Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 4, 1985

УДК 62—50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С УСРЕДНЕННЫМ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИИ ФУНКЦИОНАЛОМ

Панасюк А. И., Панасюк В. И.

Определяется множество бесконечных оптимальных траекторий (БОТ). Показано, что на произвольном фиксированном отрезке времени всякая оптимальная траектория системы для задачи с достаточно большим временем управления (при произвольных начальных условиях) может быть равномерно приближена некоторой БОТ с любой желаемой точностью. Приводятся достаточные условия, гарантирующие существование БОТ, и исследуется структура множества БОТ при помощи оператора перестройки. Определяется множество магистральных траекторий и доказывается корректность этого определения. Получена цепочка аппроксимаций: БОТ аппроксимируют оптимальные траектории конечной длительности; магистральные траектории аппроксимируют БОТ.

Исследуется характеризация оптимальных траекторий большой длительности, БОТ и магистральных траекторий при помощи решения задачи оптимального управления с усредненным вдоль траектории функционалом. Показано, что предельное усредненное по времени значение функционала качества на оптимальных траекториях задач на конечном интервале при его неограниченно возрастающей длительности существует, не зависит от выбора начальных и конечных условий этих задач и равно его значению на любой БОТ. Для задачи «оптимального в среднем» управления точная нижняя грань усредненного по времени функционала не изменится, если ограничиться рассмотрением только периодических режимов системы со всевозможными периодами. Работа продолжает исследования авторов [1—4]. В несколько ином аспекте вопросы асимптотики оптимальных траекторий систем управления исследовались в [5, 6]. Ряд близких задач разбирался в [7—11] и др. Обобщения на задачи с дискретным временем рассматривались в [12, 13].

1. Постановка задачи. Рассматривается задача оптимального управления

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ u),\quad u\in U\subset R^r;\quad x\in X\subset R^n \tag{1.1}$$

$$I(x(\cdot),\ u(\cdot),\ t_0,\ T)=\int_{t_0}^{T} F(x,\ u)\,dt\to\min;\quad t_0,\ T=\text{const} \tag{1.2}$$

где множество X замкнуто, а U компактно. Функции $f(x,\ u)$, $F(x,\ u)$ непрерывны, а $f(x,\ u)$ удовлетворяет, кроме того, следующему условию: по $x\in X$ найдутся $L>0$ и $\varepsilon>0$, такие, что $\|f(x',\ u)-f(x'',\ u)\|\leqslant L\|x'-x''\|$ при $x',\ x''\in X$, $\|x'-x\|<\varepsilon$, $\|x''-x\|<\varepsilon$, $u\in U$. Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Допустимыми управлениями служат измеримые вектор-функции $u(t)\in U$, траекториями — абсолютно непрерывные вектор-функции $x(t)$, удовлетворяющие (1.1) почти всюду при некотором допустимом управлении. Исследуются асимптотические свойства оптимальных траекторий при $T\to\infty$.

2. Бесконечные оптимальные траектории. Допустимое управление $u^\circ(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$ и любая соответствующая ему траектория $x^\circ(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$ называются оптимальными, если для всякого другого допустимого управления $u(t)$ и любой соответствующей ему траектории $x(t)$,

$t_0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющей граничным условиям $x(t_0) = x^\circ(t_0)$, $x(T) = x^\circ(T)$, выполнено неравенство $I(x(\cdot), u(\cdot), t_0, T) \geqslant I(x^\circ(\cdot), u^\circ(\cdot), t_0, T)$. Принцип оптимальности заключается в том, что любая часть (дуга) $x^\circ(t)$, $t_0 \leqslant \xi_1 \leqslant t \leqslant \xi_2 \leqslant T$ оптимальной траектории $x^\circ(t)$ сама является оптимальной траекторией.

Определение. Допустимое управление $u^\circ(t)$ и какая-либо соответствующая ему траектория $x^\circ(t)$, определенные на множестве J из R одного из следующих типов: $-\infty < t < \infty$; $-\infty < t \leqslant b$; $a \leqslant t \leqslant b$; $a \leqslant t < \infty$, называются оптимальными, если для любого сегмента $[\xi_1, \xi_2] \subset J$ сужения $x^\circ(t)$, $u^\circ(t)$ на $\xi_1 \leqslant t \leqslant \xi_2$ являются оптимальными траекторией и управлением. Оптимальную траекторию $x^\circ(t)$, $-\infty < t < \infty$ называем бесконечной оптимальной траекторией (БОТ) [2, 4].

