УДК 62—501.12

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ И УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ К СТАЦИОНАРНЫМ СИСТЕМАМ

Вавилова Н. Б., Каленова В. И., Морозов В. М.

Рассматриваются методические вопросы приводимости некоторых классов линейных нестационарных наблюдаемых и управляемых систем к стационарным системам. Предлагается конструктивное использование этого свойства для анализа управляемости и наблюдаемости нестационарных систем, а также для решения прикладных задач управления и оценивания.

Для практических приложений представляет интерес выделение классов нестационарных систем, которые могут быть исследованы простыми и эффективными методами, аналогичными методам анализа стационарных систем. К таким классам относятся линейные нестационарные системы, для которых фундаментальная матрица решений может быть алгоритмически просто построена по матрице коэффициентов, в частности системы, которые могут быть при помощи известного невырожденного преобразования приведены к стационарным системам [1—5], а также приводимые по Ляпунову системы [6, 7]. Хотя для нестационарных систем известны достаточные условия управляемости и наблюдаемости, не требующие знания фундаментальной матрицы исходной системы [8—10], важными и полезными являются поиски конструктивных преобразований, приводящих исходную систему к виду, удобному для анализа и синтеза простых алгоритмов управления и оценивания.

1. Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$x^{\cdot} = A(t)\,x + B(t)\,u, \quad \sigma = C(t)\,x \tag{1.1}$$

где x — n-мерный вектор состояния системы, u — r-мерный вектор управляющих воздействий, σ — k-мерный вектор измерений, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы соответствующих размерностей, элементы которых — непрерывно дифференцируемые функции времени t.

Известно, что в ряде случаев [1—5] фундаментальная матрица системы (1.1) может быть найдена в явном виде по элементам матрицы $A(t)$, в частности, когда матрица $A(t)$ принадлежит одному из следующих классов: 1) постоянная матрица, 2) диагональная, 3) треугольная, 4) удовлетворяет условию

$$A(t)\Big[\int_0^t A(\tau)\,d\tau\Big] = \Big[\int_0^t A(\tau)\,d\tau\Big]A(t) \tag{1.2}$$

5) существуют матрица $A_1 = \mathrm{const}$ и ненулевая функция $\Psi(t)$, такие, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{A(t)}{\Psi(t)}\right) = A_1 A(t) - A(t)\,A_1$$

Если $\Psi(t) \equiv 1$, то $A(t)$ подчиняется уравнению

$$A^{\cdot}(t) = A_1 A(t) - A(t)\,A_1 \tag{1.3}$$

Другие, в том числе более общие случаи, в которых матрица $A(t)$ подчинена достаточно сложным условиям, приведены в [1, 2, 5]. Отметим, что один частный класс матриц $A(t)$, удовлетворяющих условию (1.2), рассмотренный в [3], был исследован в более общей форме ранее [2].

Будем рассматривать системы вида (1.1), в которых фундаментальная матрица может быть найдена в замкнутой форме. Определим условия приводимости нестационарной системы (1.1) к стационарной.

2. Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы, соответствующей первому уравнению (1.1) ($\Phi(t_0) = E$). Тогда линейное преобразование

$$x = \Phi(t)\, y \tag{2.1}$$

приводит систему (1.1) к виду

$$y^{\cdot} = N(t)\, u, \quad \sigma = H(t)\, y \tag{2.2}$$

$$(H(t) = C(t)\,\Phi(t), \quad N(t) = \Phi^{-1}(t) B(t))$$

Теорема 1. Система (2.2) при помощи линейного невырожденного преобразования может быть приведена к полностью стационарной системе того же порядка

$$z^{\cdot} = Rz + Mu, \ \sigma = Lz \tag{2.3}$$

(содержащей матрицы z $(n \times 1)$, R $(n \times n)$, M $(n \times r)$, L $(k \times n)$) тогда и только тогда, когда матрицы $H(t)$, $N(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$H^{\cdot} = HG, \quad N^{\cdot} = -GN \tag{2.4}$$

