

УДК 62—50

ИГРА ОПТИМАЛЬНОГО СБЛИЖЕНИЯ ДВУХ ИНЕРЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ С ОДНИМ БЕЗЫНЕРЦИОННЫМ

Левченков А. Ю., Пашков А. Г.

Рассматривается игровая задача преследования двумя управляемыми объектами одного. Преследующие объекты являются инерционными, преследуемый объект — безынерционным. Время игры фиксировано. Функционал платы — расстояние между преследуемым объектом и ближайшим к нему преследователем в момент окончания игры. Строится алгоритм определения значения функции цены для всех возможных позиций. Показано, что пространство игры состоит из нескольких областей, в которых цена имеет аналитическое выражение, либо определяется в результате решения некоторого нелинейного уравнения. Указываются стратегии преследователей, гарантирующие им результат, сколь угодно близкий к значению цены игры.

Ранее [1] было получено оптимальное решение игровой задачи сближения в случае, когда один инерционный объект преследует безынерционный. Статья примыкает к исследованиям [1—10].

1. Пусть движения преследователей P_i (x^i) ($i = 1, 2$) и преследуемого объекта E (z) описываются уравнениями

$$(1.1) \quad \dot{x}_1^i = x_3^i, \quad \dot{x}_3^i = u_1^i, \quad \dot{x}_2^i = x_4^i, \quad \dot{x}_4^i = u_2^i, \quad \dot{z}_1 = v_1, \quad \dot{z}_2 = v_2$$

Векторы управления преследователей и преследуемого удовлетворяют ограничениям

$$(1.2) \quad ((u_1^i)^2 + (u_2^i)^2)^{1/2} \leq \mu > 0, \quad (v_1^2 + v_2^2) \leq \nu$$

Игра рассматривается на отрезке времени $[t_0, \vartheta]$. Функционал платы — расстояние между преследуемым объектом и ближайшим к нему преследователем в момент окончания игры $t = \vartheta$, т. е.

$$(1.3) \quad \gamma = \min_i [(z_1(\vartheta) - x_1^i(\vartheta))^2 + (z_2(\vartheta) - x_2^i(\vartheta))^2]^{1/2}$$

В результате замены переменных $y_j^i = x_j^i + (\vartheta - t) x_{j+2}^i$ ($j = 1, 2$), означающей переход к рассмотрению центров областей достижимости инерционных объектов, соотношения (1.1)—(1.3) примут вид

$$(1.4) \quad \dot{y}_j^i = (\vartheta - t) u_j^i, \quad y_j^i(t_0) = x_j^i(t_0) + (\vartheta - t_0) x_{j+2}^i(t_0)$$

$$(1.5) \quad \gamma = \min_i [(z_1(\vartheta) - y_1^i(\vartheta))^2 + (z_2(\vartheta) - y_2^i(\vartheta))^2]^{1/2}$$

В момент $t = \vartheta$ значения γ , определяемые из (1.3) и (1.5), тождественно равны.

Центры областей достижимости преследователей будут обозначаться P_i . Для позиций, при которых $P_1^\circ = P_2^\circ$, цена игры «два на один», обозначаемая ρ^{21} , совпадает с ценой игры «один на один», обозначаемой ρ^{11} . В дальнейшем будем рассматривать те начальные позиции, для которых $P_1^\circ \neq P_2^\circ$.

Введем подвижную систему координат, связанную с текущими положениями преследователей. Ось q_1 направим от текущего положения первого преследователя к текущему положению второго (нумерация преследователей произвольна и фиксирована). Ось q_2 направим через середину

отрезка $[P_1P_2]$ перпендикулярно к нему, так, чтобы получить правоориентированную систему координат. В этой системе положение объекта E будет задаваться координатами $\{x, y\}$, а положение преследователей P_i — координатами $\{(-1)^{i+1}z, 0\}$. В силу симметричности положения преследователей в указанной системе вектор $\xi(x, y, z)$ полностью характеризует взаимное расположение преследователей и убегающего.

В отдельных случаях одновременно с указанной подвижной системой (q_1, q_2) будет рассматриваться неподвижная декартова система координат (η_1, η_2) , оси которой совпадают с осями подвижной системы в некоторый момент времени t . В неподвижной системе (η_1, η_2) удобно проводить геометрические построения и рассматривать оптимальные движения.

Динамика фазового вектора ξ описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v_1 - \frac{(\vartheta - t)}{2} [u_1^1 + u_1^2] + \frac{y(\vartheta - t)}{2z} [u_2^2 - u_2^1] \\ \dot{y} &= v_2 - \frac{(\vartheta - t)}{2} [u_2^1 + u_2^2] - \frac{x(\vartheta - t)}{2z} [u_2^2 - u_2^1] \\ \dot{z} &= \frac{(\vartheta - t)}{2} [u_1^2 - u_1^1] \end{aligned}$$

Ограничения на управления игроков имеют вид (1.2). Функционал платы определяется по формуле

$$(1.7) \quad \gamma = [(z(\vartheta) - |x(\vartheta)|)^2 + y^2(\vartheta)]^{1/2}$$

В формулах (1.6) вектор $v = \{v_1, v_2\}$ имеет смысл абсолютной (т. е. по отношению к системе (η_1, η_2)) скорости точки E , вектора $u^i = \{u_1^i, u_2^i\}$ пропорциональны с множителем $(\vartheta - t)$ скоростям точек P_i . Таким образом, первые две формулы (1.6) дают выражения для относительной скорости точки E в подвижной системе (q_1, q_2) , а компонента \dot{z} — относительной скорости преследователя.

В системе координат (η_1, η_2) выполним некоторые геометрические построения. Областью достижимости $G^i\{t_0, \vartheta\}$ объекта P_i из заданного начального положения в момент $t = t_0$ к моменту $t = \vartheta$ будет круг радиуса $r(t_0) = \mu(\vartheta - t_0)^2 / 2$ с центром в точке $\{(-1)^{i+1}z(t_0), 0\}$. Областью достижимости $G_e(t_0, \vartheta)$ объекта E из заданного начального положения в момент $t = t_0$ к моменту $t = \vartheta$ также будет круг радиуса $R(t_0) = v(\vartheta - t_0)$ с центром в точке $\{x, y\}$. Границы областей $G^i(t_0, \vartheta)$ и $G_e(t_0, \vartheta)$ будем обозначать $\partial(G^i)$ и $\partial(G_e)$ соответственно. Под позицией игры будем понимать вектор $\{t, \xi(t)\}$ расширенного фазового пространства.

Пусть задана начальная позиция игры $\{t_0, \xi(t_0)\}$. Возможны следующие случаи взаимного расположения объектов P_i и E , области достижимости $G_e(t_0, \vartheta)$ и оси η_2 :

1) $\partial(G_e) \cap \eta_2 = \{\emptyset\}$, либо $\partial(G_e) \cap \eta_2 = \{A\}$, где A — единственная точка;

2) $\partial(G_e) \cap \eta_2 = \{A_1, A_2\}$, причем $A_1 \neq A_2$ и $E \notin P_1A_1P_2A_2$;