3. Предельные переходы по последовательностям траекторий. Обозначим

$$q^* = (q, q_{n+1}) \in R^{n+1}$$

$$G^*(x) = \{q^*: q = f(x, u), q_{n+1} \geqslant F(x, u), u \in U\}$$

Теорема 3.1. Пусть при $x \in X$ множество $G^*(x)$ выпукло и последовательность траекторий $x^k(t)$, $-\infty < a \leqslant t \leqslant b < \infty$, $k \to \infty$, отвечающих некоторым допустимым $u^k(t)$, равномерно на $[a, b]$ сходится к $x(t)$. Тогда $x(t)$ — траектория, отвечающая некоторому допустимому управлению $u(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, удовлетворяющему неравенству

$$I(x(\cdot), u(\cdot), a, b) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} I(x^k(\cdot), u^k(\cdot), a, b) \tag{3.1}$$

Доказательство выполняется по известной схеме ([14], с. 95—104).

Обозначим $A(\varepsilon, x)$, $\varepsilon > 0$ множество точек в X, достижимых из $x \in X$ за время, в точности равное ε. Соответственно $A(-\varepsilon, x) \subset X$ — множество точек, из которых x достижимо за время ε. Скажем, что система (1.1) положительно (отрицательно) локально управляема на траектории $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ при $t = t^* \in (a, b)$, если найдется $\varepsilon_0 > 0$, для которого при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливо включение $x(t^* + \varepsilon) \in \operatorname{Int} A(\varepsilon, x(t^*))$ (соответственно, $x(t^* - \varepsilon) \in \operatorname{Int} A(-\varepsilon, x(t^*))$). Скажем, что система предельно управляема на бесконечной траектории $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, если найдутся последовательности $t_k' \to -\infty$, $t_k'' \to \infty$ при $k \to \infty$, такие, что система отрицательно локально управляема на $x(\cdot)$ при $t = t_k'$ и положительно локально управляема на $x(\cdot)$ при $t = t_k''$, $k \geqslant 1$.

Из (3.1) и предельной управляемости следует

Теорема 3.2. Пусть при $x \in X$ множество $G^*(x)$ выпукло; непрерывная функция $x(t) \in X$, $-\infty < t < \infty$ на каждом сегменте $a \leqslant t \leqslant b$ является равномерным пределом некоторой зависящей от $[a, b]$ последовательности оптимальных траекторий. Тогда $x(t)$ — траектория. Если дополнительно система (1.1) предельно управляема на $x(\cdot)$, то $x(\cdot)$ — БОТ.

4. Оператор перестройки П [2, 4]. Для компакта $D \subset X$ обозначим $C(R, D)$ топологическое пространство всех непрерывных отображений $R \to D$ с топологией равномерной сходимости на компактах. Для подмножества $W' \subset C(R, D)$ определим оператор перестройки $\Pi(W') \subset C(R, D)$, переводящий подмножества из $C(R, D)$ в подмножества из $C(R, D)$ согласно формулам

$$\Pi(W') = \overline{SW'},\quad SW' = \bigcup_{\varphi(\cdot)\in W'} \bigcup_{\tau\in R} \varphi_\tau(\cdot);\quad \varphi_\tau(t) \equiv \varphi(t + \tau)$$

а замыкание берется в $C(R, D)$, т. е. оператор Π переводит W' в подмножество из $C(R, D)$, полученное замыканием всевозможных сдвигов $\varphi_\tau(\cdot)$ всех отображений из W'. Непосредственно проверяются свойства оператора перестройки.

Теорема 4.1. Пусть $W', W'' \subset C(R, D)$. Тогда $S\Pi(W') = \Pi(W')$; $W' \subset \Pi(W')$; $\Pi\Pi(W') = \Pi(W')$; $\Pi(W') \cup \Pi(W'') = \Pi(W' \cup W'')$; $\Pi(W' \cap W'') \subset \Pi(W') \cap \Pi(W'')$.

Рассмотрим какое-либо подмножество $V \subset C(R, D)$, инвариантное относительно оператора перестройки $\Pi(V) = V$. Введем на V новую топологию, полагая замкнутыми такие и только такие подмножества $V' \subset V$, что $\Pi(V') = V'$. Полученное топологическое пространство обозначим V_*. Из теоремы 4.1 следует, что Π — оператор замыкания. Тогда в силу теоремы Куратовского ([15], с. 67) получим результат, показывающий, что инвариантные относительно оператора Π множества могут исследоваться топологическими средствами.

Следствие 4.1. Топология пространства V_* определена корректно.

Пусть $W' \subset C(R, D)$ — некоторое множество БОТ. Скажем, что оптимальность инвариантна относительно действия Π на W', если $\Pi(W')$ состоит из БОТ. Обозначим W_D множество всех БОТ, лежащих в D. Из теоремы 3.2 получим достаточное условие инвариантности оптимальности относительно Π.

Следствие 4.2. Пусть множество $G^*(x)$ выпукло при $x \in D$; система предельно управляема на любой траектории $x(t) \in D$, $-\infty < t < \infty$, лежащей в компакте D. Тогда для любого непустого множества БОТ $W' \subset C(R, D)$, $W' \neq \varnothing$ оптимальность инвариантна относительно действия Π на W'. Если, кроме того, $W_D \neq \varnothing$, то $\Pi(W_D) = W_D$.

