Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 4, 1985

УДК 533.6.011

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И ПРИНЦИП МАТЕРИАЛЬНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ОТ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Галкин В. С., Носик В. И.

Исследуются свойства кинетического уравнения Больцмана (УБ) при евклидовых преобразованиях — нестационарных вращениях и переносах систем отсчета. Показано, что при переходе от инерциальной системы отсчета к вращающейся в УБ появляются дополнительные инерционные слагаемые, а при переходе от неинерциальной к неинерциальной оно инвариантно относительно указанных преобразований. Таким же свойством обладают алгоритмы и результаты приближенных методов его решения, в частности метод Чепмена — Энскога (МЧЭ). Дополнительные слагаемые возникают, в частности, в выражениях для напряжений и теплового потока в приближении Барнетта, и в таком смысле эти выражения зависят от системы отсчета. Этот результат ограничивает условием малости числа Кнудсена область применимости одного из основных постулатов аксиоматической теории механики сплошных сред — принципа материальной независимости от системы отсчета (или принципа материальной объективности), согласно которому конституитивные (определяющие) соотношения должны быть инвариантны относительно непрерывных изменений системы отсчета. Критически анализируются работы данного направления.

Более десяти лет ведется дискуссия [1—7], являющаяся следствием того известного факта [8], что формулы для напряжений P_{ij} и тепловых потоков q_i в приближении Барнетта содержат в качестве сомножителей компоненты тензора вращения

$$\Omega_{km} = {}^1/_2\,(\partial u_k/\partial x_m - \partial u_m/\partial x_k)$$

и в силу этого неинвариантны относительно евклидовой группы преобразований. Иначе говоря, в соотношениях для P_{ij} и q_i при переходе от инерциальной системы отсчета к неинерциальной возникают дополнительные слагаемые, т. е. следствием неинерциальности системы отсчета не будет только появление «эйлеровых» сил инерции в уравнении импульса.

Отсюда сначала был сделан вывод [1—3] об ограниченности принципа материальной независимости от системы отсчета [9, 10]. Были указаны [2] неинвариантные слагаемые в P_{ij}, q_i. Изучались [1] свойства уравнений переноса Максвелла для P_{ij}, q_i и итерационного метода их решения в неинерциальной системе отсчета; было отмечено, что неинвариантность в указанном выше смысле обусловлена действием микроскопических кориолисовых сил. Действие последних рассматривалось более подробно [3]. Некоторые допущенные неточности [1, 2] исправлены [5] (см. п. 6).

В дальнейшем обсуждался вопрос о применимости выводов, следующих из кинетической теории, к принципу материальной объективности [4—6], изучались свойства УБ при евклидовых преобразованиях [4]. Был сделан неверный вывод, что решения УБ удовлетворяют рассматриваемому принципу, что привело даже к заключению [6] о некорректности высших (начиная с барнеттовского) приближений методов Чепмена — Энскога и Максвелла решения УБ для числа Кнудсена Kn → 0.

Автор работы [7] снова обратился к приближению Барнетта для P_{ij}, q_i и предложил обобщить принцип материальной объективности (п. 7).

Вопросы оснований механики сплошных сред, их связь с кинетической теорией имеют принципиальное значение [11]. Обсуждению именно таких вопросов посвящены работы [1—7]. Однако при этом не дано достаточно полного рассмотрения задачи, сделаны ошибочные выводы различного уровня значимости (особенно в [6]), связанные, в частности, с путаницей в определениях.

Цель данной статьи — последовательный анализ поставленных в [1—7] вопросов. Исследуются свойства УБ при евклидовых преобразованиях, затем алгоритма МЧЭ, напряжений и теплового потока в приближении Барнетта. В результате делается вывод об отсутствии противоречий между свойствами уравнения и его приближенных решений. Обсуждаются некоторые примеры и область применимости принципа материальной объективности.

1. Введем необходимые определения и обозначения [1, 10]. Вектор, его компоненты и матрица-столбец из них обозначаются одинаковыми малыми буквами (например, $\mathbf{x}$, x_i, x), аналогичные величины для тензора второго ранга — одинаковыми большими буквами (например, $\mathbf{P}$, P_{ij}, P), причем $i, j = 1, 2, 3$, применяется суммирование по повторяющимся индексам, используются матричные формулы преобразования векторов и тензоров при изменениях системы отсчета.

Пусть Σ, Σ^*, Σ° — ортонормированные декартовы системы отсчета, где Σ — инерциальная, а остальные — неинерциальные, координаты в них связаны евклидовыми преобразованиями

$$x^* = R^*(t)x + b^*(t), \quad x^\circ = R^\circ(t)x + b^\circ(t) \tag{1.1}$$

$$t^* = t + d^*, \quad t^\circ = t + d^\circ$$

Описывающие вращение матрицы R^*, R° ортогональны ($RR^T = R^TR = I$, I — единичная матрица). Для сокращения формул положим $b_i(t) = 0$, $d = 0$, так как зависимости P_{ij}, q_i от системы отсчета обусловлены ее нестационарным вращением [1—7] и сделанные ниже выводы не зависят от этого допущения.