(G $(n \times n)$ — постоянная матрица). При этом матрицы R, L и M в системе (2.3) определяются соотношениями

$$R = G, \ L = H(t_0), \ M = N(t_0)$$

Доказательство. Достаточность. Преобразование $y = \exp(-G(t - t_0))\, z$ приводит систему (2.2) к виду

$$z^{\cdot} = Gz + N(t_0)\, u, \quad \sigma = H(t_0)\, z$$

Необходимость. Пусть преобразование $y = Qz$ приводит систему (2.2) к виду (2.3). Тогда матрица $Q(t)$ удовлетворяет уравнению $Q^{\cdot} = -QR$ ($Q(t_0) = E$). Дифференцируя равенства $H(t) Q(t) = L$, $N(t) = Q(t)\, M$, получим $H^{\cdot} = HR$, $N^{\cdot} = -RN$.

Для первого уравнения (1.1) с матрицей $A(t)$ указанного типа кроме преобразования (2.1) существуют и другие линейные невырожденные преобразования, приводящие систему (1.1) к виду

$$x^{\cdot\prime} = A'x' + B'(t)\, u, \quad \sigma = C'(t)\, x'; \quad A' = \mathrm{const} \tag{2.5}$$

В частности, если матрица $A(t)$ удовлетворяет условию (1.3), то преобразование $x = \exp(A_1(t - t_0))\, x'$ приводит первое уравнение (1.1) к виду (2.5), где $A' = A(t_0) - A_1$.

Заметим, что к виду (2.5) может быть преобразована любая система (1.1), в которой система, соответствующая первому уравнению (1.1) при $B(t) \equiv 0$, является приводимой в смысле Ляпунова [6, 7].

Рассмотрим систему (2.5). Преобразование $x' = \exp(A'(t - t_0))\, y$ приводит эту систему к виду (2.2), где

$$H(t) = C'(t) \exp(A'(t - t_0)), N(t) = \exp(-A'(t - t_0))\, B'(t)$$

Тогда из теоремы 1 следует

Теорема 2. Система (2.5) приводится к стационарной системе (2.3) тогда и только тогда, когда матрицы $C'(t)$, $B'(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$C^{\cdot\prime} = C'\,[-A' + \exp(A'(t-t_0))\,G\exp(-A'(t-t_0))] \tag{2.6}$$

$$B^{\cdot\prime} = [A' - \exp(A'(t-t_0)\,G\exp(-A'(t-t_0))]\,B'$$

($G\,(n \times n)$ — некоторая постоянная матрица).

В частности, если матрица G такова, что выполняется условие $A'G = GA'$, то $C'(t)$ и $B'(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$C^{\cdot\prime} = C'(-A' + G), \quad B^{\cdot\prime} = (A' - G)\,B' \tag{2.7}$$

Следствие. Пусть матрицы $C'(t)$ и $B'(t)$ подчиняются уравнениям $C^{\cdot\prime} = C'K$, $B^{\cdot\prime} = -KB'$, где K — постоянная матрица и $KA' = A'K$, тогда замена переменных $x' = \exp(-K(t-t_0))\,z$ приводит систему (2.5) к стационарной системе (2.3), где $R = A' + K$, $M = B'(t_0)$, $L = C'(t_0)$.

Заметим, что удобнее, не проверяя выполнения условий (2.6), составить матрицы $H(t)$, $N(t)$ и затем проверить выполнение условий (2.4).

3. Сформулированные в п. 2 теоремы дают необходимые и достаточные условия возможности приведения нестационарной системы рассматриваемого типа к стационарной без увеличения порядка исходной системы.

Рассмотрим более общий случай, когда нестационарная система (1.1) может быть преобразована в полностью стационарную при помощи замены переменных, расширяющей пространство состояний.