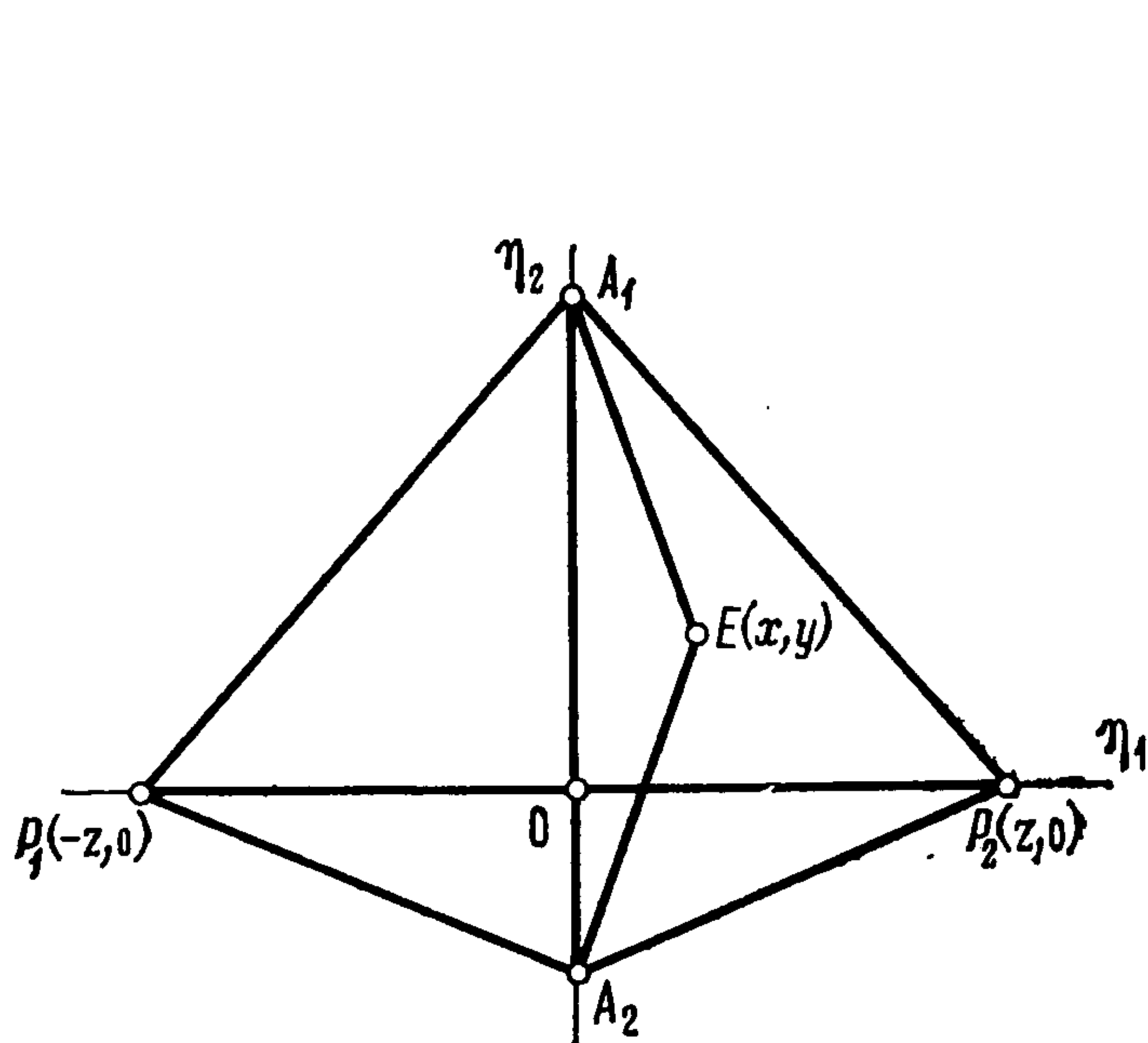
3) $\partial(G_e) \cap \eta_2 = \{A_1, A_2\}$, причем $A_1 \neq A_2$ и $E \in \text{int } P_1A_1P_2A_2$.

Первые два случая описываются неравенством, содержащим координаты вектора ξ и время

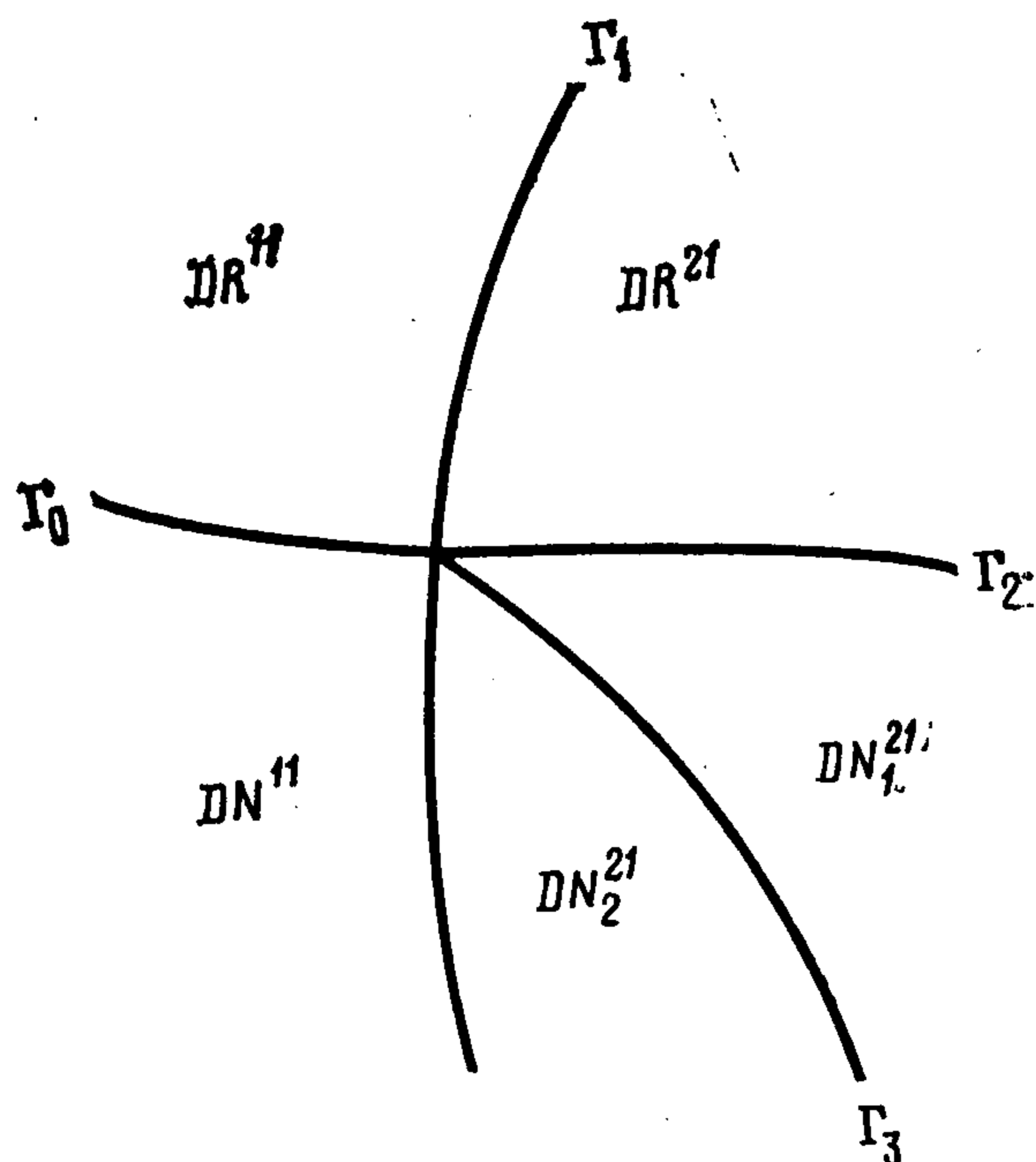
$$(1.8) \quad \frac{|x|}{v(\vartheta - t)} \geq \frac{|z - |x||}{((z - |x|)^2 + y^2)^{1/2}}$$

Ситуация, соответствующая случаю 3), характеризуется обратным неравенством и изображена на фиг. 1.

2. Неравенство (1.8) выделяет в фазовом пространстве некоторую трехмерную область (обозначим ее D^{11}), в которой имеет место игра «один на один», т. е. $\rho^{21} = \rho^{11}$. Видно, что в D^{11} задача сводится к игре сближения между E и ближайшим к нему преследователем.



Фиг. 1



Фиг. 2

Осуществим разбиение области D^{11} на подобласти DR^{11} и DN^{11} . Для этого рассмотрим квадратное уравнение

$$(2.1) \quad (t - t_0)^2 - 2(t - t_0) \left(\vartheta - t_0 - \frac{v}{\mu} \right) + \frac{2c}{\mu} = 0$$

$$c = ((|x| - z)^2 + y^2)^{1/2}$$

Граница Γ_0 областей DR^{11} и DN^{11} удовлетворяет соотношениям (d — дискриминант, t_1 и t_2 — корни уравнения (2.1))

$$(2.2) \quad d = \left(\vartheta - t_0 - \frac{v}{\mu} \right)^2 - \frac{2c}{\mu} = 0, \quad t_1 = t_2 \geq t_0$$

В области DR^{11} выполнено одно из двух условий: либо $d < 0$, либо $d > 0$ и $t_1 < t_2 < t_0$. В области DN^{21} действительные корни уравнения (2.1) удовлетворяют неравенству $t_0 < t_1 < t_2$.

Обозначим программный максимин в игре «один на один» через γ_*^{11} . Из работы [1] следует, что в области DR^{11} цена игры удовлетворяет соотношению $\rho^{11} = \gamma_*^{11}$, а в области $\overline{DN^{11}} = DN^{11} \cup \Gamma_0$ — равенству $\rho^{11} = v^2 / (2\mu)$. Видно, что при $t_0 > \vartheta - v / \mu$ множество $\overline{DN^{11}}$ пусто.

