{(0)}[\Phi(t); r] + \Theta_\mu^{(1)}[\Phi(t); r] \tag{2.5}$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в (1.7), найдем уравнения для первых трех приближений функции g

$$\sum_{i=1,2} J'[f^{(0)}; x_i] g^{(0)} = 0 \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1,2} J'[f^{(0)}; x_i] g^{(1)} = \frac{d_2^{(0)}}{dt} g^{(0)} - \sum_{i=1,2} J'[f^{(1)}; x_i] g^{(0)} - \delta(r_1 - r_2) I[f^{(0)}, f^{(1)} + f^{(1)}, f^{(0)}] \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1,2} J'[f^{(0)}; x_i] g^{(2)} = \frac{d_2^{(0)}}{dt} g^{(1)} + \frac{\partial^{(1)}}{\partial t} g^{(0)} - \sum_{i=1,2} (J'[f^{(1)}; x_i] g^{(1)} + J'[f^{(2)}; x_i] g^{(0)}) - \delta(r_1 - r_2) I[f^{(0)}, f^{(2)} + f^{(2)}, f^{(0)} + f^{(1)}, f^{(1)}] \tag{2.8}$$

$$(d_2^{(0)}/dt = \partial^{(0)}/\partial t + l_{x_1} + l_{x_2})$$

Условия разрешимости уравнений (2.7) и (2.8) (ортогональность их правых частей фазовому подпространству, натянутому на полную систему (1.3) аддитивных инвариантов столкновения) однозначно определяют вид первых двух членов в правых частях уравнений (2.4) для b. Необходимо отметить, что вследствие неортогональности правой части уравнения (1.7) фазовому подпространству, натянутому на аддитивные инварианты столкновений, результирующее уравнение для b в N-м приближении оказывается зависящим от $f^{(N+1)}$ — $(N+1)$-го приближения решения уравнения Больцмана.

Решением уравнения (2.6), удовлетворяющим условию (2.3) при $n = 0$, является функция

$$g^{(0)}(t, x_1, x_2) = \sum_{\mu,\nu=0}^{4} \int dr_1'\, dr_2' b_{\mu\nu}(t, r_1', r_2') \frac{\delta f^{(0)}(t, x_1)}{\delta \Phi_\mu(t, r_1')} \times \frac{\delta f^{(0)}(t, x_2)}{\delta \Phi_\nu(t, r_2')} \equiv (b; \partial_\Phi f^{(0)}, \partial_\Phi f^{(0)}) \tag{2.9}$$

Здесь использовано обозначение ∂_Φ для функциональной производной $\delta/\delta\Phi_\mu(t, r)$; символ $(\cdot;\ \cdot,\cdot)$ означает внутреннее произведение заключенных в скобки функций.

Прежде чем приступать к решению уравнения (2.7), найдем выражение для $d_2^{(0)}g^{(0)}/dt$. Можно показать, что

$$\frac{d_2^{(0)}}{dt}g^{(0)}=\left(\left\{\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}b-(\Theta^{(0)\prime}\cdot b+[\Theta^{(0)\prime}\cdot b]^*)\right\};\ \partial_\Phi f^{(0)},\ \partial_\Phi f^{(0)}\right)+ \tag{2.10}$$
$$+(b;\ \partial_\Phi J'[f^{(0)}]f^{(1)},\ \partial_\Phi f^{(0)})+(b;\ \partial_\Phi f^{(0)},\ \partial_\Phi J'[f^{(0)}]f^{(1)})$$

Действительно, принимая во внимание равенство (2.9), запишем

$$\frac{d_2^{(0)}}{dt}g^{(0)}=\left(\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}\Phi;\partial_\Phi\right)g^{(0)}+\left(\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}b;\partial_\Phi f^{(0)},\partial_\Phi f^{(0)}\right)+(l_{x_1}+l_{x_2})\,g^{(0)} \tag{2.11}$$