Далее предполагаем, что в первом уравнении (1.1) $B(t) \equiv 0$. Пусть оно при помощи преобразования

$$x = T(t)\,y, \quad \det T(t) \neq 0, \quad \forall t \geqslant t_0$$

приведено к виду (A_y — постоянная матрица)

$$y^{\cdot} = A_y y \tag{3.1}$$

Уравнение измерений (второе уравнение (1.1)) после преобразования к новым переменным имеет вид

$$\sigma = C(t)\,T(t)\,y = H_1(t)\,y \tag{3.2}$$

(при $T(t) = \Phi(t)$, $A_y = 0$, $H_1(t) = H(t)$)

Для простоты рассуждений допустим, что матрица $C(t)$ имеет размерность $1 \times n$, тогда $H_1(t) = h^T(t)$, где $h(t)$ $(n \times 1)$ — матрица-столбец.

Предположим, что $h^T(t)$ можно представить в виде

$$h^T(t) = f^T(t)\,D \tag{3.3}$$

где D — некоторая постоянная матрица размера $m \times n$, $f(t)$ — вектор-функция времени размера $m \times 1$ $(m \geqslant n)$, удовлетворяющая уравнению

$$f^{\cdot} = Sf, \quad S\,(m \times m) = \text{const}. \tag{3.4}$$

Это, в частности, означает, что к выделенному таким образом классу функций $h_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — компонент вектора $h(t)$ — относятся такие функции, как полиномы, экспоненты, конечные суммы тригонометрических функций и т. п.

Вектор-функция $h^T(t)$, определенная равенством (3.3), в общем случае не удовлетворяет уравнению вида (2.7), и для системы (3.1)—(3.4) условия приводимости к стационарной системе того же порядка не выполняются. В частности, если $D = E$ и $h(t)$ подчиняется уравнению (3.4), необходимо, чтобы $A_y S^T = S^T A_y$.

В [11] (см. также [12]) показано, что при помощи преобразования

$$q = \Sigma(t)\,y; \quad \Sigma(t) = E_n \otimes f(t) \tag{3.5}$$

где $\Sigma(t)$ — матрица $mn \times n$, q — вектор $mn \times 1$, E_n $(n \times n)$ — единичная матрица, символ $\otimes$ означает кронекеровское произведение матриц [13], система (1.1) приводится к виду

$$q^{\cdot} = A_q q, \quad \sigma = d^T q \quad (A_q = E_n \otimes S + A_y \otimes E_m) \tag{3.6}$$

(вектор d $(mn \times 1)$ образуется из последовательно выписанных столбцов матрицы D).

Таким образом, система (1.1) при выполнении указанных условий приводится к стационарной системе (3.6), но более высокой размерности.

Было показано [11], что при указанном сведении нестационарной по наблюдению системы (3.1) —(3.4) к полностью стационарной системе (3.6) свойство наблюдаемости исходной системы сохраняется. Можно показать, что если исходная система наблюдаема, то из расширенной системы (3.6) выделяется замкнутая система n-го порядка для определения исходных переменных y.

4. Рассмотрим вопрос о построении оценки вектора состояния x системы (3.1), (3.2). Предполагаем, что система (3.6) и, следовательно, (3.1), (3.2) являются наблюдаемыми. Оценивание вектора состояния не полностью наблюдаемой системы рассмотрено в [12].

При построении оценки вектора x будем исходить из стационарной системы (3.6). Алгоритм оценивания имеет вид

$$q^{\cdot\circ} = A_q q^\circ + K(\sigma - d^T q^\circ), \quad q^\circ(t_0) = 0 \tag{4.1}$$

Так как система (3.7) наблюдаема, то, как известно [14], вектор K в уравнении (4.1) можно выбрать постоянным и обеспечивающим любую степень затухания ошибки оценки $\Delta q = q - q^\circ$

$$\|\Delta q(t)\| \leqslant \gamma_1 \exp(\lambda_1 t)$$

где $\gamma_1 = \text{const} > 0$, а $\lambda_1 < 0$ — любое наперед заданное число.

Покажем, что выбор вектора K можно осуществить так, чтобы обеспечить любую степень затухания ошибки оценки вектора состояния исходной нестационарной системы $\Delta y = y - y^\circ$.