3. Рассмотрим случай 3), изображенный на фиг. 1 (в (1.8) имеет место противоположное неравенство). Ему соответствует трехмерная область D^{21} , отделенная от D^{11} поверхностью Γ_1 , определяемой соотношением $E \in \partial(P_1A_1P_2A_2)$, где $\partial(P_1A_1P_2A_2)$ — граница четырехугольника $P_1A_1P_2A_2$. Поверхность Γ_1 состоит из трех частей: ΓR_1 (отделяет DR^{11} и D^{21}), ΓN_1 (отделяет DN^{11} и D^{21}) и линии L , на которой наряду с условием $E \in \partial(P_1A_1P_2A_2)$ выполнены соотношения (2.2).

Осуществим разбиение области D^{21} на открытые подобласти DR^{21} и DN^{21} . Для этого рассмотрим квадратное уравнение

$$(3.1) \quad (t - t_0)^2 - 2(t - t_0) \left(\vartheta - t_0 - \frac{v \sin \alpha_0}{\mu \sin \beta_0} \right) + \frac{2y}{\mu \sin \beta_0} = 0$$

$$\sin \alpha_0 = (v^2 (\vartheta - t_0)^2 - x^2(t_0))^{1/2} / (v (\vartheta - t_0))$$

$$\sin \beta_0 = \frac{y(t_0) + x(t_0) \operatorname{tg} \alpha_0}{((y(t_0) + x(t_0) \operatorname{tg} \alpha_0)^2 + z^2(t_0))^{1/2}}$$

Границей областей DR^{21} и DN^{21} будет поверхность Γ_2 , точки которой удовлетворяют соотношениям (d^* — дискриминант, t_1 и t_2 — корни уравнения (3.1))

$$(3.2) \quad d^* = \left(\vartheta - t_0 - \frac{v \sin \alpha_0}{\mu \sin \beta_0} \right)^2 - \frac{2y}{\mu \sin \beta_0} = 0, \quad t_1 = t_2 \geq t_0$$

Укажем смысл квадратного уравнения (3.1). Пусть точки A_1 и A_2 в неподвижной системе (η_1, η_2) имеют координаты $(0, a_1)$ и $(0, a_2)$ соответственно, а точка A — координаты $(0, \max_i \{|a_i|\} \operatorname{sign} y(t_0))$ (т. е. A — наиболее удаленная от преследователей точка из множества $\{A_1, A_2\}$). Пусть, далее, игроки P_i и E осуществляют экстремальное прицеливание в точку A . Соответствующее движение назовем экстремальным программным движением (ЭПД). Тогда число $t = t_1$ — корень уравнения (3.1), если на ЭПД выполняется $y(t_1) = 0$. Таким образом, наличие корня $t = t_1$ уравнения (3.1) отражает факт совпадения проекций точек P_i и E на ось η_2 в момент $t = t_1$.

Область DR^{21} есть подобласть D^{21} , в которой выполнено одно из следующих условий: $d^* < 0$, либо $d^* > 0$, но оба корня t_1 и t_2 не превосходят t_0 . Область DN^{21} есть подобласть D^{21} , в которой выполнено условие: $d^* > 0$ и $t_1 > t_0, t_2 > t_0$. Описанными выше случаями исчерпываются все возможные соотношения корней t_1, t_2 уравнения (3.1) и t_0 , поскольку ситуация $t_1 < t_0 < t_2$ невозможна в силу определения точки A . Поэтому имеет место соотношение $DR^{21} \cup \Gamma_2 \cup DN^{21} = D^{21}$.

Точки поверхности Γ_2 обладают следующим свойством. В силу равенства (3.2) оба корня уравнения (3.1) совпадают, причем в момент $t = t_1 = t_2$ равны не только проекции, но и скорости проекций точек P_i и E на ось η_2 .

Схематично разбиение фазового пространства дано на фиг. 2.

4. Пусть $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DR^{21} \cup \Gamma_2 = \overline{DR^{21}}$. Введем в рассмотрение функцию программного максимина

$$(4.1) \quad \gamma_*^{21} = \max \{\gamma_1, \gamma_2\}$$

$$\gamma_k = (z^2(t_0) + a_k^2)^{1/2} - \mu (\vartheta - t_0)^2 / 2, \quad k = 1, 2$$

$$a_{1,2} = y(t_0) \pm ((v(\vartheta - t_0))^2 - x^2(t_0))^{1/2}$$

Можно показать, что функция программного максимина γ_*^{21} в области $\overline{DR^{21}}$ является u -стабильной [2]. Свойство v -стабильности функции γ_*^{21} следует из ее определения. Таким образом, в области $\overline{DR^{21}}$ построена функция γ_*^{21} , обладающая свойством (u, v) -стабильности.

Доказательство u -стабильности γ_^{21} в области $\overline{DR^{21}}$.* Введем дополнительные ограничения на управления игроков P_i . Положим

$$(4.2) \quad u_1^1 = -u_1^2 = u_1, \quad u_2^1 = u_2^2 = u_2$$

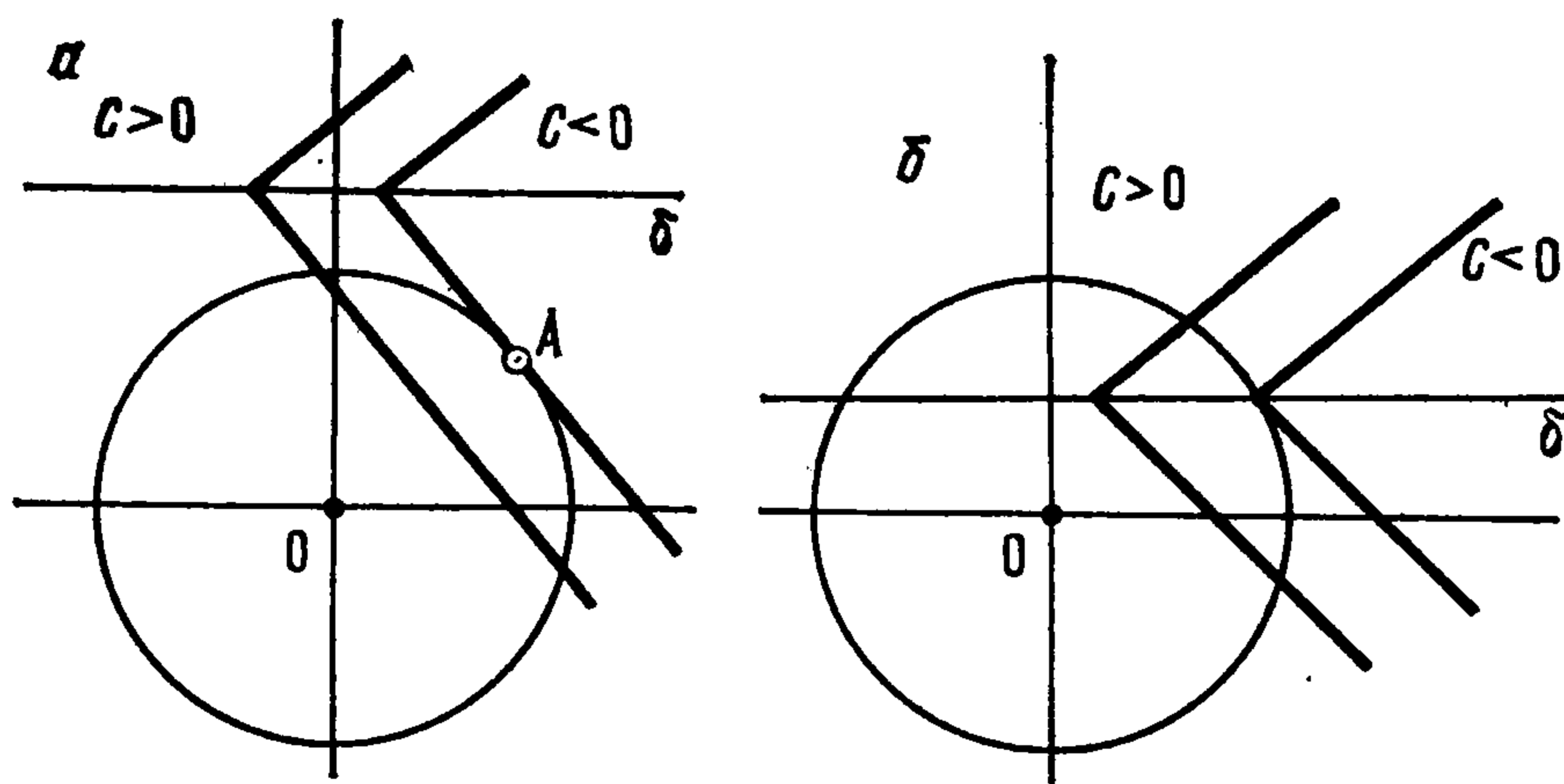
Система (1.6) примет вид

$$(4.3) \quad \dot{x} = v_1, \quad \dot{y} = v_2 - (\vartheta - t) u_2, \quad \dot{z} = -(\vartheta - t) u_1$$

Докажем, что при наличии ограничений (4.2) на управления преследователей функция γ_*^{21} будет u -стабильной в $\overline{DR^{21}}$. Отсюда будет следовать u -стабильность γ_*^{21} и при отсутствии ограничений.