С учетом независимости гидродинамических переменных Φ и b, а также равенства

$$\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}f^{(0)}=\left(\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}\Phi;\partial_\Phi\right)f^{(0)}=(\Theta^{(0)};\partial_\Phi)\,f^{(0)}$$

можно убедиться в справедливости соотношения

$$\left(b;\partial_\Phi\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}f^{(0)},\partial_\Phi f^{(0)}\right)+\left(b;\partial_\Phi f^{(0)},\partial_\Phi\frac{\partial^{(0)}}{\partial t}f^{(0)}\right)= \tag{2.12}$$
$$=(\Theta^{(0)\prime}\cdot b;\partial_\Phi f^{(0)},\partial_\Phi f^{(0)})+([\Theta^{(0)\prime}\cdot b]^*;\partial_\Phi f^{(0)},\partial_\Phi f^{(0)})+(\Theta^{(0)};\partial_\Phi)\,g^{(0)}$$

Здесь использовано тензорное обозначение $\Theta^{(0)\prime}$ для линеаризованного оператора Эйлера, компоненты которого определяются формулой

$$\Theta^{(n)\prime}_{\mu,\alpha}[\Phi;r]\,\varphi(r)=\int dr'\varphi(r')\,\delta\Theta^{(n)}_\mu[\Phi;r]/\delta\Phi_\alpha(r') \tag{2.13}$$

при $n=0$; $\Theta^{(0)\prime}\cdot b$ и $[\Theta^{(0)\prime}\cdot b]^*$ — тензоры с компонентами $\Theta^{(0)\prime}_{\mu,\alpha}[\Phi;\ r_1]\,b_{\alpha\nu}(t,\ r_1,\ r_2)$ и $\Theta^{(0)\prime}_{\nu,\alpha}[\Phi;\ r_2]\,b_{\mu\alpha}(t,\ r_1,\ r_2)$, где $\mu,\ \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ 4$, а по повторяющемуся индексу α проводится суммирование от 0 до 4.

Из уравнения для $f^{(1)}$ [11] следует выражение

$$\partial^{(0)}f^{(0)}/\partial t=-l_xf^{(0)}+J'[f^{(0)}]\,f^{(1)}$$

Учтем его в (2.12). Из получившегося при этом соотношения найдем выражение для $(\partial^{(0)}\Phi/\partial t,\ \partial_\Phi)\ g^{(0)}$ и подставим его в (2.11). В результате получим выражение (2.10).

Используем выражение (2.10) при вычислении $\partial^{(0)}b/\partial t$. Условие разрешимости уравнения (2.7) имеет вид

$$\int dv_1\,dv_2\psi_\mu(x_1)\,\psi_\nu(x_2)\frac{d_2^{(0)}}{dt}g^{(0)}=L^{(1)}_{\mu\nu}(r_1,\ r_2)\equiv \tag{2.14}$$
$$\equiv\delta(r_1-r_2)\int dv_1\,dv_2\psi_\mu(x_1)\,\psi_\nu(x_2)\,I\,[f^{(0)},\ f^{(1)}+f^{(1)},\ f^{(0)};\ x_1,\ x_2]$$

Ненулевой вклад в него дают только члены в первых круглых скобках правой части (2.10). Учитывая, что $\int dv\psi_\mu\partial_{\Phi_\nu}f^{(0)}=\delta_{\mu\nu}$, получим

$$\partial^{(0)}b_{\mu\nu}/\partial t=\Theta^{(0)\prime}_{\mu,\alpha}[\Phi;\ r_1]\,b_{\alpha\nu}+\Theta^{(0)\prime}_{\nu,\alpha}[\Phi;\ r_2]\,b_{\mu\alpha}+L^{(1)}_{\mu\nu} \tag{2.15}$$

Подставим (2.15) в (2.10) и используем равенство

$$\partial_\Phi J'[f^{(0)}]\,f^{(1)}=J'[f^{(0)}]\,\partial_\Phi f^{(1)}+J'[f^{(1)}]\,\partial_\Phi f^{(0)}$$