5. Множество магистральных траекторий. Для компакта $D \subset X$ непустое множество $W_D^\circ \subset W_D$, удовлетворяющее трем условиям

1) аппроксимативности: $\Pi(\varphi(\cdot)) \cap W_D^\circ \neq \varnothing$ при $\varphi(\cdot) \in W_D$,

2) замкнутости: $\Pi(W_D^\circ) = W_D^\circ$,

3) минимальности: W_D° не содержит собственного подмножества, удовлетворяющего условиям аппроксимативности и замкнутости, назовем множеством магистральных траекторий для W_D. Корректность сделанного определения обосновывает

Теорема 5.1. Пусть $W_D \neq \varnothing$; оптимальность инвариантна относительно действия Π на W_D. Тогда $\Pi(W_D) = W_D$; множество магистральных траекторий W_D° для W_D существует и единственно.

Доказательство. Рассмотрим семейство Φ всех подмножеств $\varnothing \neq W' \subset W_D$, удовлетворяющих условиям аппроксимативности и замкнутости. Тогда $W_D \in \Phi$ и можно показать, что пересечение конечного числа подмножеств из Φ снова является элементом Φ, т. е. Φ обладает свойством конечного пересечения [15]. Равностепенная непрерывность траекторий в компакте D и инвариантность $\Pi(W_D) = W_D$ влекут, согласно теореме Асколи, компактность W_D. Отсюда $\bigcap W' \neq \varnothing$, $W' \in \Phi$ и достаточно положить $W_D^\circ = \bigcap W'$, $W' \in \Phi$.

Если X — компакт, то обозначаем $W = W_X$, $W^\circ = W_X^\circ$ и называем W° просто множеством магистральных траекторий.

Теорема 5.2. Пусть X — компакт; $G^*(x)$ выпукло при $x \in X$; для любого $T > 0$ найдется траектория длительности T; система предельно управляема на любой траектории $x(t) \in X$, $-\infty < t < \infty$. Тогда множество БОТ W не пусто: $W \neq \varnothing$; оптимальность траекторий инвариантна относительно действия П на W: П $(W) = W$; множество W° магистральных траекторий существует и единственно.

Доказательство. Наличие траекторий любой длительности гарантирует наличие минимизирующих последовательностей, определенных на любом интервале времени. Тогда в силу теоремы 3.1 существуют и оптимальные траектории как угодно большой длительности. Выбирая по теореме Асколи последовательность оптимальных траекторий, определенных на неограниченно расширяющейся системе интервалов и равномерно на компактах, сходящихся к некоторой кривой $x(t) \in X$, $-\infty < t < \infty$, получим по теореме 3.2, что $x(\cdot) \in W$, откуда $W \neq \varnothing$. Остальные утверждения следуют из следствия 4.2 и теоремы 5.1.

6. Цепочка аппроксимаций. Скажем, что множество оптимальных траекторий из D замкнуто в топологии равномерной сходимости на компактах из $(-\infty, \infty)$, если из того, что вектор-функция $x(t) \in D$, $-\infty < t < \infty$ на каждом сегменте $[a, b]$ является равномерным пределом некоторой зависящей от $[a, b]$ последовательности оптимальных траекторий, определенных на $[a, b]$, следует, что $x(t)$ — БОТ. Теорема 3.2 дает достаточные условия этой замкнутости.

Следствие 6.1. Пусть при $x \in X$ множество $G^*(x)$ выпукло и система (1.1) предельно управляема на любой траектории $x(t) \in D$, $-\infty < t < \infty$ из компакта D. Тогда множество оптимальных траекторий из D замкнуто в топологии равномерной сходимости на компактах из $(-\infty, \infty)$.

Обозначим $W_D(t_1, t_2)$ множество всех оптимальных траекторий $x(t) \in D$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, а через $W_D(t_1, \theta_1, \theta_2, t_2)$ — множество сужений траекторий из $W_D(t_1, t_2)$ на $[\theta_1, \theta_2] \subset [t_1, t_2]$.

Теорема 6.1. ([2], с. 61). Пусть $W_D \neq \varnothing$; множество оптимальных траекторий из D замкнуто в топологии равномерной сходимости на компактах из $(-\infty, \infty)$. Тогда для любых $\theta_1 < \theta_2$ и $\varepsilon > 0$ можно указать T_1 и T_2, такие, что при $t_1 \leqslant T_1$, $t_2 \geqslant T_2$ для любой $x^\circ(\cdot) \in W_D(t_1, \theta_1, \theta_2, t_2)$ найдется БОТ $\varphi(\cdot) \in W_D$, такая, что $\| x^\circ(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon$ при $t_1 \leqslant \theta_1 \leqslant t \leqslant \theta_2 \leqslant t_2$.

Учитывая, что из замкнутости множества оптимальных траекторий из D следует инвариантность оптимальности относительно действия П на W_D, из условия аппроксимативности в определении множества магистральных траекторий аналогично может быть получена характеристика аппроксимационных свойств магистральных траекторий.