1°. Пусть $\{t_0, \xi(t_0)\} \in \overline{DR^{21}}$, причем $y(t_0) > 0$. Это означает, что $E \notin [P_1 P_2]$. В рассматриваемом случае $\gamma_*^{21} = \gamma_1 > \gamma_2$. Покажем, что при этих условиях функция γ_*^{21} удовлетворяет уравнению Беллмана

$$(4.4) \quad \frac{\partial \gamma_*^{21}}{\partial t} + \max_v \min_u \left[\left(\frac{\partial \gamma_*^{21}}{\partial x} \right) \dot{x} + \left(\frac{\partial \gamma_*^{21}}{\partial y} \right) \dot{y} + \left(\frac{\partial \gamma_*^{21}}{\partial z} \right) \dot{z} \right] = 0$$



Фиг. 3

Введем обозначения

$$r = ((v(\vartheta - t))^2 - x^2)^{1/2}, \quad a_1 = y + r, \quad R_1 = (z_1^2 + a_1^2)^{1/2}$$

Тогда $\gamma_*^{21} = R_1 - \mu(\vartheta - t)^2 / 2$. Подставив это выражение в уравнение (4.4), получим

$$\begin{aligned} \max_v \min_u \left\{ \frac{d\gamma_*^{21}}{dt} \right\} &= \min_u \left(-\frac{(\vartheta - t)u_1 z}{R_1} - \frac{(\vartheta - t)u_2 a_1}{R_1} \right) + \\ &+ \max_v \left(-\frac{a_1 x v_1}{R_1 r} + \frac{a_1 v_2}{R_1} \right) + \mu(\vartheta - t) - \frac{a_1 v^2 (\vartheta - t)}{R_1 r} \end{aligned}$$

Можно проверить, что минимум по u в правой части этого выражения равен $-\mu(\vartheta - t)$, а максимум по v — $a_1 v^2 (\vartheta - t) / (R_1 r)$. Таким образом, основное уравнение выполняется.

2°. Пусть теперь $\{t_0, \xi(t_0)\} \in \overline{DR}^{21}$, причем $y(t_0) = 0$. Отсюда следует, что при $t = t_0$ выполняется равенство $\gamma_*^{21} = \gamma_1 = \gamma_2$ и функция γ_*^{21} не дифференцируема. При проверке u -стабильности функции γ_*^{21} воспользуемся теоремой (3.2.1) из работы [3]. Таким образом, требуется доказать неравенство

$$(4.5) \quad \max_v \min_u \max \{d\gamma_1 / dt, d\gamma_2 / dt\} \leq 0$$

Введем следующие обозначения:

$$r = ((v(\vartheta - t))^2 - x^2)^{1/2}, \quad R = (z^2 + r^2)^{1/2}$$

Тогда $\gamma_*^{21} = R - \mu(\vartheta - t)^2 / 2$, $a_1 = r$, $a_2 = -r$ и неравенство (4.5) примет вид

$$(4.6) \quad \begin{aligned} R^{-1} \max_v \min_u \{ -(\vartheta - t)u_1 z - x v_1 + r | v_2 - (\vartheta - t)u_2 | \} + \\ + \mu(\vartheta - t) - \frac{v^2 (\vartheta - t)}{R} \leq 0 \end{aligned}$$

Отметим, что из условия $\{t_0, \xi(t_0)\} \in \overline{DR}^{21}$ следует справедливость неравенств $v \geq \mu(\vartheta - t) r R^{-1}$, $R \geq \mu(\vartheta - t)^2$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, z, u, v) = -(\vartheta - t)u_1 z - x v_1 + r | v_2 - (\vartheta - t)u_2 |$$

Для оценки функции φ рассмотрим ее линии уровня $\varphi = c = \text{const}$ в осях (s_1, s_2) , где $s_1 = u_1(\vartheta - t)$, $s_2 = u_2(\vartheta - t)$. Обозначим прямую $u_2(\vartheta - t) = v_2$ в плоскости (s_1, s_2) символом δ . Пусть $v_2 \in [\mu(\vartheta - t) r R^{-1}, v]$. При этом предположении минимум достигается в точке A (фиг. 3, а). Тогда имеем

$$\min_u \varphi(x, z, u, v) = r v_2 - x v_1 - R \mu(\vartheta - t).$$

Окончательно получаем

$$\max_v \min_u \varphi = \max_v (r v_2 - x v_1 - R \mu(\vartheta - t)) = v^2 (\vartheta - t) - R \mu(\vartheta - t)$$

Из этого выражения, очевидно, следует, что неравенство (4.6) выполняется (причем, имеет место равенство).

Пусть теперь $0 \leq v_2 \leq \mu(\vartheta - t) r R^{-1}$. Тогда минимум по u функции φ достигается при $u_2 = v_2 / (\vartheta - t)$ (фиг. 3, б). С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} \max_v \min_u \{ -(\vartheta - t)u_1 z - x v_1 + r | v_2 - (\vartheta - t)u_2 | \} = \\ = \max_v \{ -z(\mu^2 (\vartheta - t)^2 - v_2^2)^{1/2} - x v_1 \} \end{aligned}$$

Положим для определенности $x \geq 0$. Тогда очевидно, что $v_1 = - (v^2 - v_2^2)^{1/2}$. Рассмотрим функцию $f(v_2) = x(v^2 - v_2^2)^{1/2} - z(\mu^2(\vartheta - t)^2 - v_2^2)^{1/2}$.

Вычисляя производную f_{v_2} , можно показать, что функция $f(v_2)$ — монотонно-возрастающая на отрезке $0 \leq v_2 \leq \mu(\vartheta - t) rR^{-1}$ при условии $R \geq \mu(\vartheta - t)^2$. Поэтому максимум $f(v_2)$ достигается в крайней точке отрезка при $v_2 = \mu(\vartheta - t) rR^{-1}$, а неравенство (4.6) переходит в строгое равенство.

Аналогично можно рассмотреть случай $v_2 < 0$.

Неравенство (4.5) полностью доказано.

Заметим, что доказательство u -стабильности функции γ_*^{21} для случая, рассмотренного в п. 2°, можно было бы провести аналогично доказательству, приведенному в [10].

5. Рассмотрим множество DN^{21} . При $t \geq \vartheta - v / \mu$ имеем $DN^{21} = \{\emptyset\}$. Поэтому для точек множества $\overline{DN^{21}}$ справедливо неравенство $t < \vartheta - v / \mu$. Можно показать, что

$$(5.1) \quad \min_{\{t, \xi\}} \rho^{21}(t, \xi) = v^2 / (2\mu), \quad \{t, \xi\} \in DN^{21}$$

Очевидно, что значение $\rho^{21} = v^2 / (2\mu)$ соответствует, например, таким позициям $\{t, \xi(t)\} \in DN^{21}$, при которых имеет место поглощение (S_2 — двумерный шар единичного радиуса, $k = v^2 / (2\mu)$)

$$\{G^i(t, \vartheta)\} \oplus kS_2 \supset \{G_e(t, \vartheta)\}$$

Для любого $t \leq \vartheta - v / \mu$ справедливы соотношения

$$\min_{\{t, \xi\}} \rho^{21} = v^2 / (2\mu), \quad \{t, \xi\} \in \Gamma N_1 \cup L$$

$$\inf_{\{t, \xi\}} \gamma_*^{21} = v^2 / (2\mu), \quad \{t, \xi\} \in \Gamma_2$$

Поскольку $DN^{21} = \{\emptyset\}$ при $t = \vartheta - v / \mu$, то траектория системы из любой начальной позиции $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN^{21}$ при $t_0 < \vartheta - v / \mu$ должна не позднее, чем в момент $t = \vartheta - v / \mu$, пересечь либо Γ_1 , либо Γ_2 . Следовательно, равенство (5.1) справедливо.