После приведения подобных членов имеем

$$d_2^{(0)}g^{(0)}/dt=J'[f^{(0)};\ x_1]\,(b;\ \partial_\Phi f^{(1)}(x_1),\ \partial_\Phi f^{(0)}(x_2))+ \tag{2.16}$$
$$+J'[f^{(0)};\ x_2]\,(b;\ \partial_\Phi f^{(0)}(x_1),\ \partial_\Phi f^{(1)}(x_2))+$$
$$+\sum_{i=1,\,2}J'[f^{(1)};\ x_i]\,g^{(0)}+(L^{(1)};\ \partial_\Phi f^{(0)},\ \partial_\Phi f^{(0)})$$

С учетом (2.16) уравнение (2.7) преобразуем в

$$J'[f^{(0)};\ x_1]\,\{g^{(1)}-(b;\ \partial_\Phi f^{(1)},\ \partial_\Phi f^{(0)})\}+J'[f^{(0)};\ x_2]\times \tag{2.17}$$
$$\times\{g^{(1)}-(b;\ \partial_\Phi f^{(0)},\ \partial_\Phi f^{(1)})\}=M(t,\ x_1,\ x_2)\equiv$$
$$\equiv(L^{(1)};\ \partial_\Phi f^{(0)},\ \partial_\Phi f^{(0)})-\delta(r_1-r_2)\,I\,[f^{(0)},\ f^{(1)}+f^{(1)},\ f^{(0)};\ x_1,\ x_2]$$

Его решение, удовлетворяющее условиям (2.3) при $n = 1$, имеет вид

(2.18) $$g^{(1)} = (b, \partial_\Phi f^{(1)}, \partial_\Phi f^{(0)}) + (b; \partial_\Phi f^{(0)}, \partial_\Phi f^{(1)}) + g^{(1)\prime}$$

где $g^{(1)\prime}(t, x_1, x_2)$ определяется уравнением

(2.19) $$(J'[f^{(0)}; x_1] + J'[f^{(0)}; x_2])\, g^{(1)\prime} = M(t, x_1, x_2)$$

Вычислим теперь второй член в правой части уравнения (2.4) для b. Используем условие разрешимости уравнения (2.8)

(2.20) $$\int dv_1\, dv_2 \psi_\mu(x_1)\, \psi_\nu(x_2) \left[\frac{d_2^{(0)}}{dt} g^{(1)} + \frac{\partial^{(1)}}{\partial t} g^{(0)}\right] = L_{\mu\nu}^{(2)}(r_1, r_2) \equiv$$
$$\equiv \delta(r_1 - r_2) \int dv_1\, dv_2 \psi_\mu(x_1)\, \psi_\nu(x_2)\, I[f^{(0)}, f^{(2)} + f^{(2)}, f^{(0)} + f^{(1)}, f^{(1)}]$$

Принимая во внимание (2.9), (2.18), а также уравнение [11] для второго приближения $f^{(2)}$ решения уравнения Больцмана методом ЧЭ и проводя преобразования, аналогичные использованным при выводе (2.10), можно получить

(2.21) $$\frac{d_2^{(0)}}{dt} g^{(1)} + \frac{\partial^{(0)}}{\partial t} g^{(0)} = \left(\left\{\frac{\partial^{(1)}}{\partial t} b - (\Theta^{(1)\prime} \cdot b + [\Theta^{(1)\prime} \cdot b]^*)\right\}; \partial_\Phi f^{(0)}; \partial_\Phi f^{(0)}\right) +$$
$$+ \sum_{i=1,2} l_{x_i} g^{(1)\prime} + (\Theta^{(0)}, \partial_\Phi)\, g^{(1)\prime} + (L^{(1)}; \partial_\Phi f^{(1)}, \partial_\Phi f^{(0)}) +$$
$$+ (L^{(1)}; \partial_\Phi f^{(0)}, \partial_\Phi f^{(1)}) + \sum_{i=1,2} J'[f^{(1)}; x_i]\, \{(b; \partial_\Phi f^{(1)}, \partial_\Phi f^{(0)}) +$$
$$+ (b; \partial_\Phi f^{(0)}, \partial_\Phi f^{(1)})\} + \sum_{i=1,2} J'[f^{(2)}; x_i]\, g^{(0)}$$