Теорема 6.2. Пусть $W_D \neq \varnothing$ и множество оптимальных траекторий из D замкнуто в топологии равномерной сходимости на компактах из $(-\infty, \infty)$. Тогда для любых $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется $M = M(T, \varepsilon)$, удовлетворяющее следующему условию: для любой оптимальной траектории $x^\circ(t) \in D$, $0 \leqslant t \leqslant M$ найдутся магистральная траектория $\varphi(\cdot) \in W_D{}^\circ$ и t_1, такие, что $[t_1, t_1 + T] \subset [0, M]$ и $\| x^\circ(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon$ при $t \in [t_1, t_1 + T]$.

Теоремы 6.1 и 6.2 показывают, что множества W_D и $W_D{}^\circ$ образуют цепочку аппроксимаций: БОТ аппроксимируют оптимальные траектории конечной длительности, а магистральные траектории отражают асимптотические свойства БОТ.

7. Усреднение функционала вдоль оптимальной траектории. Рассмотрим теперь вопросы характеризации БОТ и магистральных траекторий с помощью задачи оптимизации с усредненным вдоль траектории функционалом. Пусть $u_0(t)$ — оптимальное управление и $x_0(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ — некоторая отвечающая ему оптимальная траектория. Тогда для нее достигается минимум $I(x_0(\cdot), u_0(\cdot), t_0, t_0+T) = \min I$ в соответствии с определением оптимальной траектории. Тогда и усредненный функционал минимален

$$\frac{1}{T} I(x_0(\cdot), u_0(\cdot), t_0, t_0+T) = \min \frac{1}{T} I$$

потому что T — заданная постоянная. Целью, однако, служит исследование не одной оптимизационной задачи при каком-либо фиксированном T, а целой совокупности таких задач, различающихся значением времени процесса T, и выяснение поведения оптимальных траекторий при $T \to \infty$. Поэтому, устремляя $T \to \infty$, получим усредненную задачу минимизации предела

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(x(t), u(t))\, dt \to \min \tag{7.1}$$

на некотором множестве допустимых управлений и траекторий на $[t_0, t_0 + T]$. Тем самым берутся $u(t)$, $x(t)$, $t_0 \leqslant t < \infty$, вычисляется предел (7.1) при $T \to \infty$, а затем ищется минимум этого предела на множестве допустимых управлений и траекторий на $[t_0, \infty)$.

Однако сказанного недостаточно, чтобы постановка задачи оптимального управления с усредненным вдоль траектории функционалом была корректной и являлась полезным инструментом исследования. Во-первых, предел (7.1) существует не для любых управлений и траекторий и поэтому вопрос его существования должен рассматриваться особо. Во-вторых, решение задачи (7.1) должно было бы вполне определенно указывать на траекторию, на которой этот минимум достигается. В то же время траекториям и управлениям на бесконечном интервале времени, различающимся только на каком-либо конечном интервале времени, отвечает одно и то же значение предела (7.1) при $T \to \infty$, если он существует. Поэтому критерий оптимальности (7.1), где минимум ищется на достаточно широком множестве траекторий и управлений Ω, определяет не одну, а целое семейство траекторий и управлений, для которого достигается минимум. Чтобы избежать подобной неоднозначности, следует сузить множество пар Ω, на котором ищется минимум (7.1). Это сужение может приводить к тому, что предел в (7.1) также будет существовать (например, если взять $\Omega = \Omega_n$, где Ω_n — множество допустимых периодических режимов). В-третьих, усредненная задача (7.1) должна иметь решение. Например, сужая Ω до периодических режимов $\Omega = \Omega_n$, получим задачу периодической оптимизации (ПО), в которой решение (оптимальный цикл), если оно существует, определено однозначно, за исключением особых случаев неединственности оптимального цикла, однако минимум в (7.1) может не достигаться. В то же время расширение режимов Ω до множества почти-периодических режимов $\Omega = \Omega_{nn}$ [4] может обеспечивать существование решения. Это говорит о целесообразности расширения множества Ω до множества почти-периодических режимов.

8. Стандартная большая вариация траектории. Скажем, что система (1.1) равномерно управляема на компакте $D \subset X$, если и только если существует компакт $K \subset X$ и число $M > 0$, такие, что для любых двух точек x_0, $x_M \in D$ найдется траектория $x(t) \in K$, $0 \leqslant t \leqslant M$, $x(0) = x_0$, $x(M) = x_M$.