Координаты Σ°-, Σ^*-систем связаны соотношениями

$$x^\circ = Qx^*, \quad Q = R^*R^{*T} \tag{1.2}$$

Матрицы угловых скоростей координатных осей Σ^*-, Σ°-систем относительно Σ таковы (точка означает дифференцирование по времени t):

$$W^* = R^{*\cdot}R^{*T}, \quad W^\circ = R^{\circ\cdot}R^{\circ T}, \quad W^\circ = QW^*Q^T + Q^\cdot Q^T \tag{1.3}$$

Для скоростей молекул $\xi = \mathbf{x}^\cdot$, $\xi^* = \mathbf{x}^{*\cdot}$, $\xi^\circ = \mathbf{x}^{\circ\cdot}$ в силу (1.1) имеем

$$\xi^* = R^*\xi + R^{*\cdot}x, \quad \xi^\circ = Q\xi^* + Q^\cdot x^* \tag{1.4}$$

Из формул (1.1)—(1.4) следуют выражения для ускорений молекул

$$\xi^{*\cdot} = R^*F(x^*, t) + 2W^*\xi^* + W^{*\cdot}x^* - W^*W^*x^* \tag{1.5}$$

$$\xi^{\circ\cdot} = R^\circ F(x^\circ, t) + 2W^\circ\xi^\circ + W^{\circ\cdot}x^\circ - W^\circ W^\circ x^\circ$$

Здесь $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ — внешняя сила, отнесенная к массе молекулы m, остальные слагаемые в (1.5) соответствуют кориолисову, вращательному и центростремительному ускорениям.

Следуя [1, 6, 7], назовем объективным тензор ранга n с компонентами $a_{i_1i_2\ldots i_n}$, если при (1.1) имеем $a^*_{i_1\ldots i_n} = R^*_{i_1j_1}\ldots R^*_{i_nj_n}a_{j_1\ldots j_n}$. Например, для объективного тензора второго ранга $A^* = R^*AR^{*T}$, для вектора $w^* = R^*w$, для скаляра $a^*(\mathbf{x}^*, t) = a(\mathbf{x}, t)$.

Как показано в [4, 6], функция распределения молекул по скоростям $f = f(\xi, \mathbf{x}, t)$, элемент пространства скоростей $d\xi$ и, следовательно, плотность газа ρ — объективные скаляры. Так как

$$\mathbf{u} = \frac{m}{\rho}\int \xi f\, d\xi$$

то в силу (1.4) макроскопическая скорость $\mathbf{u}$ не является объективным вектором, поскольку

$$u^* = R^*u + R^{*\cdot}x, \quad u^\circ = Qu^* + Q^\cdot x^* \tag{1.6}$$

Необъективен также тензор $\mathbf{V}$ с компонентами $V_{ij} = \partial u_i/\partial x_j$, так как из (1.6), (1.3) имеем

$$V = R^{*T}(V^* - W^*)R^* = R^{\circ T}(V^\circ - W^\circ)R^\circ \tag{1.7}$$

В то же время тензор с компонентами — производными от V_{ij} по x_k — объективен.

Подчеркнем, что для тензора $\mathbf{V}^* - \mathbf{W}^*$ из (1.7) получаем

$$V^* - W^* = Q^T(V^\circ - W^\circ)Q \tag{1.8}$$

В силу (1.4), (1.6) вектор собственной скорости молекул $\mathbf{c} = \xi - \mathbf{u}$ ($c^* = R^*c$, $c^\circ = Qc^*$) объективен. Поэтому объективны и центральные моменты функции распределения

$$M^{(n)} = m\int \mathbf{c}^{(n)} f\, d\xi \equiv [\mathbf{c}^{(n)}] \tag{1.9}$$

и производные по координатам от них, в частности тензор напряжений $\mathbf{P}$ с компонентами $P_{ij} = [c_i c_j - {}^1/_3 \delta_{ij} c^2]$, давление $p = {}^1/_3[c^2]$, тепловой поток $\mathbf{q} = {}^1/_2[\mathbf{c}c^2]$.