Разобьем множество DN^{21} на два множества: DN_1^{21} , где $\rho^{21} > v^2 / (2\mu)$, и DN_2^{21} , где $\rho^{21} = v^2 / (2\mu)$. Обозначим через Γ_3 границу областей DN_1^{21} и DN_2^{21} . Алгоритм построения указанных областей будет дан в п. 11.

6. Пусть $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN_1^{21}$. Для указанной позиции поставим вспомогательную игровую задачу 1, состоящую из условий:

А). Уравнения движения и ограничения на управления игроков совпадают с (1.6), (1.2).

Б). Время игры T не фиксировано (из п. 5 следует, что $T \leq \vartheta - v / \mu$).

В). Платой игры 1 будут значение ρ^{11} , если траектория системы вышла на границу Γ_1 , либо значение γ_*^{21} , если траектория вышла на границу Γ_2 .

Для решения игры 1 необходимо рассмотреть вспомогательные игры 2 и 3, формулируемые ниже.

7. Пусть $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN_1^{21}$, причем $E \in [P_1P_2]$, т. е. $y(t_0) = 0$. Введем вспомогательную игру 2 условиями:

А). Уравнения движения игроков совпадают с (1.6).

Б). На управления преследователей помимо ограничений (1.2) наложено дополнительное ограничение: вдоль траектории системы должно выполняться соотношение $y(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq T$.

В). Момент окончания игры T не фиксирован.

Г). Плата| игры и условия окончания совпадают с условием В) п. 6.

Отметим, что при постановке игры 2 изменен класс допустимых стратегий преследователей: условие Б) можно удовлетворить лишь в классе контрстратегий игроков P_i . При этом результат исходной игры не изменит-

ся, так как для задачи с динамикой, описываемой уравнениями (1.6), существует седловая точка в «маленькой игре».

Покажем, что игра 2 закончится на поверхности Γ_2 .

Предположим] противное, т. е. фазовая траектория пересекла границу Γ_1 : $\{t, \xi(t)\} \in \Gamma_1$. В совокупности с условием $y(t) = 0$ это означает, что в момент t игрок E совпал с одним из преследователей: $E = P_i$. Но цена игры для такой позиции $\rho^{21} = \rho^{11} = v^2 / (2\mu)$. Пришли к противоречию, поскольку цена игры в исходной позиции $\rho^{21} > v^2 / (2\mu)$.

Рассмотрим следующие стратегии игроков:

$$(7.1) \quad U_0^{(2)}: u_1^1 = -u_1^2 = (\mu^2 - (u_2^1)^2)^{1/2}, \quad u_2^1 = u_2^2 = v_2 / (\vartheta - t)$$

$$V_0^{(2)}: v_1 = -\text{sign}(x) \min \left\{ |x| \left(\frac{\mu^2 (\vartheta - t)^2 - v^2}{z^2 - x^2} \right)^{1/2}, v \right\}$$

$$v_2 = (v^2 - v_1^2)^{1/2}$$

($U_0^{(2)}$ — контруправление преследователей, $V_0^{(2)}$ — позиционное управление убегающего).

Пусть также $U^{(2)}(\xi, v)$ — произвольная контрстратегия преследователей, $V^{(2)}(\xi)$ — произвольное позиционное управление убегающего, γ^* — значение функционала в игре 2 на соответствующих стратегиях.

Можно показать, что для $U_0^{(2)}$ и $V_0^{(2)}$ выполнено неравенство седловой точки

$$(7.2) \quad \gamma^*(U_0^{(2)}, V^{(2)}) \leq \gamma^*(U_0^{(2)}, V_0^{(2)}) \leq \gamma^*(U^{(2)}, V_0^{(2)})$$

1°. Докажем сначала левое неравенство (7.2). Для этого подставим стратегию $U_0^{(2)}$ в игру 2. Получим задачу оптимального управления за игрока E следующего вида:

$$(7.3) \quad \dot{x} = v_1, \quad \dot{z} = -(\mu^2 (\vartheta - t)^2 - v_2^2)^{1/2}, \quad (v_1^2 + v_2^2)^{1/2} \leq v$$

При $E \in [P_1 P_2]$ на отрезке $t_0 \leq t \leq T$ условие окончания (попадания траектории на Γ_2) принимает вид

$$(7.4) \quad \Phi = (v^2 (\vartheta - T)^2 + z^2(T) - x^2(T))^{1/2} - \mu (\vartheta - T)^2 = 0$$

Плата (программный максимум) вычисляется по формуле

$$(7.5) \quad \gamma_*^{21} = (v^2 (\vartheta - T)^2 + z^2(T) - x^2(T))^{1/2} - \mu (\vartheta - T)^2 / 2$$

Таким образом, функционалом задачи будет $\gamma^* = \max_{U^{(2)}} \gamma_*^{21}(T)$.

Из определения области DN_1^{21} следует, что если начальная позиция $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN_1^{21}$ и выполняется неравенство $z(t_0) > |x(t_0)| > 0$, то аналогичное неравенство будет иметь место и в момент времени $t = T$: $z(T) > |x(T)| \geq 0$. Можно показать также, что из равенства $x(t_0) = 0$ следует тождество $x(t) \equiv 0$ при $t_0 \leq t \leq T$.

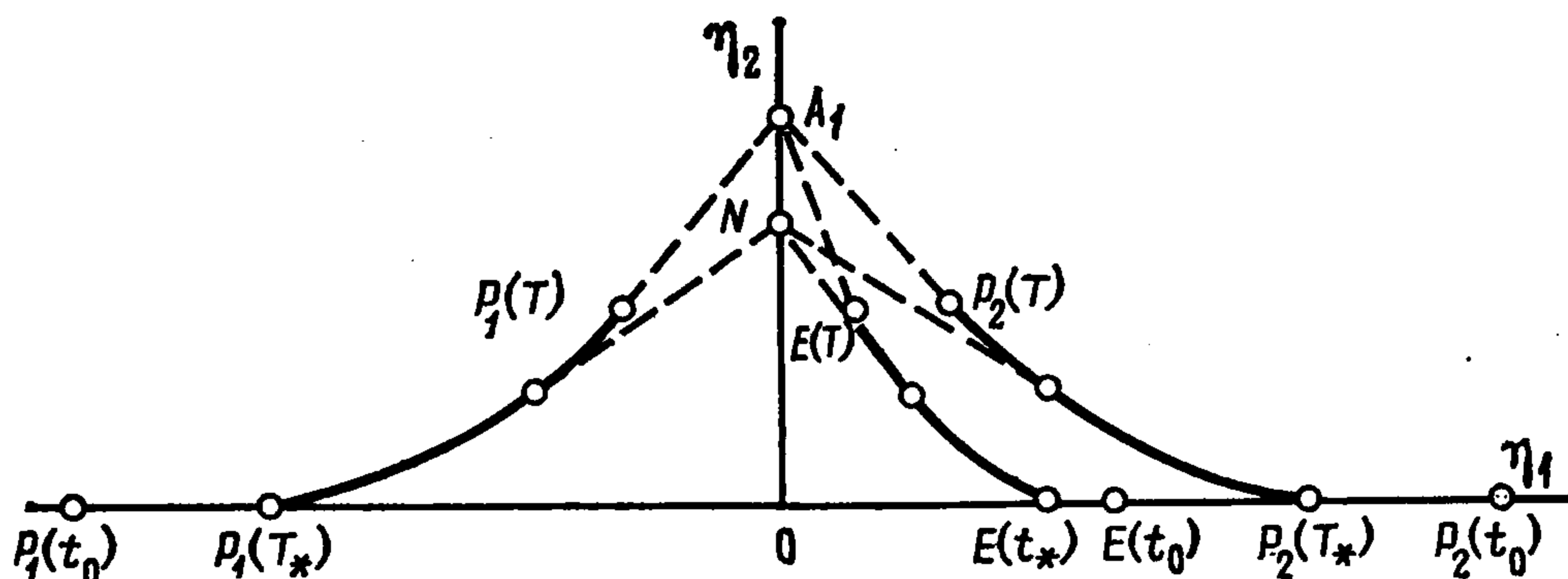
Из принципа максимума [11] следует, что оптимальное управление игрока E в задаче 2 должно иметь вид

$$(7.6) \quad v_1 = -\text{sign}(x(T)) \min \left\{ |x| \left(\frac{\mu^2 (\vartheta - t) - v^2}{z^2(T) - x^2(T)} \right), v \right\}$$

$$v_2 = \pm (v^2 - v_1^2)^{1/2}$$

Очевидно, что значение функционала не зависит от знака управления v_2 , так как порождаемые этими управлениями траектории симметричны относительно оси η_1 . Положим, для определенности, что $v_2 \geq 0$, и проанализируем выражение для v_1 из формул (7.6). Предположим, что при малых t минимум достигается на втором члене, т. е. $v_1(t) = -\text{sign}(x(T)) v$. В системе координат (η_1, η_2) этому управлению соответствуют прямолинейные участки траекторий игроков (фиг. 4). Начиная с некоторого момента $t = t_*$ вплоть до момента $t = T$ минимум в (7.6) будет достигаться на первом члене, поэтому игрок E использует управление

$$(7.7) \quad v_1(t) = -x(T) (\mu^2 (\vartheta - t)^2 - v^2)^{1/2} / (z^2(T) - x^2(T))^{1/2}$$



Фиг. 4

Подставляя управление (7.7) в систему (7.3), получим, что при $t \in [t_*, T]$ имеют место соотношения

$$(7.8) \quad z'(t) / x'(t) = z(T) / x(T) = z(t) / x(t)$$

т. е. в законе управления (7.7) можно заменить $x(T)$, $z(T)$ на $x(t)$, $z(t)$.