Рассмотрим две траектории $x_0(t)$, $x(t) \in D$, $a \leqslant t \leqslant b$, $b - a \geqslant 2M$, из которых $x_0(\cdot)$ оптимальна. Построим траектории $x_1(t) \in K$, $a \leqslant t \leqslant a + M$, $x_1(a) = x_0(a)$, $x_1(a+M) = x(a+M)$, $x_2(t) \in K$, $b - M \leqslant t \leqslant b$, $x_2(b-M) = x(b-M)$, $x_2(b) = x_0(b)$. Определим большую вариацию $y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ траектории $x_0(\cdot)$ формулами $y(t) = x_1(t)$ при $a \leqslant t \leqslant a + M$; $y(t) = x(t)$ при $a + M \leqslant t \leqslant b - M$; $y(t) = x_2(t)$ при $b - M \leqslant t \leqslant b$. Из компактности $K \times U$ и непрерывности

$F(x, u)$ следует, что для некоторого $N = N(D)$ справедливы неравенства

$$I(x_1(\cdot), a, a+M) \leqslant N, \; I(x_2(\cdot), b-M, M) \leqslant N$$
$$|I(x(\cdot), a, a+M)| \leqslant N, \; |I(x(\cdot), b-M, M)| \leqslant N$$

В силу оптимальности $I(x_0(\cdot), a, b) \leqslant I(y(\cdot), a, b)$, откуда получим основное неравенство для стандартной большой вариации

$$I(x_0(\cdot), a, b) \leqslant 4N + I(x(\cdot), a, b) \tag{8.1}$$

Фиксируем $\omega > 0$. Пусть имеется некоторая последовательность $\tau_k \to \infty$, $\tau_k \geqslant \omega$, $k \to \infty$ и суммируемые по Лебегу функции $g_k(t)$, $t_0 < t < \tau_k$. Рассмотрим интегралы

$$\alpha_k = \frac{1}{\tau_k} \int_{t_0}^{t_0+\tau_k} g_k(t)\,dt, \quad \beta_k(\theta_k) = \frac{1}{\omega} \int_{\theta_k}^{\theta_k+\omega} g_k(t)\,dt$$

Из свойств интеграла Лебега получим следующее утверждение.

Лемма 8.1. Пусть $|g_k(t)| < M_0$ при $k \geqslant 1$, $-\infty < t < \infty$ для некоторого M_0. Тогда θ_k можно выбрать удовлетворяющими условию $\beta_k(\theta_k) - \alpha_k \to 0$, $[\theta_k, \theta_k + \omega] \subset [t_0, t_0 + \tau_k]$ при $k \to \infty$.

9. Существование единого предела усредненного вдоль оптимальных траекторий функционала. Будем для краткости писать $I(x(\cdot), a, b)$ вместо $I(x(\cdot), u(\cdot), a, b)$.

Теорема 9.1. Пусть система (1.1) равномерно управляема на компакте $D \subset X$ и при любом $T > 0$ множество $W_D(T)$ оптимальных траекторий длительности T, лежащих целиком в D, не пусто. Тогда предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} I(x_T(\cdot), 0, T) = C_0 = C_0(D) \tag{9.1}$$

существует и не зависит от выбора $x_T(\cdot) \in W_D(T)$.

Доказательство. Предполагая, что теорема не верна, найдем последовательности $x_{0k}(\cdot) \in W_D(\tau_k)$ и $x_{0m}(\cdot) \in W_D(T_m)$, удовлетворяющие неравенству

$$C' = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\tau_k} \int_0^{\tau_k} F(x_{0k}(t), u_{0k}(t))\,dt < C'' = \tag{9.2}$$
$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} F(x_{0m}(t), u_{0m}(t))\,dt$$

где $x_{0k}(\cdot)$, $x_{0m}(\cdot)$ отвечают $u_{0k}(\cdot)$, $u_{0m}(\cdot)$, а τ_k, $T_m \to \infty$ при k, $m \to \infty$. Фиксируем $m \geqslant 1$, такое, что $T_m \geqslant 2M$, и положим $\omega = T_m$. Согласно лемме 8.1, найдутся θ_k, k_m, такие, что

$$|\beta_k(\theta_k) - \alpha_k| < \frac{1}{m} \quad \text{при } k \geqslant k_m, \quad g_k(t) = F(x_{0k}(t), u_{0k}(t)) \tag{9.3}$$

За счет выбора начала отсчета на траекториях $x_{0k}(\cdot)$ добьемся, чтобы $\theta_k = 0$ (тогда сами траектории будут определены при $-\theta_k \leqslant t \leqslant \tau_k - \theta_k$, причем $\tau_k - \theta_k \geqslant T_m$). Строим стандартную большую вариацию траектории, взяв $x_{0m}(t)$ в качестве $x_0(t)$ и положив $a = 0$, $b = T_m$. Тогда в силу (8.1) получаем

$$I(x_{0m}(\cdot), 0, T_m) \leqslant 4N + I(x_{0k}(\cdot), 0, T_m)$$

Отсюда следует

$$T_m^{-1} I(x_{0m}(\cdot), 0, T_m) \leqslant T_m^{-1} I(x_{0k}(\cdot), 0, T_m) + T_m^{-1} 4N$$

а из (9.3) с учетом равенства $\theta_k = 0$ получим

$$|T_m^{-1} I(x_{0k}(\cdot), 0, T_m) - \tau_k^{-1} I(x_{0k}(\cdot), 0, \tau_k)| \leqslant m^{-1}, \quad k \geqslant k_m$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$T_m^{-1}I(x_{0m}(\cdot),\ 0,\ T_m)\leqslant \tau_k^{-1}I(x_{0k}(\cdot),\ 0,\ \tau_k)+T_m^{-1}4N+m^{-1},\quad k\geqslant k_m$$

Устремляя здесь $m\to\infty$, получим $C''\leqslant C'$, что противоречит (9.2).