2. Тот факт, что из кинетической теории следует объективность $\mathbf{P}$, $\mathbf{q}$, привел автора [6] к неверному выводу: наличие в барнеттовских напряжениях $P_{ij}^{(2)}$ и тепловых потоках $q_i^{(2)}$ членов с множителями Ω_{km} якобы является следствием ошибочности приближенных методов кинетической теории, в частности МЧЭ. Однако из объективности тензоров не следует, вообще говоря, инвариантность относительно преобразований (1.1) формул, выражающих эти тензоры через другие (объективны, т. е. не зависят от системы отсчета, правила пересчета объективных величин, а не зависимости этих величин от пространственных производных макропараметров). Требование такой инвариантности является дополнительным постулатом — принципом материальной объективности [9, 10]. Как показано ниже, нарушение этого принципа в $P_{ij}^{(2)}$, $q_i^{(2)}$ является следствием соответствующих свойств УБ.

Ошибочный вывод [6] связан также с неверной трактовкой результатов [4].

3. Результаты работы [4] состоят в следующем. В инерциальной Σ-системе уравнение Больцмана имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \xi_j^{\cdot} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} = J(f), \quad \xi_j^{\cdot} = F_j(\mathbf{x}, t) \tag{3.1}$$

Величина $\mathbf{F}$ предполагалась [4] произвольной функцией ξ, однако тогда третье слагаемое в левой части (3.1) должно [12] записываться в виде $\partial(\xi_j^{\cdot} f)/\partial \xi_j$.

Интеграл столкновений $J(f)$ инвариантен относительно евклидовой группы преобразований [4]. Действительно, он равен разности «прибыли» и «убыли» числа молекул в элементе фазового объема, неизменного при (1.1), обусловленной мгновенными, «точечными» столкновениями молекул. Это свойство особенно наглядно в случае моделей интеграла столкновений типа релаксационной.

Уравнение (3.1) с учетом (1.1), (1.4) в неинерциальной Σ^*-системе можно привести к виду

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} + \xi_j^* \frac{\partial f^*}{\partial x_j^*} + \xi_j^{*\cdot} \frac{\partial f^*}{\partial \xi_j^*} = J^*(f^*) \tag{3.2}$$

Величина $\xi_j^{*\cdot}$ дается формулой (1.5). В Σ°-системе получаем то же уравнение при замене звездочек на градусы. Таким образом, УБ сохраняет свой вид и в этом смысле инвариантно относительно евклидовых преобразований [4]. Конечно, в этом смысле инвариантно и уравнение импульса, которое получается после умножения уравнения (3.2) на $m\xi_i^*$ и интегрирования результата по всему пространству скоростей

$$(3.3)\qquad a_i^* = F_i^* - \frac{1}{\rho^*}\frac{\partial T_{ik}^*}{\partial x_k^*} \qquad \left(a_i^* \equiv \frac{D^* u_i^*}{Dt}\right)$$

$$F_i^* = F_i(\mathbf{x}^*, t) + 2W_{ik}^* u_k^* - W_{ik}^* W_{km}^* x_m^* + W_{ik}^{*\cdot} x_k$$

$$\frac{D^*}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j^* \frac{\partial}{\partial x_j^*}, \quad T_{ij} = P_{ij} + p\delta_{ij}, \quad p = \rho\frac{k}{m}T$$

Умножая (3.2) на m и $^1/_2 mc^{*2}$ и интегрируя по скоростям, получаем уравнения неразрывности и энергии

$$(3.4)\qquad \frac{D^*\rho^*}{Dt} + \rho^* V_{jj}^* = 0, \quad \frac{3}{2} n^* k \frac{D^* T^*}{Dt} + T_{ij}^* V_{ij}^* + \frac{\partial q_j^*}{\partial x_j^*} = 0$$

Как известно, дополнительные инерционные слагаемые в (3.4) «исчезают» из-за антисимметричности W. В Σ-системе нужно опустить звездочки и положить $\mathbf{W}_{ij} \equiv 0$.

Данное свойство инвариантности УБ привело автора [4] к выводу о выполнении принципа материальной объективности в кинетической теории. Однако из инвариантности уравнения импульса в форме (3.3) (и вообще второго закона Ньютона при введении соответствующего поля ускорений [9]) этот принцип не следует. Тем более он не выполняется в кинетической теории. Прежде чем переходить к доказательству, обратим внимание на следующее. Если $F_i \equiv 0$, то $\xi_i^{\cdot} \equiv 0$ и при переходе от Σ- к Σ^*-системе (короче, при $\Sigma \to \Sigma^*$) в УБ появляются дополнительно инерционные слагаемые, так как $\xi_i^{*\cdot} \neq 0$. Однако при $\Sigma^* \to \Sigma^\circ$ оно инвариантно. Такими же свойствами обладает и уравнение импульса.

Именно такие свойства характерны для центральных моментов функции распределения (1.9), в частности $\mathbf{P}$, $\mathbf{q}$, причем и при $\mathbf{F} \neq 0$.