Подставим (2.21) в (2.20). При вычислении интегралов по пространству скоростей необходимо учесть соотношения

$$\int dv \psi_\mu(x)\, \partial_{\Phi_\nu} f^{(1)} = 0, \qquad \int dv_1\, dv_2 \psi_\mu(x_1)\, \psi_\nu(x_2)\, g^{(1)\prime} = 0$$

следующие из (2.3), а также использовать тот факт, что ψ_μ — собственные функции оператора $J'[f^{(0)}]$, соответствующие пятикратно вырожденному нулевому собственному значению. При этом ненулевой вклад в (2.20) дадут первые три члена в (2.21). В результате получим

(2.22) $$\partial^{(1)} b_{\mu\nu}/\partial t = \Theta_{\mu,\alpha}^{(1)\prime}[\Phi; r_1]\, b_{\alpha\nu} + \Theta_{\nu,\alpha}^{(1)\prime}[\Phi; r_2]\, b_{\mu\alpha} + \Gamma_{\mu,\nu}^{(1)}(r_1, r_2) +$$
$$+ \Gamma_{\nu,\mu}^{(1)}(r_1, r_2) + L_{\mu\nu}^{(2)}(r_1, r_2)$$

(2.23) $$\Gamma_{\mu,\nu}^{(1)}(r_1, r_2) = -\int dv_1\, dv_2 \psi_\mu(x_1)\, \psi_\nu(x_2)\, v_1 \cdot \nabla_1 g^{(1)\prime}$$

Формулы (2.9), (2.18) совместно с уравнениями (2.4) при $N = 1$ для b, (2.15), (2.22) и уравнения Навье — Стокса (2.5) определяют искомый класс нормальных решений кинетических уравнений (1.6), (1.7) в первом порядке теории возмущений по методу ЧЭ. Система гидродинамических уравнений для пространственных корреляторов $b_{\mu\nu}(t, r_1, r_2)$ в этом приближении имеет вид

(2.24) $$\partial b_{\mu\nu}/\partial t - \Lambda_{\mu,\alpha}'[\Phi; r_1]\, b_{\alpha\nu} - \Lambda_{\nu,\alpha}'[\Phi; r_2]\, b_{\mu\alpha} = H_{\mu\nu}[\Phi; r_1, r_2]$$

(2.25) $$H_{\mu\nu}(r_1, r_2) = \Gamma_{\mu,\nu}^{(1)}(r_1, r_2) + \Gamma_{\nu,\mu}^{(1)}(r_1, r_2) + L_{\mu\nu}^{(1)}(r_1, r_2) + L_{\mu\nu}^{(2)}(r_1, r_2)$$

Она представляет собой систему «двухточечных» линеаризованных неоднородных уравнений Навье — Стокса с источниковыми членами $H_{\mu\nu}$ в правых частях. В соответствии с (2.25), (2.14), (2.20), (2.23) и (2.19) эти члены зависят от особенностей мелкомасштабных движений в неоднородном газе и обращаются в нуль для пространственно-однородных систем. В последнем случае физический смысл имеют только тривиальные решения уравнений (2.24). В случае неоднородных систем функции $H_{\mu\nu}$ представляют собой тепловые источники гидродинамических корреляций. Следует отметить, что для стационарных состояний неоднородного газа уравнения (2.24) отличаются от соответствующих уравнений работ [5, 6] структурой неоднородных членов. В [5, 6] неучтены слагаемые $\Gamma^{(1)}$ и $L^{(2)}$ в (2.25). Они определяют источники корреляций, представляющие особый интерес при изучении флуктуаций в неизотермических потоках сжимаемого газа.