Оценки q° и y° векторов q и y и соответствующие ошибки оценок Δq и Δy в силу (3.5) связаны соотношениями

$$q^\circ(t) = \Sigma(t) y^\circ(t), \quad \Delta q(t) = \Sigma(t) \Delta y(t) \tag{4.2}$$

представляющими собой переопределенные системы линейных алгебраических уравнений относительно компонент векторов $y^\circ(t)$ и $\Delta y(t)$.

Запишем решения систем (4.2) в виде

$$y^\circ(t) = P(t) q^\circ(t), \quad \Delta y(t) = P(t) \Delta q(t) \tag{4.3}$$

где $P(t)$ — матрица, удовлетворяющая уравнению

$$P(t) \Sigma(t) = E_n \tag{4.4}$$

(В качестве матрицы $P(t)$ можно взять, например, псевдообратную матрицу $\Sigma^+(t)$.)

В силу второго соотношения (3.5) элементы матрицы $\Sigma(t)$ являются решениями линейной системы с постоянными коэффициентами (3.4). Учитывая соотношение (4.4), будем иметь $\|P(t)\| \leqslant \gamma_2 \exp(\lambda_2 t)$, где $\gamma_2 > 0$ и λ_2 — некоторые постоянные. Тогда из соотношений (4.3) следует

$$\|\Delta y(t)\| \leqslant \|P(t)\| \|\Delta q(t)\| \leqslant \gamma_1 \gamma_2 \exp((\lambda_1 + \lambda_2) t)$$

Выбирая $\lambda_1 < \lambda_0 - \lambda_2$, можно добиться любой степени затухания $\lambda_0 < 0$ ошибки оценки $\Delta y(t)$.

Оценку $y^\circ(t)$ можно непосредственно получить как решение дифференциального уравнения

$$y^{\cdot\circ} = A_y y^\circ + P(t) K(\sigma - h^T(t) y^\circ)$$

5. Как известно [8, 10, 14], имеет место факт двойственности задач оценки состояния и задач управления, который состоит в следующем утверждении: система $x^\cdot = A(t) x + B(t) u$ управляема тогда и только тогда, когда сопряженная ей система $x^\cdot = -A^T(t) x$, $z = B^T(t) x$ наблюдаема. В связи с этим результаты, полученные в [11], могут оказаться полезными при исследовании линейных систем, нестационарных по управлению с нестационарностью определенного вида.

Рассмотрим линейную систему

$$\xi^\cdot = A\xi + D^T f(t) u \tag{5.1}$$

где ξ — n-мерный вектор, описывающий состояние системы, A — постоянная матрица $(n \times n)$, D^T $(n \times m)$ — матрица с постоянными элементами, u — скалярное управление, а $f(t)$ — известная вектор-функция времени размерности $m \times 1$, удовлетворяющая, как и ранее, системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами (3.4).

Определим для системы (5.1), (3.4) соответствующую ей стационарную систему, переменные которой связаны с исходными переменными известными линейными соотношениями. Возьмем линейную систему, сопряженную (5.1)

$$x^\cdot = -A^T x, \quad z = f^T(t) Dx \tag{5.2}$$

Как указано выше, при помощи замены переменных (3.5) система (5.1) приводится к стационарной системе

$$y^\cdot = Q^T y, \quad z = d^T y \tag{5.3}$$

Матрица Q^T определяется аналогично (3.6) формулой

$$Q^T = -A^T \otimes E_m + E_n \otimes S \tag{5.4}$$

а строка d^T образована из последовательно расположенных строк матрицы D:

$$d^T = (d_{11} d_{12} \ldots d_{1m} \ldots d_{n1} d_{n2} \ldots d_{nm})$$

Стационарная система, сопряженная (5.3), имеет вид

$$\eta^\cdot = -Q\eta + du \tag{5.5}$$

Можно показать, что переменные ξ и η связаны соотношением ($\Sigma^T(t)$ — матрица $n \times mn$)

$$\xi = \Sigma^T(t) \eta, \quad \Sigma^T(t) = E_n \otimes f^T(t) \tag{5.6}$$

Таким образом, преобразование (5.6), в котором η удовлетворяет системе (5.5) с начальными условиями $\eta(t_0) = \eta_0$, дает возможность получить вектор состояния ξ, поведение которого описывается системой уравнений (5.1) с начальными условиями $\xi(t_0) = \Sigma^T(t_0) \eta(t_0)$.