4. Так как центральные моменты функции распределения (1.9) являются интегралами с весами — произведениями компонент собственных скоростей молекул $\mathbf{c} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}$, то перейдем в (3.1) от переменных $\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{x}$, t к переменным $\mathbf{c}$, $\mathbf{x}$, t. В силу сказанного выше о свойствах интеграла столкновений он инвариантен относительно такого преобразования [8]. Проведя известные [8] выкладки с использованием уравнения импульса (3.3) в Σ-системе, получим УБ для $f = f(\mathbf{c}, \mathbf{x}, t)$

$$(4.1)\qquad \frac{Df}{Dt} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial c_i} - V_{ij} c_j \frac{\partial f}{\partial c_i} = J(f)$$

Подчеркнем, что слагаемые с F_j сократились и об инвариантности типа рассмотренной в п. 3 речи быть не может.

Источником инерционных слагаемых в (4.1) являются V_{ij} в силу (1.7) и $Df/Dt \equiv \partial f/\partial t + u_j \partial f/\partial x_j$, остальные слагаемые инвариантны относительно преобразований (1.1). Используя формулы п. 1, получаем

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{D^* f^*}{Dt} + W_{ij}^* c_j^* \frac{\partial f^*}{\partial c_i^*}$$

Поэтому в Σ^*-системе уравнение (4.1) примет вид

$$(4.2)\qquad \frac{D^* f^*}{Dt} + c_i^* \frac{\partial f^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{\rho^*}\frac{\partial T_{ij}^*}{\partial x_j^*}\frac{\partial f^*}{\partial c_i^*} - (V^* - 2W^*)_{ij} c_j^* \frac{\partial f^*}{\partial c_i^*} = J^*(f^*)$$

Появление слагаемого $2W_{ij}^* c_j^* \partial f^*/\partial c_i^*$ физически обусловлено микроскопическими силами Кориолиса, которые не исключаются при помощи макроскопического уравнения импульса.

Таким образом, при $\Sigma \to \Sigma^*$ в УБ (4.1) появляются дополнительные инерционные слагаемые, при $\Sigma^* \to \Sigma^\circ$ оно инвариантно: в Σ°-системе получаем (4.2) при замене звездочек на градусы.

Умножим уравнение (4.1) на mc_kc_m и проинтегрируем по $\mathbf{c}$. В случае максвелловских молекул, когда вязкость μ пропорциональна T, интегрирование оператора столкновений проводится в явном виде, в результате получаем систему уравнений для P_{km} (незамкнутую, так как в них входят производные от моментов третьего порядка). Важно, что в этих уравнениях слагаемые с внешними силами, естественно, отсутствуют. Однако уравнения для $P_{km}{}^*$, аналогично получаемые из (4.2), будут содержать инерционные слагаемые. Как ни странно, но такое свойство уравнений для напряжений привело автора [6] к «окончательному» заключению о некорректности методов ЧЭ и Максвелла.

Конечно, те же результаты получаются и при интегрировании с указанными весами уравнений (3.1), (3.2): интеграл от третьего члена левой части (3.1) равен нулю в отличие от соответствующего интеграла в (3.2). Именно такой «несимметрией» при интегрировании УБ объясняются обсуждаемые свойства центральных моментов функции распределения.

Установленные свойства имеют место и в результатах асимптотических (для $\mathrm{Kn} \to 0$) методов решения УБ. Остановимся на наиболее критикуемом в [6] МЧЭ. Цель этого метода — получение разложения решения УБ в виде ряда $f \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}$, $f^{(n)} \sim \mathrm{Kn}^n$, $f^{(0)}$ — локально максвелловская функция. Величины $f^{(n)}$ — функции от собственных скоростей $\mathbf{c}$, это — общее свойство внешних (по отношению к кнудсеновским слоям) асимптотических разложений этого уравнения. По известным $f^{(n)}$ вычисляются ряды

$$P_{ij} \sim \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)}, \quad q_i \sim \sum_{n=0}^{\infty} q_i^{(n)}, \quad P_{ij}^{(0)} = 0, \quad q_i^{(0)} = 0$$

которые замыкают уравнения сохранения.

Именно в получении таких рядов состоит смысл МЧЭ, вопрос о том, сколько членов рядов необходимо учитывать, решается отдельно для каждого класса течений в зависимости от требуемой точности. Учитывая $P_{ij}{}^{(1)}$, $q_i{}^{(1)}$, получаем уравнения Навье — Стокса — Фурье, учет $P_{ij}{}^{(2)}$, $q_i{}^{(2)}$ дает уравнения Барнетта.