Под задачей оптимального в среднем управления с усредненным вдоль траектории функционалом будем понимать задачу минимизации

$$(9.4)\qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(x(t),\ u(t))\,dt\to\min$$

на некотором множестве Ω допустимых управлений и траекторий, определенных для $-\infty<t<\infty$. То, что нижний предел интегрирования в (9.4) равен нулю, несущественно в силу теоремы 9.1. Кроме того, из теоремы 9.1 следует, что для любой БОТ, лежащей в компакте D, на котором система равномерно управляема, предел (9.4) существует и равен C_0, т. е. не зависит от выбора БОТ.

Обозначим $\Omega_n{}^D$ множество всех периодических режимов $x(t)$, $u(t)$ системы (1.1), таких, что цикл $x(\cdot)$ пересекается с множеством D. Те же приемы, что и для теоремы 9.1, позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 9.2. Пусть система (1.1) равномерно управляема на компакте $D\subset X$; $W_D(T)\neq\varnothing$ при $T>0$. Тогда величина C_0, определенная в теореме 9.1, удовлетворяет равенству

$$\inf_{x(\cdot),\ u(\cdot)\in\Omega_n{}^D}\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(x(t),\ u(t))\,dt=C_0$$

и в частности, если $D=X$, то в качестве $\Omega_n{}^D$ выступают все периодические режимы.

Это равенство обосновывает роль задачи периодической оптимизации как задачи усреднения. Оно показывает, что при помощи периодического режима можно аппроксимировать по усредненному функционалу любой оптимальный процесс бесконечной длительности $-\infty<t<\infty$ с заданной точностью. Если учесть, что задача периодической оптимизации — простейшая из задач оптимального управления с усредненным вдоль траектории функционалом, обладающая таким свойством, и что периодические режимы — одни из простейших для реализации на практике, то становится понятной их роль в магистральном асимптотическом методе [2—4, 13].

10. Задачи периодической и почти-периодической оптимизации (ПО и ППО) как частные случаи задач оптимального в среднем управления. Задача ПО может быть поставлена в трех формах. Первая форма: определить периодическую траекторию из множества БОТ W. Вторая форма: найти периодический допустимый режим, для которого достигалась бы точная нижняя грань

$$(10.1)\qquad \inf_{x(\cdot),\ u(\cdot)\in\Omega_n}\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(x(t),\ u(t))\,dt$$

Третья форма: минимизировать функционал

$$(10.2)\qquad \frac{1}{\tau}\int_0^\tau F(x(t),\ u(t))\,dt\to\min_{u(\cdot),\ x(\cdot),\ \tau}$$

при условии периодичности $x(\tau)=x(0)$, где $\tau>0$ не задано.

Теорема 10.1. Пусть X — компакт и система (1.1) равномерно управляема на X. Тогда три формы постановки задачи ПО эквивалентны.

Доказательство. Импликация $1 \to 2$. Если $x(\cdot)$ — периодическая траектория из W, то согласно теореме 9.1 на $x(\cdot)$ как и на любой БОТ достигается точная нижняя грань (10.1). Импликация $2 \to 3$. Если $x(t)$, $u(t)$, $-\infty < t < \infty$ — периодические функции и минимизируют (10.1), то согласно теореме 9.2 этот минимум равен C_0. Пусть τ — период этого процесса. Положим $T = k\tau$, откуда

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau F(x(t),\ u(t))\,dt = \frac{1}{k\tau}\int\limits_0^{k\tau} F(x(t),\ u(t))\,dt \to C_0 \text{ при } k \to \infty$$

Отсюда следует, что среднее за цикл значение функционала для $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ равно C_0, которое согласно теореме 9.2 служит точной нижней гранью (10.2). Импликация $3 \to 1$ доказана ранее ([2], с. 103).

Рассмотрим две формы постановки задачи ППО. Первая форма: определить почти-периодическую БОТ. Вторая форма: минимизировать усредненный функционал (9.4) на множестве почти-периодических траекторий, для которых предел (9.4) при $T \to \infty$ существует. Никаких дополнительных предположений относительно управлений, кроме предположенной измеримости, не делается. Если X — компакт и система равномерно управляема на X, то в силу теоремы 9.1 из того, что $x(\cdot)$ — решение задачи ППО в первой форме постановки, следует, что $x(\cdot)$ — решение задачи ППО и во второй форме.