Задача построения нормальных решений уравнений (1.6), (1.9) вида

$$G(t+\tau, x_1; t, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Kn})^n G^{(n)} [\Phi(t+\tau), \beta(t+\tau, t); x_1, x_2] \tag{2.26}$$

с формальной точки зрения является частным случаем рассмотренной выше задачи. Ее решение в первом порядке теории возмущений ЧЭ с учетом полученных результатов можно записать сразу:

$$\begin{aligned} G = {} & (\beta(t+\tau; t); \partial_{\Phi(t+\tau)} f^{(0)}(t+\tau, x_1), \partial_{\Phi(t)} f^{(0)}(t, x_2)) + \\ & + (\beta(t+\tau; t); \partial_{\Phi(t+\tau)} f^{(1)}(t+\tau, x_1), \partial_{\Phi(t)} f^{(0)}(t, x_2)) \end{aligned} \tag{2.27}$$

При этом уравнения динамики двухвременных гидродинамических корреляторов β совпадают с линеаризованными уравнениями Навье — Стокса — Фурье

$$\begin{aligned} & \partial\beta_{\mu\nu}/\partial\tau\, (t+\tau,\ r_1;\ t,\ r_2) - \Lambda'_{\mu,\alpha} [\Phi(t+\tau);\ r_1]\, \beta_{\alpha\nu}(t+\tau, r_1; \\ & t,\ r_2) = 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

решения которых в силу (1.13) следует рассматривать с начальными условиями, определяемыми решениями уравнений (2.24), (2.5). Таким образом, принцип Онзагера, определяющий временное поведение флуктуаций макроскопических переменных в равновесной системе, непосредственно обобщается на область неравновесных нестационарных, но устойчивых гидродинамических состояний газовых систем.

3. Расчет источников длинноволновых корреляций в уравнениях (2.24). Исследуем функциональную зависимость неоднородных членов в уравнениях (2.24) от средних значений гидродинамических полей. Для этого предварительно выразим их через традиционные в кинетической теории [11] интегральные скобки.

Рассмотрим выражение (2.23). Принимая во внимание (2.3), его можно привести к виду (по повторяющимся латинским индексам проводится суммирование от 1 до 3)

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}_{\mu,\nu}(r_1, r_2) = {} & \frac{\partial}{\partial r_{1p}} K_{p,\mu\nu} + \delta_{\mu l} K_{p,l\nu} \frac{1}{n(r_1)} \frac{\partial}{\partial r_{1p}} n(r_1) + \\ & + \delta_{\mu 4} \left\{ K_{p,l\nu} m \frac{\partial}{\partial r_{1p}} u_l(r_1) + K_{p,4\nu} \frac{1}{n(r_1)} \frac{\partial}{\partial r_{1p}} n(r_1) \right\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$K_{p,\mu\nu}(r_1, r_2) = -\int dv_1\, dv_2 \psi_\mu(x_1) \psi_\nu(x_2) c_{1p} g^{(1)\prime}, \quad c_{1p} = v_{1p} - u_{1p}(r_1) \tag{3.2}$$

Для вычисления интегралов (3.2) явный вид функции $g^{(1)\prime}$ не нужен. Покажем это. Рассмотрим уравнение (2.19) для нее. Умножим обе его части на $\psi_\nu(x_2)$ и проинтегрируем по v_2. В результате получим