В соответствии с (4.1) общий алгоритм МЧЭ можно записать в виде

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{D_m f^{(n-m)}}{Dt} + c_i \frac{\partial f^{(n)}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \sum_{m=0}^{n} \frac{\partial T_{ij}^{(m)}}{\partial x_j} \frac{\partial f^{(n-m)}}{\partial c_i} - V_{ij} c_j \frac{\partial f^{(n)}}{\partial c_i} + (\delta J)^{(n)} = I(f^{(n+1)}) \tag{4.3}$$

Выражение (4.3) есть уравнение для $f^{(n+1)}$, под $(\delta J)^{(n)}$ понимается соответствующий результат разложения интеграла столкновений в ряд по Kn, величина $I(f)$ — линеаризованный относительно $f^{(0)}$ интеграл столкновений. Появление операторов D_m/Dt — следствие применяемого в методе исключения полных производных по времени от макровеличин при помощи уравнений сохранения (3.3), (3.4) в Σ-системе. Действие этих операторов на макровеличины подчиняется формулам

$$\frac{D_0\rho}{Dt} = -\rho\nabla\mathbf{u}, \quad \frac{D_0\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho}(\mathbf{F} - \nabla p), \quad \frac{D_0 T}{Dt} = -\frac{2T}{3}\nabla\mathbf{u} \tag{4.4}$$

$$\frac{D_{m\geqslant 1}\rho}{Dt}=0,\quad \frac{D_{m\geqslant 1}u_i}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{ij}^{(m)}}{\partial x_j},\quad \frac{D_{m\geqslant 1}T}{Dt}=$$
$$=-\frac{2}{3nk}\left(P_{ij}^{(m)}V_{ij}+\frac{\partial q_i^{(m)}}{\partial x_i}\right)$$

Заметим, что почти во всех руководствах по МЧЭ говорится об исключении частных, а не полных производных по t от макровеличин, что приводит к недоразумениям в стационарном случае.

В итоге $f^{(n)}$, $n\geqslant 1$ представляет собой сумму из величин с коэффициентами — функциями **c**, содержащих произведения тензоров различных рангов, образованных из пространственных производных различных порядков от u_i, T, ρ. Тензоры, составленные из производных от объективных скаляров T, ρ, $\nabla\mathbf{u}$, объективны. Компоненты скорости u_i в явном виде не входят, входят лишь производные от них — компоненты необъективного тензора $\mathbf{V}$.

Источником инерционных слагаемых являются не только члены уравнения (4.3), содержащие V_{ij}, но и операторы (4.4) (а не только [6] $D_m u_i/Dt$). Действительно, например в силу (4.4)

$$\frac{D_0}{Dt}\frac{\partial T}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{2T}{3}\nabla\mathbf{u}\right)-V_{ki}\frac{\partial T}{\partial x_k},\quad \frac{D_0}{Dt}V_{ij}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\rho}(F-\nabla p)_i-V_{kj}V_{ik}$$

где первые слагаемые объективны.

Следовательно, при $\Sigma\to\Sigma^*$ в (4.3) неинвариантными будут только слагаемые, содержащие компоненты тензора $\mathbf{V}$, преобразующиеся по правилу (1.7). Для Σ^*-системы в (4.3) нужно всюду добавить звездочки сверху, а вместо V_{ij} записать $V_{ij}^*-W_{ij}^*$, из-за чего появляются, вообще говоря, зависящие от системы отсчета слагаемые с множителями W_{ij}^*. Полученное уравнение будет инвариантным при $\Sigma^*\to\Sigma^\circ$ (в силу (1.8) $V_{ij}^*-W_{ij}^*$ заменяются на $V_{ij}^\circ-W_{ij}^\circ$).

Таким образом, общий алгоритм МЧЭ неинвариантен при $\Sigma\to\Sigma^*$ и инвариантен при $\Sigma^*\to\Sigma^\circ$, т. е. исходные свойства УБ при евклидовых преобразованиях сохраняются. В методе Максвелла проводятся разложения центральных моментов функции распределения в ряды по Kn при использовании тех же процедур, что и в МЧЭ. Метод Грэда является обобщением на случай произвольных межмолекулярных сил. Аналогично показывается, что алгоритмы этих методов обладают такими же свойствами при евклидовых преобразованиях. Наконец, отрезок ряда Гильберта для f может быть получен из соответствующего отрезка ряда в МЧЭ путем переразложения входящих в последний u_i, T, ρ в ряды по Kn.

5. В первом приближении МЧЭ для P_{ij} и q_i получаются известные выражения Навье — Стокса и Фурье, удовлетворяющие принципу материальной объективности.