11. Задача ППО для линейной системы с квадратичным функционалом. Полагая для характеристических корней λ_i матрицы $A \in R^{n\times n}$

$$\text{(11.1)}\qquad \operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

рассмотрим линейную систему управления

$$\text{(11.2)}\qquad \frac{dx}{dt} = Ax + Bu,\quad x \in R^n,\ u \in R^r$$

Обозначим $L_n{}^2$ множество периодических вектор-функций $u(t) \in R^r$ со всевозможными периодами, суммируемых вместе со скалярным произведением $(u(t),\ u(t))$ на любом компакте из $(-\infty,\ \infty)$. В силу (11.1) каждой функции $u(\cdot) \in L_n{}^2$ отвечает единственная периодическая траектория (11.2). Обозначим $\Omega_n{}^2$ множество полученных таким образом периодических пар $x(\cdot)$, $u(\cdot) \in L_n{}^2$, Ω_g — подмножество $\Omega_n{}^2$, состоящее из синусоидальных или постоянных функций, т. е. если $x(\cdot)$, $u(\cdot) \in \Omega_g$, то все компоненты $x(t)$, $u(t)$ синусоидальны одинаковой частоты или постоянны.

Рассмотрим синусоидальное управление $u_\omega(t) = [u_1 \sin(\omega t + \psi_1), \ldots, u_r \sin(\omega t + \psi_r)]^*$ при $\omega \to \infty$. Тогда отвечающая ему синусоидальная траектория сходится $x_\omega(t) \to 0$ равномерно по t в силу (11.1). Поэтому можно придать смысл рассмотрению пар $x_\infty(\cdot)$, $u_\infty(\cdot)$ синусоидальных траекторий и управлений бесконечной частоты, полагая $x_\infty(t) \equiv 0$, а в качестве $u_\infty(\cdot)$ рассматривая $u_\omega(t)$ при $\omega \to \infty$. Множество этих пар бесконечной частоты обозначим $\Omega_{\omega=\infty}$.

Ставится задача максимизации усредненного функционала

$$\text{(11.3)}\qquad P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T [(x,\ Dx) + (u,\ Gu)]\,dt \to \max$$

без каких-либо предположений относительно матриц D, G. Поэтому максимизация может быть заменена на минимизацию. Скобки $(\cdot,\ \cdot)$ означают здесь скалярное произведение. В качестве множества пар Ω, на котором ищется (11.3), берется подмножество всех пар, составленных из сумм

$$(11.4)\qquad u(t)=\sum_{i=0}^{\infty}u^i(t);\quad x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}x^i(t);\quad u^i(\cdot),\ x^i(\cdot)\in\Omega_n^2\cup\Omega_{\omega=\infty}$$

удовлетворяющих для заданных α_k усредненному ограничению на управление по каждому входу

$$(11.5)\qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u_k^2(t)\,dt\leqslant\frac{\alpha_k^2}{2},\quad 1\leqslant k\leqslant r$$

12. Сужение множества допустимых пар. Сузим (11.4) до

$$(12.1)\qquad u(t)=\sum_{i=0}^{r-1}u^i(t),\quad x(t)=\sum_{i=0}^{r-1}x^i(t);\ u^i(\cdot),\ x^i(\cdot)\in\Omega_g\cup\Omega_{\omega=\infty}.$$

Теорема 12.1. Точные верхние грани (11.3) в задачах (11.1)—(11.5) и (11.1), (11.2), (11.5), (12.1) совпадают.

Доказательство. Рассмотрим управление

$$(12.2)\qquad u_k(t,N)=\frac{U_k^{\circ}}{\sqrt{2}}+\sum_{i=1}^{N-1}U_k^i\sin(\omega_i t+\psi_{ik});\quad 1\leqslant k\leqslant r;\quad \omega_j\neq\omega_i \text{ при } j\neq i$$

Ему отвечает установившееся решение (11.2) вида

$$(12.3)\qquad x_p(t,N)=\sum_{i=0}^{N-1}x_p^i;\quad x_p^{\circ}=\frac{X_p^{\circ}}{\sqrt{2}};\quad x_p^i=X_p^i\sin(\omega_i t+\varphi_{ip});\quad 1\leqslant p\leqslant n$$

Допускается, что $\omega_{N-1}=\infty$. Тогда $X_p^{N-1}=0$ при $1\leqslant p\leqslant n$.
Подстановка (12.2) в (11.5) дает

$$(12.4)\qquad \sum_{i=0}^{N-1}(U_k^i)^2\leqslant\alpha_k^2,\quad 1\leqslant k\leqslant r$$

Обозначим

$$(12.5)\qquad [U^i]^2=\operatorname{col}[(U_1^i)^2,\ \ldots,\ (U_r^i)^2],\quad P_u^i=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}(U_k^i)^2$$

$$P_x^i=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[(x^i(t),\ Dx^i(t))+(u^i(t),\ Gu^i(t))]\,dt$$