$$\begin{aligned} \int dv_2 \psi_\nu(x_2)\, g^{(1)\prime} = {} & \int dv_2 \psi_\nu(x_2) (J' [f^{(0)}; x_1])^{-1} \times \\ & \times \{(L^{(1)}; \partial_\Phi f^{(0)}(x_1), \partial_\Phi f^{(0)}(x_2)) - \\ & - \delta(r_1 - r_2) I [f^{(0)}, f^{(1)} + f^{(1)}, f^{(0)}; x_1, x_2]\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Умножим обе части этого равенства на $[c_{1p}\psi_\mu(x_1) - c_1^2\delta_{\mu p}/(3n) - k_B T c_{1p}\delta_{\mu 4}/n]$ и проинтегрируем по v_1. При этом второй и третий члены левой части обращаются в нуль, а первый дает (3.2). В правой части (3.3) учтем самосопряженность оператора $(J'[f^{(0)}])^{-1}$, воспользуемся соотношением

$$
\begin{aligned}
&(J'[f^{(0)}])^{-1}\left\{c_p\psi_\mu - \frac{c^2}{3n}\delta_{\mu p} - \frac{k_B T}{n}c_p\delta_{\mu 4}\right\} = \\
&= -\frac{k_B T}{n^2}\left\{\frac{1}{m}B_{pl}\delta_{\mu l} + A_p\delta_{\mu 4}\right\} \\
&\left(A_p = -n\,(J'[f^{(0)}])^{-1}c_p\left(\frac{mc^2}{2k_B T} - \frac{5}{2}\right),\right. \\
&\left.B_{pl} = -\frac{\rho}{k_B T}(J'[f^{(0)}])^{-1}\left(c_p c_l - \frac{1}{3}c^2\delta_{pl}\right)\right)
\end{aligned}
$$

а также примем во внимание условие неразложимости гидродинамических переменных. При этом можно показать, что все члены с $L^{(1)}$ обращаются в нуль. В результате получим

$$
\begin{aligned}
&K_{p,\,\mu\nu}(r_1, r_2) = -\delta(r_1 - r_2)\frac{k_B T}{n^2}\int dv_1\,dv_2\psi_\nu(x_2)\times \\
&\times\left\{\frac{1}{m}B_{pl}(x_1)\delta_{\mu l} + A_p(x_1)\delta_{\mu 4}\right\}I[f^{(0)}, f^{(1)} + f^{(1)}, f^{(0)}; x_1, x_2]
\end{aligned}
$$

Вводя определение модифицированных интегральных скобок для трех произвольных фазовых функций $R(v)$, $H(v)$, $G(v)$

$$
\begin{aligned}
(3.4)\qquad &[R; H, G]^* = -\frac{1}{n^2}\int dv_1 R(v_1)\,J[f^{(0)}H, f^{(0)}G + f^{(0)}G, f^{(0)}H] = \\
&= -\frac{1}{n^2}\int dv_1\,dv_2 H(v_1)\,G(v_2)\,I[f^{(0)}, f^{(0)}R + f^{(0)}R, f^{(0)}; x_1, x_2]
\end{aligned}
$$

это выражение можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad &K_{p,\,\mu\nu}(r_1, r_2) = \delta(r_1 - r_2)\,k_B T\left\{\frac{1}{m}\delta_{\mu l}\,[h^{(1)}; B_{pl}, \psi_\nu]^* +\right. \\
&\left.+\,\delta_{\mu 4}[h^{(1)}; A_p, \psi_\nu]^*\right\}, \qquad h^{(1)} = f^{(1)}/f^{(0)}
\end{aligned}
$$

Выражения (2.14) и (2.20) для $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ преобразуем, используя формулу

$$
\int dv_1\,dv_2\psi_\mu(x_1)\,\psi_\nu(x_2)\,I[f, f; x_1, x_2] = -\int dv_1\psi_\mu(x_1)\,\psi_\nu(x_1)\,J[f, f; x_1]
$$

следующую из формулы (1.3) работы [4], и принимая во внимание определение стандартной интегральной скобки [11]

$$
(3.6)\qquad [R; H] = -\frac{1}{n^2}\int dv H(v)\,J'[f^{(0)}; x]\,f^{(0)}R(v)
$$