Рассмотрим подробнее приближение Барнетта (именно оно было предметом исследований [1, 2, 5—7]). Выражение для дополнительных (к навье-стоксовским) членов компонентов тензора напряжений в инерциальной системе отсчета имеют вид [12]

$$P_{ij}^{(2)}=\omega_1 V_{kk}\langle V_{ij}\rangle+\omega_2\left\{\left\langle F_{i,j}-\left(\frac{1}{\rho}p_{,i}\right)_{,j}\right\rangle-\right.$$
$$\left.-\langle V_{ik}V_{kj}\rangle-2\langle\langle V_{ik}\rangle V_{kj}\rangle\right\}+\omega_3\frac{k}{m}\langle T_{,ij}\rangle+$$
$$+\frac{\omega_4}{\rho T}\langle p_{,i}T_{,j}\rangle+\omega_5\frac{k}{mT}\langle T_{,i}T_{,j}\rangle+\omega_6\langle\langle V_{ik}\rangle\langle V_{kj}\rangle\rangle \tag{5.1}$$

$$\omega_\alpha = \frac{\mu^2}{p} K_\alpha, \quad \langle A_{ij} \rangle = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}A_{kk}, \quad A_{,ij} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j}$$

Коэффициенты K_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, 6$ в общем случае зависят от температуры T, μ — вязкость.

Осуществим преобразования $\Sigma \to \Sigma^*$, $\Sigma^* \to \Sigma^\circ$, затем непосредственно вычислим $P_{ij}^{*(2)}$ в Σ^*-системе при помощи (4.2) и сравним полученные выражения.

Среди входящих в выражение (5.1) тензоров необъективен только **V** (величина V_{kk} и тензор $\langle \mathbf{V} \rangle$ объективны). Перейдем в Σ^*-систему. В матричной записи имеем

$$\begin{aligned} -\omega_2 \{\langle VV \rangle + 2\langle\langle V \rangle V\rangle\} = -\omega_2{}^* \{\langle R^{*T} V^* V^* R^* \rangle + \\ + \langle R^{*T} W^* W^* R^* \rangle - \langle R^{*T} V^* W^* R^* \rangle - \langle R^{*T} W^* V^* R^* \rangle + \\ + 2\langle R^{*T} \langle V^* \rangle V^* R^* \rangle - 2\langle R^{*T} \langle V^* \rangle W^* R^* \rangle\} \end{aligned}$$

Учитывая равенства

$$2\langle\langle V^* \rangle W^* \rangle = \langle V^* W^* \rangle - \langle W^* V^* \rangle, \quad W_{ij}{}^* = -W_{ji}{}^*$$

окончательно найдем

$$P^{*(2)} = \Gamma^* + \omega_2{}^* B, \; B = 2\langle W^* V^* \rangle - \langle W^* W^* \rangle + 4\langle\langle V^* \rangle \times \times W^* \rangle \tag{5.2}$$

причем $P^{*(2)} = R^* P^{(2)} R^{*T}$.

Здесь через Γ^* обозначена правая часть выражения (5.1) со звездочками сверху у всех переменных.

При переходе $\Sigma^* \to \Sigma^\circ$ из группы членов Γ^* в $P^{\circ(2)} = QP^{*(2)}Q^T$ добавляются инерционные слагаемые, аналогичные $\omega_2{}^*B$, но с заменой $\omega_2{}^*$, V^*, W^* на $\omega_2{}^\circ$, V°, $\dot{Q}Q^T$ соответственно, т. е.

$$\omega_2{}^\circ \{2\langle \dot{Q}Q^T V^\circ \rangle - \langle \dot{Q}Q^T \dot{Q}Q^T \rangle + 4\langle\langle V^\circ \rangle \dot{Q}Q^T \rangle\} \tag{5.3}$$

Преобразуем слагаемые в выражении для B в (5.2), используя равенство $V^* = Q^T V^\circ Q - Q^T \dot{Q}$ и формулу (1.3) для W°. Найдем

$$\begin{aligned} \omega_2{}^\circ QBQ^T = \omega_2{}^\circ Q \{2\langle (Q^T W^\circ Q - Q^T \dot{Q}) \cdot \\ \cdot (Q^T V^\circ Q - Q^T \dot{Q}) \rangle - \langle (Q^T W^\circ Q - Q^T \dot{Q})(Q^T W^\circ Q - Q^T \dot{Q}) \rangle + \\ + 4\langle Q^T \langle V^\circ \rangle Q (Q^T W^\circ Q - Q^T \dot{Q}) \rangle\} Q^T = \\ = \omega_2{}^\circ \{2\langle W^\circ V^\circ \rangle - \langle W^\circ W^\circ \rangle + 4\langle\langle V^\circ \rangle W^\circ \rangle - \\ -2\langle \dot{Q}Q^T V^\circ \rangle + \langle \dot{Q}Q^T \dot{Q}Q^T \rangle - 4\langle\langle V^\circ \rangle \dot{Q}Q^T \rangle\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

с учетом равенств $\langle \dot{Q}Q^T W^\circ \rangle = \langle W^\circ \dot{Q}Q^T \rangle$, $(QQ^T)^\cdot = 0$

Складывая выражения (5.3), (5.4), убеждаемся, что дополнительные инерционные слагаемые сокращаются и $P^{\circ(2)}$ имеет вид (5.2) при замене звездочек сверху на градусы.