В момент $t = t_*$ выполняется равенство

$$x(t_*) (\mu^2 (\vartheta - t_*)^2 - v^2)^{1/2} / (z^2(t_*) - x^2(t_*))^{1/2} = v$$

откуда следует, что $z(t_*) / (\mu (\vartheta - t_*)) = x(t_*) / v$. В неподвижной системе координат моменту $t = t_*$ будет соответствовать начало криволинейного движения игроков (фиг. 4).

Из (7.7), (7.8) вытекает, что на криволинейном участке траектории проекции скоростей игроков P_i и E на ось η_1 пропорциональны фазовым координатам. Для проекций скоростей на ось η_2 получим $(\vartheta - t) u_2^1 = (\vartheta - t) u_2^2 = v_2$. Отсюда и из (7.7), (7.8) вытекает равенство

$$-x(t) v_2(t) / v_1(t) = z(t) u_2^1(t) / u_1^1(t)$$

Оно означает, что на криволинейных участках траекторий векторы скоростей игроков P_i и E направлены в одну и ту же точку N на оси η_2 неподвижной системы координат. Точка N в процессе криволинейного движения перемещается по оси η_2 от точки O при $t = t_*$ до точки A (точка экстремального прицеливания) при $t = T$.

Задача оптимального управления (7.3) — (7.5) решена.

2°. Управление (7.6), решающее задачу (7.3) — (7.5), является программным. Но, используя (7.7), (7.8), его можно переписать в виде, совпадающем с $V_0^{(2)}$, и рассматривать как позиционное управление игрока E .

Докажем теперь правое неравенство в (7.2). Для этого подставим $V_0^{(2)}$ в игру 2. Получим задачу оптимального управления за игроков P_i следующего вида:

$$(7.9) \quad x' = v_1(t, x, z) - \eta_1^+, \quad z' = \eta_1^-; \quad ((u_1^i)^2 + (u_2^i)^2)^{1/2} \leq \mu$$

Уравнение связи между фазовыми координатами и управлениями задается соотношением

$$(7.10) \quad \Psi = v_2(t, x, z) - \eta_2^+ - (x/z) \eta_2^- = 0$$

Условие окончания процесса и плата совпадают с (7.4) и (7.5) соответственно (преследователи стремятся минимизировать $\gamma_*^{21}(T)$).

В формулах (7.9), (7.10) функции $v_k(t, x, z)$ — компоненты позиционной стратегии $V_0^{(2)}$ игрока E , $\eta_k^\pm = 1/2 (\vartheta - t) [u_k^2 \pm u_k^1]$, $k = 1, 2$.

Аналогично тому, как это делалось в п. 1°, проверяется, что программное управление преследователей $u^{(2)}(t) = U_0^{(2)}(V_0^{(2)})$ удовлетворяет принципу максимума для задачи (7.9), (7.10), (7.4), (7.5).

8. Пусть $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN^{21}$ и $E \in [P_1 P_2]$, т. е. $y(t_0) = 0$. Укажем алгоритм получения значения функционала γ^* вспомогательной игры 2.

Предположим, для определенности, что $x(t_0) \geq 0$. Пусть также в момент $t = t_0$ выполнено неравенство $z(t_0) / (\mu (\vartheta - t_0)) \geq x(t_0) / v$, означающее, что у оптимальной траектории игры 2 отсутствует прямолинейный участок (фиг. 4). Обозначим

$$J(t_0, t) = \int_{t_0}^t (\mu^2 (\vartheta - \tau)^2 - v^2)^{1/2} d\tau, \quad \Delta_0 = (z^2(t_0) - x^2(t_0))^{1/2}$$

На криволинейном участке имеют место равенства

$$(8.1) \quad x(t) = x(t_0) (1 - J(t_0, t)) / \Delta_0, \quad z(t) = z(t_0) (1 - J(t_0, t)) / \Delta_0$$

Рассмотрим уравнение

$$(8.2) \quad J(t_0, t) / \Delta_0 = 1$$

Если оно имеет корень $t = t_* \in [t_0, \vartheta]$, то в момент $t = t_*$ выполняется равенство $z(t_*) = x(t_*) = 0$. Это говорит о том, что $\gamma^* = v^2 / (2\mu)$, а начальная позиция $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN_2^{21}$, т. е. $\rho^{21} = v^2 / (2\mu)$.

Пусть уравнение (8.2) не имеет корня. В момент $t = T$ должно выполняться равенство (7.4). Подставляя (8.1) в (7.4), получаем нелинейное уравнение для определения времени T игры 2

$$(8.3) \quad [v^2 (\vartheta - T)^2 + (1 - J(t_0, T) / \Delta_0)^2 \Delta_0^2]^{1/2} = \mu (\vartheta - T)^2$$

Значение функционала находим из формулы $\gamma^* = \mu (\vartheta - T)^2 / 2$.

Если в момент $t = t_0$ имело место соотношение $z(t_0) / (\mu (\vartheta - t_0)) < x(t_0) / v$, то это означает, что у оптимальной траектории игры 2 есть прямолинейный участок. Поэтому сначала ищется минимальный корень $t = t^*$ квадратного уравнения $z(t) / (\mu (\vartheta - t)) = x(t) / v$, где

$$z(t) = z(t_0) - \int_{t_0}^t \mu (\vartheta - \tau) d\tau, \quad x(t) = x(t_0) - v(t - t_0)$$

Можно показать, что при $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN_1^{21}$ этот корень (соответствующий моменту окончания прямолинейного участка) обязательно существует. Далее полагаем $t_0 = t^*$ и проделываем выкладки, помещенные в начале данного пункта.

9. Пусть теперь $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN_1^{21}$, причем $E \notin [P_1 P_2]$. Будем полагать, что $y(t_0) > 0$. Сформулируем вспомогательную игру 3 для указанной позиции:

А). Уравнения движения и ограничения на управления игроков совпадают с (1.6).

Б). Время игры T_f не фиксировано.

В). Преследователи P_i стремятся вывести траекторию системы на поверхность $\Psi \equiv y(T_f) = 0$, минимизируя при этом значение платы $\gamma^*(T_f)$. Задача убегающего противоположна.

Ниже будут построены позиционные стратегии игроков, доставляющие седловую точку задаче 3.

Из зависимостей $\gamma^* = \gamma^*(x, z, t)$, $\Psi = \Psi(y)$ и из принципа максимума [11] следует, что на терминальной поверхности $\Psi(y) = 0$ должны выполняться равенства

$$(9.1) \quad \frac{d}{dt} \Psi \Big|_{t=T_f} = 0, \quad \frac{d}{dt} \gamma^* \Big|_{t=T_f} = 0$$

которые означают, что траектория подходит к терминальной поверхности по касательной. Пусть точка $N(0, n)$ принадлежит оси η_2 . Будем рассматривать координату n в качестве параметра. Обозначим

$$U_N^{(3)} = \{(-1)^{i+1} z \mu (z^2 + n^2)^{-1/2}, n \mu (z^2 + n^2)^{-1/2}\}$$

$$V_N^{(3)} = \{-xv(x^2 + (n-y)^2)^{-1/2}, (n-y)v(x^2 + (n-y)^2)^{-1/2}\}$$

($U_N^{(3)}$, $V_N^{(3)}$ — экстремальные управления игроков P_i и E , направленные в точку N).