В результате получим

$$
\begin{aligned}
(3.7)\qquad &L^{(1)}_{\mu\nu}(r_1, r_2) = \delta(r_1 - r_2)\,n^2\,[h^{(1)}; \psi_\mu\psi_\nu] \\
&L^{(2)}_{\mu\nu}(r_1, r_2) = \delta(r_1 - r_2)\,n^2\left\{[h^{(2)}; \psi_\mu\psi_\nu] + \frac{1}{2}[\psi_\mu\psi_\nu; h^{(1)}, h^{(1)}]^*\right\} \\
&h^{(2)} = f^{(2)}/f^{(0)}
\end{aligned}
$$

Таким образом, дальнейшие расчеты могут быть проведены с применением хорошо разработанных в кинетической теории газов методов расчета интегральных скобок [11]. Опуская подробности, приведем результаты таких расчетов, ограничиваясь для простоты учетом только первых членов разложения функций, определяющих $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ по полиномам Сонина (максвелловский газ). Некоторые из компонент тензоров (3.5), (3.7) в этом приближении равны нулю. Отличные от нуля компоненты имеют вид

(3.8) $$K_{p,l0}(r_1,r_2)=\delta(r_1-r_2)\frac{1}{n}P^{(1)}_{pl},\quad K_{p,40}(r_1,r_2)=\delta(r_1-r_2)\frac{m}{n}q^{(1)}_p$$

$$K_{r,lp}(r_1,r_2)=\delta(r_1-r_2)\frac{4}{15}\frac{1}{n\rho}E^{ps}_{rl}q^{(1)}_s$$

(3.9) $$L^{(1)}_{pl}(r_1,r_2)=\delta(r_1-r_2)\frac{p^{(0)}}{\rho n\eta}P^{(1)}_{pl},$$

$$L^{(1)}_{p4}(r_1,r_2)=\delta(r_1-r_2)\frac{5}{2}\frac{k_Bp^{(0)}}{\rho n\lambda}q^{(1)}_p$$

(3.10) $$L^{(2)}_{pl}(r_1,r_2)=\delta(r_1-r_2)\frac{p^{(0)}}{\rho n\eta}P^{(2)}_{pl},$$

$$L^{(2)}_{p4}(r_1,r_2)=\delta(r_1-r_2)\frac{5}{2}\frac{k_Bp^{(0)}}{\rho n\lambda}q^{(2)}_p$$

$$L^{(2)}_{44}(r_1,r_2)=\delta(r_1-r_2)\frac{2}{n^2}\Big\{k_BT\,(P^{(1)}_{pl}\nabla_pu_l+\nabla_pq^{(1)}_p)-$$
$$-\frac{1}{n}q^{(1)}_l\nabla_lp^{(0)}+mq^{(1)}_pE_p+\frac{7}{2}k_Bq^{(1)}_p\nabla_pT\Big\}$$

$$p^{(0)}=nk_BT,\quad P^{(1)}_{rl}=-2\eta E^{rl}_{tp}\nabla_tu_p,\quad q^{(1)}_p=-\lambda\nabla_pT$$

$$E^{tp}_{rl}={}^1/_2(\delta_{pr}\delta_{tl}+\delta_{pl}\delta_{tr})-{}^1/_3\delta_{tp}\delta_{rl}$$

Здесь η,λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности, $P_{rl}^{(2)}$ и $q_p^{(2)}$ — барнеттовские добавки к тензору касательных напряжений и тепловому потоку [11], δ_{pl} — символ Кронекера.