Получим соотношение (5.2) непосредственно из УБ в Σ^*-системе (4.2). Формальное различие с инерциальным случаем состоит в том, что, во-первых, при исключении $D_0{}^* u_i{}^*/Dt$ в силу (3.3) вместо F_i нужно подставлять $F_i{}^*$ и, во-вторых, необходимо учесть дополнительное слагаемое $2W_{ij}{}^* c_j{}^* \partial f^*/\partial c_i{}^*$. Аналогично (5.1) найдем, что вклад первого фактора будет $\omega_2{}^* \langle F_i{}^* \rangle_{,j}$, откуда следуют дополнительные слагаемые $P^{*(2)}$

$$\omega_2{}^* (2\langle W^* V^* \rangle - \langle W^* W^* \rangle)$$

С целью учета второго фактора достаточно выявить, в какие члены $P^{*(2)}$ дает вклад последнее слагаемое в левой части уравнения (4.1). Анализ вывода $P^{(2)}$ в [8] показывает, что следствием этого слагаемого является последний член в фигурных скобках при ω_2 и последний член с множителем ω_6 в формуле (5.1). Заменяя в них V_{ij} на $V_{ij}^* - 2W_{ij}^*$, с учетом равенства $\langle W^* \rangle = 0$ найдем еще одно дополнительное слагаемое:

$$\omega_2^* 4 \langle\langle V^* \rangle W^* \rangle = -2\omega_2^* \{\langle V_{mj}^* \rangle W_{mj}^* + \langle V_{mj}^* \rangle W_{mi}^*\}$$

В этом виде данное выражение записано в [1] с $K_2 = 2$ для максвелловских молекул.

Суммируя результаты, вновь получаем формулу (5.2).

Такие же результаты получаются и для $q_i^{(2)}$. В Σ^*-системе получаем

$$q_i^{*(2)} = \frac{\mu^{*2}}{\rho^*} \left\{ \frac{\theta_1^*}{T^*} V_{kk}^* T_{,i}^* + \frac{2}{3} \frac{\theta_2^*}{T^*} (T^* V_{kk})_{,i} + \theta_4^* \langle V_{ij}^* \rangle_{,j} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\theta_3^*}{p^*} p_{,j}^* + \frac{\theta_5^*}{T^*} T_{,j}^* \right) \langle V_{ij}^* \rangle \right\} + 2\theta_2^* \frac{\mu^{*2}}{\rho^*} (V^* - W^*)_{ji} T_{,j}^* \tag{5.5}$$

где θ_α аналогичны K_α. От системы отсчета зависит только последнее слагаемое, преобразования которого особенно наглядны.

Таким образом, как и в УБ (4.1), при $\Sigma \to \Sigma^*$ в объективных тензоре $\mathbf{P}^{(2)}$ и векторе $\mathbf{q}^{(2)}$ появляются дополнительные инерционные слагаемые, при $\Sigma^* \to \Sigma^\circ$ выражения для $\mathbf{P}^{(2)}$, $\mathbf{q}^{(2)}$ инвариантны.

Связанные с этими слагаемыми потоки переносят энергию и энтропию без переноса массы, однако вклад их в производство энтропии равен нулю [13]. Их возникновение обусловлено тем, что сила Кориолиса, действующая на молекулу, не равна «макросиле» Кориолиса, действующей на макрообъем газа. Так как сила Кориолиса перпендикулярна скорости и не производит работу, диссипации энергии и роста энтропии она не вызывает.

6. Обсуждалась [1—3] задача о вращении газа как твердого тела в приближении Барнетта. Утверждалось [2], что если в инерциальной системе отсчета Σ изотермический газ покоится, то в неинерциальной Σ^*-системе барнеттовы напряжения отличны от нуля. Однако это утверждение ошибочно: подставляя в (3.3) и (5.2) $u^* = W^* x^*$, $T^* = \mathrm{const}$, имеем $p^* = \mathrm{const}$, $P_{ij}^{*(2)} = 0$. Аналогично, с использованием уравнения импульса для определения производных от давления доказывается, что барнеттовы напряжения в изотермическом газе, вращающемся как твердое тело, равны нулю в любой евклидовой системе отсчета, вопреки утверждениям [2]; это — следствие того факта [12], что для рассматриваемого движения УБ имеет точное решение — локально максвелловскую функцию от c^2. То же получается и для $q_i^{(2)}$.