Так как ранг матрицы $\Sigma^T(t_0)$ равен n, то решение системы (5.1) можно представить в виде (5.6), где η — решение стационарной системы (5.5).

Заметим, что управляемость системы (5.5) является только достаточным условием управляемости системы (5.1).

Пусть преобразование $v = My$, где M — матрица $l \times mn$, выделяет из пространства состояний $\{y\}$ наблюдаемое подпространство $\{v\}$. Вектор v подчиняется уравнению

$$v^\cdot = Q_1{}^T v, \quad z = d_1{}^T v \tag{5.7}$$

Матрицы Q_1^T и d_1^T, представляющие собой наблюдаемую пару, удовлетворяют соотношениям $MQ^T = Q_1^T M$, $d^T = d_1^T M$. Переменные x и v связаны линейным преобразованием

$$v = M\Sigma\ (t)\ x \tag{5.8}$$

и, как показано в [11], если система (5.2) наблюдаема, то $\operatorname{rank} M\Sigma\ (t) = n$.

Запишем управляемую систему, сопряженную системе (5.7)

$$\xi^{\cdot} = -Q_1\xi + d_1 u \tag{5.9}$$

Можно показать, что вектор $\eta = M^T\xi$, где ξ подчиняется уравнению (5.9) с начальным условием $\xi\ (t_0) = \xi_0$, будет удовлетворять уравнению (5.5) с начальным условием $\eta\ (t_0) = M^T\xi_0$.

Суммируя сказанное относительно исходной системы (5.1) и стационарных систем (5.5) и (5.8), получаем, что вектор

$$\zeta = \Sigma^T\ (t) M^T\xi \tag{5.10}$$

где вектор ξ — решение управляемой стационарной системы (5.9) с начальным условием $\xi\ (t_0) = \xi_0$, будет удовлетворять уравнению (5.1) с начальным условием $\zeta\ (t_0) = \Sigma^T\ (t_0)\ M^T\xi_0$, и если система (5.1) управляема, то согласно (5.8) $\operatorname{rank} \Sigma^T\ (t_0)\ M^T = n$.

Таким образом, рассматриваемый способ приведения нестационарных управляемых систем рассмотренного класса к стационарным системам позволяет свести решение различных задач управления такими нестационарными системами к соответствующим задачам для стационарных систем, методы решения которых хорошо разработаны.

6. Приведенная методика может быть применена при решении достаточно широкого класса задач управления и оценивания.

Пусть механическая система допускает стационарное вращение вокруг некоторой неподвижной в пространстве оси. Во многих случаях уравнения в вариациях для этого стационарного движения в неподвижной системе координат представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

При управлении (оценивании) такими системами часто возникают задачи, в которых управляющие воздействия (измерения) формируются в неподвижной системе координат. Тогда уравнения управляемого объекта в неподвижной системе координат имеют вид

$$\xi^{\cdot} = P\ (t)\ \xi + B_1 u,\quad P\ (t + T_P) = P\ (t)\quad (\sigma = H_1\xi) \tag{6.1}$$

Здесь σ — вектор измерений, B_1 и H_1 — постоянные матрицы.