Из формул (2.25), (3.1) и (3.8), (3.9), (3.10) следует, что интенсивность тепловых источников длинноволновых корреляций в газе возрастает при увеличении степени его неравновесности. Слагаемые (3.9) в (2.25) имеют нулевой порядок величины по числу Кнудсена, (3.1), (3.8) и (3.10) — первый. Формулы (3.10) описывают вклад членов барнеттовского приближения для средних значений термодинамических потоков в источники корреляций. В случае течений, удовлетворительно описываемых уравнениями Навье—Стокса—Фурье, эти члены в (2.25) можно опустить. При этом

(3.11) $$H_{\mu\nu}(r_1,r_2)=\delta_{\mu p}\delta_{\nu l}\delta(r_1-r_2)\frac{p^{(0)}}{\rho n\eta}P^{(1)}_{pl}+[\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 4}+$$
$$+\delta_{\mu 4}\delta_{\nu 0}]\,\delta(r_1-r_2)\frac{m}{n}P^{(1)}_{pl}\nabla_pu_l+[\delta_{\mu 4}\delta_{\nu r}+\delta_{\mu r}\delta_{\nu 4}]\,\delta(r_1-r_2)\times$$
$$\times\frac{1}{n}\left[\frac{5}{2}\frac{k_Bp^{(0)}}{\rho\lambda}q^{(1)}_r+\frac{4}{15}\frac{1}{n}q^{(1)}_lE^{rl}_{tp}\nabla_tu_p\right]+$$
$$+\left[\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 4}\frac{1}{n(r_2)}\nabla_{2p}+\delta_{\mu 4}\delta_{\nu 0}\frac{1}{n(r_1)}\nabla_{1p}\right]\delta(r_1-r_2)\,mq^{(1)}_p+$$
$$+\left[\delta_{\mu 0}\delta_{\nu p}\frac{1}{n(r_2)}\nabla_{2l}+\delta_{\mu p}\delta_{\nu 0}\frac{1}{n(r_1)}\nabla_{1l}\right]\delta(r_1-r_2)\,P^{(1)}_{pl}+$$
$$+\delta_{\mu r}\delta_{\nu l}\left[\frac{1}{n(r_1)}\nabla_{1t}+\frac{1}{n(r_2)}\nabla_{2t}\right]\delta(r_1-r_2)\frac{4}{15}\frac{1}{\rho}E^{rl}_{tp}q^{(1)}_p$$

Уравнения (2.24) с неоднородными членами (3.11) не содержат неравновесных параметров, характерных только для газовых систем. Поэтому они могут быть использованы при изучении неравновесных крупномасштабных флуктуаций в потоках жидкостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Климонтович Ю. Л.* Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975. 352 с.
2. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с

3. *Гречанный О. А.* К теории малых флуктуаций в неравновесном газе.— В кн: Теплофизика и теплотехника. Вып. 36. Киев: Наук. думка, 1979, с. 35—41.
4. *Гречанный О. А., Токарчук В. В.* К кинетической теории тепловых гидродинамических флуктуаций в неоднородном газе.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 116—127.
5. *Kirkpatrick T. R., Cohen E. G. D., Dorfman J. R.* Fluctuations in a nonequilibrium steady states: Basic equations.— Phys. Rev. A, 1982, v. 26, No. 2, p. 950—971.
6. *Ronis D., Procaccia I., Machta J.* Statistical mechanics of stationary states. VI. Hydrodynamics fluctuations theory far from equilibrium.— Phys. Rev. A., 1980, v. 22, No. 2, p. 714—724.
7. *Фишер И. З., Лесников В. П.* Неравновесные тепловые гидродинамические флуктуации.— В кн.: Физика жидкого состояния. Вып. 4. Киев: Вища школа, 1976, с. 3—20.
8. *Лесников В. П., Фишер И. З.* Тепловые флуктуации и молекулярное рассеяние света в жидкости вблизи состояния конвективной неустойчивости.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, вып. 4, с. 1341—1348.
9. *Хонькин А. Д.* О влиянии неравновесных флуктуаций на возникновение турбулентности.— В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1974, с. 141—143.
10. *Гречанный О. А., Токарчук В. В.* Тепловые гидродинамические флуктуации вблизи состояния конвективной неустойчивости Релея — Бенара.— В кн.: Конвективный теплоперенос. Киев: Наук. думка, 1982, с. 76—88.
11. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.

Киев

Поступила в редакцию
11.III.1984