В работе [5] подчеркивалось, что причиной рассмотренных ошибок [2] является игнорирование очевидного положения: $\mathbf{P}^{(2)}$, $\mathbf{q}^{(2)}$ нужно вычислять на решении данной задачи, а не произвольно. В соответствии с этим в [5] проведен более тщательный анализ, чем в [1], решений уравнений Барнетта для вращающегося, как твердое тело, газа при переменной по радиусу-вектору температуре. Такое движение интересно тем, что из последнего слагаемого формулы (5.5) следует существование азимутального теплового потока.

7. Таким образом, установлено отсутствие внутренних противоречий в кинетической теории между исходными уравнениями и их приближенными решениями при евклидовых преобразованиях. Однако, как подчеркивалось в [4, 5], необходимо еще доказать, что точные решения УБ для реальных течений газа могут зависеть от системы отсчета. Иначе говоря, нужно доказать невозможность такой ситуации, когда рассматриваемые неинвариантные слагаемые $\mathbf{P}$, $\mathbf{q}$ обращаются в нуль на решениях кинетического уравнения. Предположим, что эта ситуация в общем случае невозможна, и рассмотрим вопрос о границах применимости принципа материальной объективности.

Разъясним сначала этот принцип на известном примере [9]. Пусть $P = \Phi(V, \rho, \dot{x}, x, t)$, где Φ — функция указанных аргументов. В силу объективности $\mathbf{P}$ имеем $\Phi^* = R^*\Phi R^{*T}$ на (1.1), данный принцип требует еще, чтобы $\Phi(V^*, \rho^*, x^{*\cdot}, x^*, t^*) = R^*\Phi(V, \rho, \dot{x}, x, t) R^{*T}$. Дальнейший анализ [9] показывает, что Φ может зависеть только от матрицы скоростей деформации $\mathrm{D} = {}^1/_2 (V + V^T)$ и не зависит от $\Omega = {}^1/_2 (V - V^T)$, т. е. $\Phi = \Phi(\mathrm{D})$. Иными словами, в соответствии с принципом материальной объективности в Σ^*-системе аргументы функции Φ просто «приобретают» звездочки сверху, дополнительных аргументов не появляется.

Однако кинетическая теория дает примеры функции Φ, зависящей от Ω и, следовательно, от системы отсчета, т. е. указанная инвариантность не имеет места, а принцип материальной независимости от системы отсчета в случае движения газов имеет ограниченную область применимости. В связи с этим предлагалось [7] расширить область применимости данного принципа, введя как определяющий параметр величину W^*, определенную в (1.3). Тогда конституитивные соотношения будут зависеть от $\Omega - W^*$ и оказываются инвариантными при евклидовых преобразованиях, в инерциальных системах отсчета W^* «исчезает». В таком смысле инвариантными будут и результаты МЧЭ.

Однако и при таком обобщении область применимости принципа материальной объективности ограничена случаем малых чисел Кнудсена $\mathrm{Kn} \ll 1$, когда асимптотические методы решения УБ позволяют замкнуть уравнения сохранения и, тем самым, перейти к макроскопическому (а не кинетическому) способу описания течений.

Для всех известных классов течений неинвариантные слагаемые выражений для напряжений и тепловых потоков по порядку величины равны Kn^2 по сравнению с единицей для $\mathrm{Kn} \to 0$. Эта оценка определяет область применимости принципа материальной объективности в его обычной трактовке для случая газов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Müller I.* On the frame dependence of stress and heat flux.— Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1972, v. 45, No. 4, p. 241—250.
2. *Edelen D. G. B., McLennan J. A.* Material indifference: a principle or a convenience.— Intern. J. Engng Sci., 1973, v. 11, No. 8, p. 813—817.
3. *Söderholm L. H.* The principle of material frame-indifference and material equations of gases.— Intern. J. Engng Sci., 1976, v. 14, No. 6, p. 523—528.
4. *Wang C. C.* On the concept of frame-indifference in continuum mechanics and in the kinetic theory of gases.— Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1975, v. 58, No. 4, p. 381—393.
5. *Truesdell C.* Correction of two errors in the kinetic theory of gases which have been used to cast unfounded doubt upon the principle of material frame-indifference.— Meccanica, 1976, v. 11, No. 4, p. 196—199.
6. *Spezialle C. G.* On frame-indifference and iterative procedures in the kinetic theory of gases.— Intern. J. Engng. Sci., 1981, v. 19, No. 1, p. 63—73.
7. *Murdoch A. I.* On material frame-indifference, intrinsic spin, and certain constitutive relations motivated by the kinetic theory of gases.— Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1983, v. 83, No. 2, p. 185—194.
8. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
9. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
10. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. школа, 1983. 399 с.
11. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
12. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
13. *Woods L. C.* On the thermodynamics of nonlinear constitutive relations in gasdynamics.— J. Fluid Mech., 1980, v. 101, pt 2, p. 225—242.

Москва

Поступила в редакцию
20.VI.1984