В подвижной системе координат, связанной с вращающимся объектом, уравнения движения можно представить в виде (A — постоянная матрица)

$$\begin{gathered} x^{\cdot} = Ax + B\ (t)\ u \quad (\sigma = H\ (t)\ x) \\ B\ (t + T_P) = B\ (t),\quad H\ (t + T_P) = H\ (t) \end{gathered} \tag{6.2}$$

Система (6.2) относится к типу систем (5.1) или (3.1) — (3.4)

Примеры. 1°. Уравнения движения твердого тела, стабилизированного собственным вращением, с двигателями, жестко закрепленными на корпусе, имеют вид (6.2) [15]

$$x_1^{\cdot} = -ax_2 + u\cos\Omega_1 t,\quad x_2^{\cdot} = ax_1 - u\sin\Omega_1 t \tag{6.3}$$

Здесь x_1, x_2 — проекции угловой скорости тела на оси, жестко связанные с ним и ортогональные оси вращения, Ω_1 — угловая скорость вращения, u — управляющий момент, a — некоторая постоянная.

Замена переменных типа (5.6)

$$x_1 = y_1 \sin \Omega_1 t + y_2 \cos \Omega_1 t, \quad x_2 = y_3 \sin \Omega_1 t + y_4 \cos \Omega_1 t$$

приводит систему (6.3) к стационарной

$$y_1^{\cdot} = \Omega_1 y_2 - a y_3, \quad y_2^{\cdot} = -\Omega_1 y_1 - a y_4 + u$$

$$(6.4) \qquad y_3^{\cdot} = \Omega_1 y_4 + a y_1 - u, \quad y_4^{\cdot} = -\Omega_1 y_3 + a y_2$$

Система (6.4) неуправляема. Из нее легко выделяется управляемая подсистема

$$z_1^{\cdot} = -(a + \Omega_1) z_2 + u, \quad z_2^{\cdot} = (a + \Omega_1) z_1$$

$$(z_1 = y_2 - y_3, \quad z_2 = y_1 + y_4)$$

В соответствии с формулой (5.10) исходные переменные x_1, x_2 связаны с управляемыми переменными z_1, z_2 преобразованием

$$x_1 = z_1 \cos \Omega_1 t + z_2 \sin \Omega_1 t, \quad x_2 = -z_1 \sin \Omega_1 t + z_2 \cos \Omega_1 t$$

2°. Линеаризованные уравнения возмущенного движения материальной точки по круговой орбите радиуса r_1 в центральном поле сил в неподвижной системе координат имеют вид

$$(6.5) \qquad x^{\cdot} = A(\tau) x; \quad A(\tau) = \begin{Vmatrix} O_2 & E_2 \\ F & O_2 \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} a_+ & b \\ b & a_- \end{Vmatrix}$$

$$a_{\pm} = {}^1/_2 (1 \pm 3 \cos 2\tau), \quad b = {}^3/_2 \sin 2\tau, \quad \tau = \omega_1 t$$

(ω_1 — угловая скорость обращения, O_2 — нулевая, E_2 — единичная матрица 2×2).

Уравнение измерений в случае, когда известная дальность от рассматриваемой точки до другой точки, движущейся в той же плоскости по известной круговой орбите радиуса r_2 с угловой скоростью ω_2, имеет вид

$$(6.6) \qquad \sigma = (\cos \tau - \rho \cos n_1 \tau) x_1 + (\sin \tau - \rho \sin n_1 \tau) x_2$$

$$(n_1 = \omega_2 / \omega_1, \quad \rho = r_2 / r_1)$$

где x_1, x_2 — возмущения радиуса вектора и полярного угла. Матрица $A(\tau)$ относится к типу матриц, поведение которых описывается уравнением (1.4) с матрицей A_1 вида

$$A_1 = \begin{Vmatrix} \chi & O_2 \\ O_2 & \chi \end{Vmatrix}, \quad \chi = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Согласно [4], замена переменных $x = \exp(A_1 t) y$ приводит систему (6.5) к стационарной системе

$$(6.7) \qquad y^{\cdot} = A_2 y$$

$$A_2 = A(0) - A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Уравнения измерений (6.6) в переменных y примут вид

$$(6.8) \qquad \sigma = h^T y, \quad h^T = (1 - \rho \cos \nu\tau, \ \rho \sin \nu\tau, \ 0, \ 0), \quad \nu = n_1 - 1$$