Определим такое значение параметра $n = n^*$, что при движении, порожденном управлениями $U_{N^*}^{(3)}$ и $V_{N^*}^{(3)}$, в момент окончания игры $t = T_f$, выполняется условие касания (9.1), т. е. $\Psi \equiv \dot{y} = 0$. Из принадлежности начальной позиции $\{t_0, \xi(t_0)\}$ множеству DN_1^{21} вытекает, что искомое значение параметра n^* и соответствующая ему точка $N^*(0, n^*)$ обязательно существуют и единственны (так как $E \notin [P_1P_2]$ при $t = t_0$). Используя принцип максимума, можно проверить, что $U_{N^*}^{(3)}$ и $V_{N^*}^{(3)}$ доставляют седловую точку вспомогательной игре 3 (γ^{**} — значение платы γ^* на соответствующих стратегиях)

$$(9.2) \quad \gamma^{**}(U_{N^*}^{(3)}, V^{(3)}) \leq \gamma^{**}(U_{N^*}^{(3)}, V_{N^*}^{(3)}) \leq \gamma^{**}(U^{(3)}, V_{N^*}^{(3)})$$

10. Опишем алгоритм получения значения γ^{**} для заданной начальной позиции $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN_1^{21}$. Обозначим

$$(10.1) \quad \begin{aligned} \sin \alpha_1 &= (n - y(t_0)) / ((n - y(t_0))^2 + x^2(t_0))^{1/2} \\ \sin \beta_1 &= n / (n^2 + z^2(t_0))^{1/2} \end{aligned}$$

и рассмотрим уравнение

$$(10.2) \quad \sin \beta_1 \int_{t_0}^{T_f} \mu(\vartheta - \tau) d\tau = v(T_f - t_0) \sin \alpha_1 + y(t_0)$$

Подставляя (10.1) в (10.2), получаем квадратное уравнение с параметром n относительно времени T_f окончания вспомогательной игры 3. Тогда $n = n^*$ — искомое значение параметра, если дискриминант уравнения (10.2) при $n = n^*$ равен нулю. Значению n^* соответствует момент $t = T_f$ окончания вспомогательной игры 3 и ее финальная позиция $\{T_f, x(T_f), 0, z(T_f)\}$ — исходная для вспомогательной игры 2. Применяя процедуру, описанную в п. 8, получаем значение программного максимина γ_*^{21} в момент $t = T$ выхода траектории на границу Γ_2 . Полагаем $\gamma^{**} = \gamma_*^{21}(T)$.

11. Используя позиционные стратегии $U_{N^*}^{(3)}$ и $V_{N^*}^{(3)}$, можно провести разбиение множества DN^{21} при $t = t_0$ на области DN_1^{21} и DN_2^{21} . Множество DN_1^{21} состоит из таких позиций $\{t_0, \xi(t_0)\}$, для которых применение алгоритма из п. 10 дает результат $\gamma^{**} > v^2 / (2\mu)$. На множестве DN_2^{21} достигается равенство

$$(11.1) \quad \gamma^{**} = v^2 / (2\mu)$$

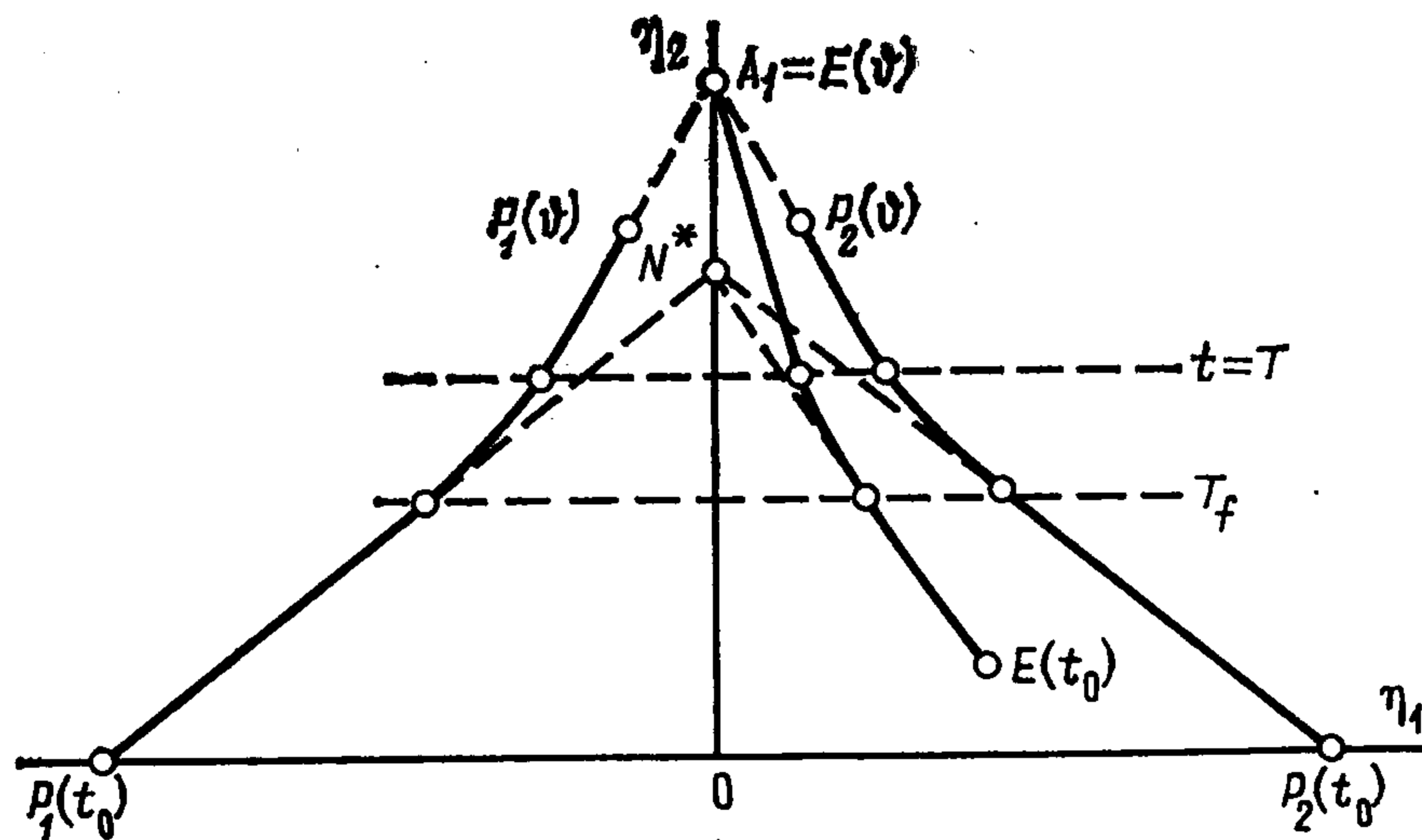
Для точек из множества DN_1^{21} стратегии, доставляющие результат (11.1), единственны у обоих игроков. Это следует из неравенств (9.2). На границе Γ_3 областей DN_1^{21} и DN_2^{21} стратегии преследователей, гарантирующие им результат (11.1), единственны, а стратегия убегающего не единственна. Во внутренних точках области DN_2^{21} неединственны стратегии обоих игроков. Это явление имеет место и в области D^{11} (см. [1]).

12. Положим

$$\gamma^{***} = \begin{cases} \gamma_*^{21}, & \{t_0, \xi(t_0)\} \in \overline{DR}^{21} \\ \gamma^{**}, & \{t_0, \xi(t_0)\} \in DN^{21} \end{cases}$$

Функция γ^{***} непрерывна в области D^{21} , так как функции γ_*^{21} и γ^{**} непрерывны в соответствующих областях определения, а их значения на границе Γ_2 совпадают.

Утверждение 1. Функция γ^{***} является (u, v) -стабильной в области D^{21} .



Фиг. 5

Доказательство вытекает из существования седловых точек во вспомогательных играх 2 и 3.

Из утверждения 1 вытекают важные следствия.

Следствие 1. Оптимальное решение вспомогательной игры 1 состоит из последовательности оптимальных решений игр 3 и 2. Стратегии, доставляющие седловую точку игре 1, имеют вид

$$(12.1) \quad U_0^{(1)} = \begin{cases} U_{N^*}^{(3)}, & y(t) \neq 0 \\ U_0^{(2)}, & y(t) = 0 \end{cases}, \quad V_0^{(1)} = \begin{cases} V_{N^*}^{(3)}, & y(t) \neq 0 \\ V_0^{(2)}, & y(t) = 0 \end{cases}$$

Заметим, что в (12.1) стратегия $V_0^{(1)}$ — позиционная. Стратегии $U_0^{(1)}$ позиционными не являются, так как $U_0^{(2)}$ — контруправления.