Можно показать, что вектор $h(\tau)$ не удовлетворяет уравнению типа (2.6), однако он представляется в виде (3.3), (3.4). В соответствии с преобразованием (3.5) введем переменные

$$q_k = y_k \exp(i\nu\tau) \ (k = 1, 2, 3, 4)$$

В этих переменных система (6.7) (6.8) становится полностью стационарной

$$(6.9) \qquad q_1^{\cdot} = q_2 + q_3 + i\nu q_1, \quad y_1^{\cdot} = y_2 + y_3$$

$$q_2^{\cdot} = -q_1 + q_4 + i\nu q_2, \quad y_2^{\cdot} = -y_1 + y_4$$

$$q_3^{\cdot} = 2q_1 + q_4 + i\nu q_3, \quad y_3^{\cdot} = 2y_1 + y_4$$

$$q_4^{\cdot} = -q_2 - q_3 + i\nu q_4, \quad y_4^{\cdot} = -y_2 - y_3$$

$$(6.10) \qquad \sigma = y_1 - \rho \operatorname{Re} q_1 + \rho \operatorname{Im} q_2$$

Заметим, что при анализе наблюдаемости системы (6.9) следует включить в рассмотрение уравнения для сопряженных переменных $\bar{q}_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) и представить уравнение измерений (6.10) в виде

$$\sigma = y_1 - \rho \frac{q_1 + \bar{q}_1}{2} - \rho \frac{q_2 - \bar{q}_2}{2} i$$

Методика, примененная в примере 2°, была использована [16] в задаче коррекции инерциальной навигационной системы при помощи дополнительной информации о дальности от объекта до навигационного искусственного спутника Земли. Отметим также, что уравнения типа (6.1) имеют место в задаче коррекции инерциальных навигационных систем в случае, когда объект совершает правильный вираж [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск: Изд-во АН БССР, 1963. 272 с.
2. *Салахова И. М., Чеботарев Г. Н.* О разрешимости в конечном виде некоторых систем линейных дифференциальных уравнений.— Изв. вузов. Математика, 1960, № 3, с. 230—234.
3. *Wu M.-Y., Sherif A.* On the commutative class of linear time-varying systems.— Internat. J. Control, 1976, v. 23, No 3, p. 433—444.
4. *Wu M.-Y.* Transformation of a linear time-varying system into a linear time-invariant system.— Internat. J. Control., 1978, v. 27, No. 4, p. 589—602.
5. *Wu M.-Y.* A succesive decomposition method for the solution of linear time-varying systems.— Internat. J. Control, 1981, v. 33, No. 1, p. 181—186.
6. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
7. *Еругин Н. П.* Приводимые системы.— Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1946, т. 13, с. 1—95.
8. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
9. *Silverman L. M., Meadows H. E.* Controllability and observability in time-variable linear systems.— SIAM J. Control., 1967, v. 5, No. 1, p. 64—73.
10. *Д'Анжело Г.* Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974. 287 с.
11. *Минц Н. Б., Морозов В. М., Украинцев С. В.* Об оценивании вектора состояния линейных систем, нестационарных по наблюдению.— В кн.: Некоторые вопросы теории навигационных систем. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 40—47.
12. *Парусников Н. А., Морозов В. М., Борзов В. И.* Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 1982. 174 с.
13. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 367 с.
14. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
15. *Лундерштадт Р.* Оптимальная по быстродействию и расходу топлива система управления космического аппарата, стабилизированного собственным вращением.— В кн.: Управление в пространстве. Т. 2. М.: Наука, 1973, с. 64—73.
16. *Каленова В. И., Морозов В. М.* Наблюдаемость в задаче коррекции инерциальных навигационных систем при помощи дополнительной информации от искусственного спутника Земли.— Космич. исследования, 1984, т. 22, № 3, с. 390—398.
17. *Морозов В. М., Матасов А. И., Шакотько А. Г.* О наблюдаемости параметров инерциальной навигационной системы на правильном вираже.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 4, с. 21—26.

Москва

Поступила в редакцию
1.X.1984