Оптимальная траектория задачи 1 состоит из двух частей. Первая есть оптимальная траектория игры 3 на отрезке времени $t_0 \leq t \leq T_f$. Ее можно назвать траекторией экстремального наведения в точку N^* . Вторая часть — оптимальная траектория игры 2 на отрезке времени $T_f \leq t \leq T$. Назовем ее траекторией пропорционального сближения, так как вдоль нее выполняется соотношение $z(t) / x(t) = \text{const}$.

Следствие 2. Введение связи (7.14) на управления преследователей в задаче 2 не уменьшает возможностей игроков P_i в задаче 1.

Таким образом, если $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN_1^{21}$, то оптимальная траектория игры 1 будет проходить некоторое время по поверхности $y(t) = 0$, причем выходить на нее (момент $t = T_f$) и сходиться с нее ($t = T$) она будет по касательной ($y' = 0$ при $T_f^- \leq t \leq T^+$).

13. Рассмотрим функцию

$$\rho^{21} = \begin{cases} \rho^{11}, & \{t_0, \xi(t_0)\} \in D^{11} \\ \gamma^{***}, & \{t_0, \xi(t_0)\} \in D^{21} \end{cases}$$

Аналогично функции γ^{***} она непрерывна во всем пространстве. Ранее было показано, что ρ^{11} и γ^{***} являются (u, v) -стабильными в областях D^{11} и D^{21} соответственно. Следовательно, функция ρ^{21} будет (u, v) -стабильной во всем пространстве, т. е. служит ценой игры (1.6), (1.2), (1.7).

14. Типичная траектория оптимальной игры из начальной позиции $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN_1^{21}$ изображена на фиг. 5. Она является объединением оптимальной траектории игры 1 при $t_0 \leq t \leq T$ и экстремального программного движения при $T \leq t \leq \vartheta$.

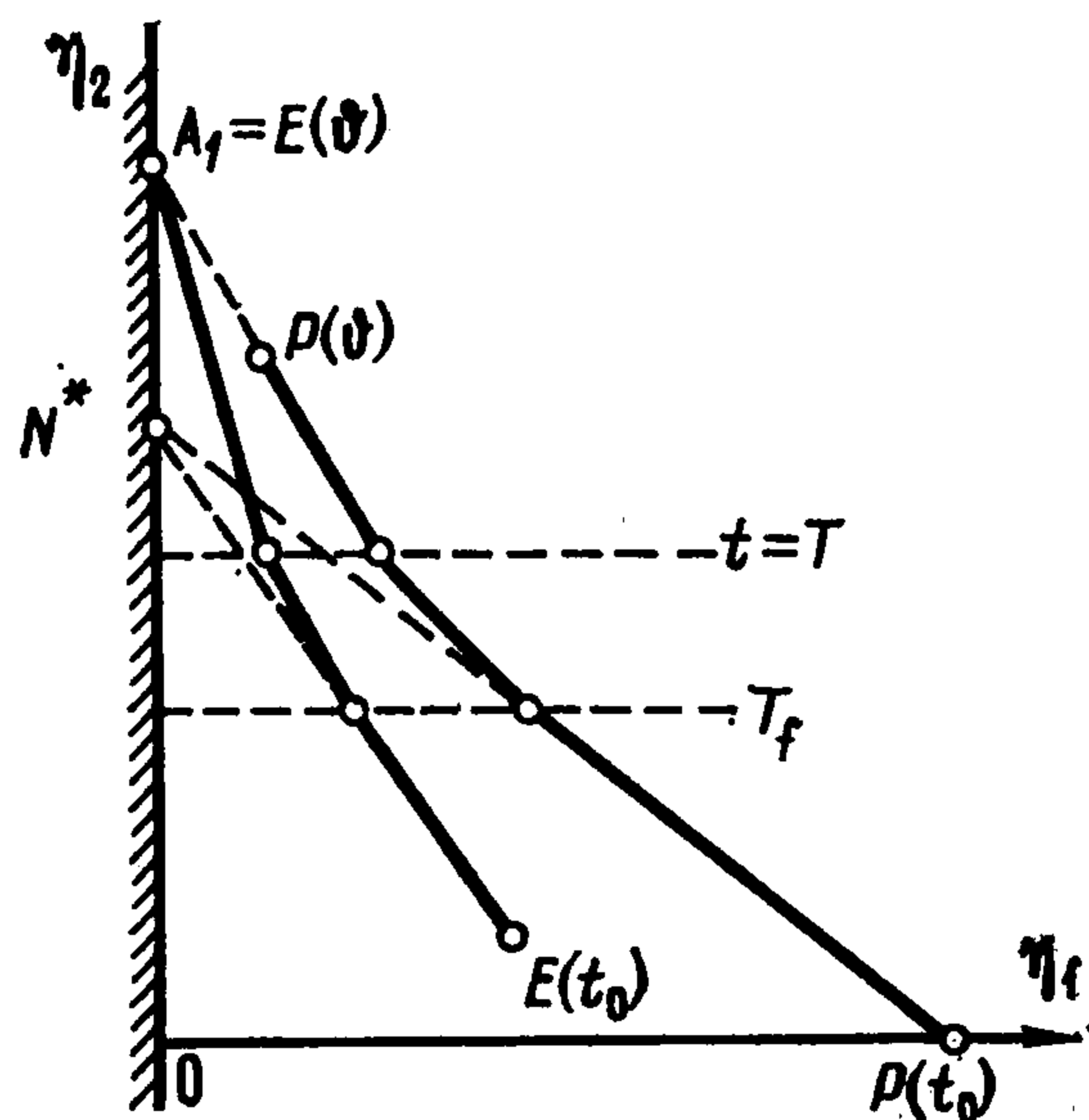
Множество DN_2^{21} можно разбить на подмножества DN_{2d}^{21} и DN_{2b}^{21} . Множество DN_{2d}^{21} состоит из таких позиций $\{t_0, \xi(t_0)\}$, для которых

выполняется соотношение

$$\{G^i(t_0, \vartheta)\} \oplus \frac{v^2}{2\mu} S_2 \supset \{G_e(t_0, \vartheta)\}$$

Отметим, что для таких позиций имеет место игра «один на один» между E и ближайшим к нему преследователем, т. е. $\rho^{21} = \rho^{11} = v^2 / (2\mu)$.

Множество DN_{2b}^{21} определим как разность множеств $DN_{2b}^{21} = DN_2^{21} \setminus DN_{2d}^{21}$. Для начальных позиций $\{t_0, \xi(t_0)\} \in DN_{2b}^{21}$ преследователи, действуя совместно, гарантируют себе результат $\rho^{21} = v^2 / (2\mu)$, лучший, чем в игре «один на один» (между E и любым преследователем). Рассмотрим одну из таких позиций. Предположим, что игроки P_i и E применяют стратегии $U_0^{(1)}$ и $V_0^{(1)}$. Тогда соответствующая траектория будет такова, что в некоторый момент $t = t_* \in [T_f, T]$ точки P_i и E совпадут на оси η_2 (т. е. $z(t_*) = x(t_*) = 0$). Очевидно, что на таком движении уравнения (1.6) имеют место вплоть до момента $t = t_*$ (так как $z(t) / x(t) = \text{const}$ при $t > T_f$).



Фиг. 6

Замечания. 1°. Исходя из построенной функции цены можно по известным алгоритмам [5] формировать стратегии (физически реализуемые), доставляющие игрокам результат, сколь угодно близкий к значению цены игры.

2°. В силу симметрии полученных для игроков P_1 и P_2 оптимальных управлений аналогичное решение имеет задача «один на один» с фазовым ограничением типа «полуплоскость» (фиг. 6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пашков А. Г. Об одной игре сближения.— ПММ, т. 34, вып. 5, 1970, с. 804—811.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
4. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
5. Красовский Н. Н. Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели.— Матем. сб., 1978, т. 107, № 4, с. 541—571.
6. Hagedorn P., Breakwell J. V. A differential game with two Pursuers and one Evader.— J. Optimization Theory and Appl., 1976, v. 18, No. 1, p. 15—29.
7. Григоренко Н. Л. Преследование несколькими разнотипными объектами одного убегающего.— Докл. АН СССР, 1983, т. 268, № 3, с. 529—533.
8. Чикрий А. А. Групповое преследование при ограниченных координатах убегающего.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 6, с. 906—913.
9. Пашков А. Г. Об одной оценке в дифференциальной игре сближения.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 6, с. 1015—1021.
10. Пашков А. Г., Терехов С. Д. Об одной игре оптимального преследования двумя объектами одного.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 898—903.
11. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
12. Брайсон А., Хо Ю. Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.