Тогда для (12.2), (12.3) в силу $\omega_i\neq\omega_j$ при $i\neq j$ получим представление критерия оптимальности (11.3) в виде

$$(12.6)\qquad P(x(\cdot,N),\ u(\cdot,N))=\sum_{i=0}^{N-1}P_x^i$$

С учетом соотношений (12.4) и (12.5) для доказательства теоремы достаточно показать, что вместо (12.2) можно выбрать управление вида

$$(12.7)\qquad u_k(t,r)=\frac{\bar U_k^{\circ}}{\sqrt{2}}+\sum_{i=1}^{r}\bar U_k^i\sin(\omega_i t+\psi_{ik}),\quad 1\leqslant k\leqslant r$$

$$\omega_i\neq\omega_j \text{ при } i\neq j,\ P_u^{\circ}P_u^{r}=0$$

(т. е. где $[U^{\circ}]^2=0$, либо $[U^r]^2=0$), такое, чтобы для $x(t,r)$, отвечающего (12.7) было справедливо неравенство

$$(12.8)\qquad P(x(\cdot,N),\ u(\cdot,N))\leqslant P(x(\cdot,r),\ u(\cdot,r)),\quad \sum_{i=0}^{N-1}[U^i]^2=\sum_{i=0}^{r}[\bar U^i]^2$$

поскольку функция $u(\cdot) \in L_n^2$ может быть разложена в ряд Фурье, а условие (12.8) говорит о возможности уменьшения числа гармоник, включая постоянную, до числа r входов системы (11.2), без нарушения ограничений и без уменьшения критерия (11.3).

Для $N > r$ векторы $[U^i]^2$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$ линейно зависимы. Поэтому найдутся не равные нулю одновременно $\beta_0, \ldots, \beta_{N-1}$, такие, что

(12.9) $$\beta_0 [U^i]^2 + \ldots + \beta_{N-1} [U^i]^2 = 0$$

Достаточно доказать, что при $N > r$ от N гармоник можно перейти к $N-1$ гармонике так, чтобы

(12.10) $$P(x(\cdot, N), u(\cdot, N)) \leqslant P(x(\cdot, N-1), u(\cdot, N-1))$$
$$\sum_{i=0}^{N-1} [U^i]^2 = \sum_{i=0}^{N-2} [U^i]^2$$

Тогда неравенство (12.8) можно получить из (12.10) индукцией.

Если $[U^i]^2 = 0$, то неравенство (12.10) доказано. Полагаем, что $[U^i]^2 \neq 0$ при $0 \leqslant i \leqslant N-1$. Тогда в силу (12.9) среди β_i есть положительные и отрицательные. Положим для определенности $\beta_0, \ldots, \beta_\nu \geqslant 0$, $\beta_{\nu+1}, \ldots, \beta_{N-1} < 0$. Складывая r скалярных равенств в (12.9), получим $\beta_0 P_u{}^\circ + \ldots + \beta_{N-1} P_u^{N-1} = 0$. Вычислим два коэффициента

$$k_l = \frac{\beta_0 P_x{}^\circ + \ldots + \beta_\nu P_x{}^\nu}{\beta_0 P_u{}^\circ + \ldots + \beta_\nu P_u{}^\nu}$$
$$k_s = \frac{(-\beta_{\nu+1}) P_x^{\nu+1} + \ldots + (-\beta_{N-1}) P_x^{N-1}}{(-\beta_{\nu+1}) P_u^{\nu+1} + \ldots + (-\beta_{N-1}) P_u^{N-1}}$$

и пусть для определенности $k_l \leqslant k_s$. Выберем $\beta = \max \beta_j$ по $0 \leqslant j \leqslant \nu$. Для определенности полагаем $\beta = \beta_1$. Тогда

$$\frac{\beta_0}{\beta_1} P_u{}^\circ + P_u{}^1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} P_u{}^2 + \ldots + \frac{\beta_\nu}{\beta_1} P_u{}^\nu =$$
$$= \left(-\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_1}\right) P_u^{\nu+1} + \ldots + \left(-\frac{\beta_N}{\beta_{N-1}}\right) P_u{}^{N-1}$$

Изменяем амплитуды гармоник u согласно формулам

$$\bar{U}_k{}^i = \sqrt{1 - \frac{\beta_i}{\beta_1}}\, U_k{}^i, \quad 0 \leqslant i \leqslant N-1, \quad 1 \leqslant k \leqslant r$$

Тогда

$$\bar{P}_u{}^i = \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_1}\right) P_u{}^i, \quad \bar{P}_x{}^i = \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_1}\right) P_x{}^i, \quad [\bar{U}^1] = 0$$

т. е. число гармоник сократилось на одну и при этом

$$\sum_{i=0}^{N-1} [\bar{U}^i]^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_1}\right) [U_k{}^i]^2 = \sum_{i=0}^{N-1} [U_k{}^i]^2 -$$
$$- \frac{1}{\beta_1} \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i [U_k{}^i]^2 = \sum_{i=0}^{N-1} [U_k{}^i]^2$$

Из неравенства $k_l \leqslant k_s$ получим с учетом равенства знаменателей в k_l, k_s, что
$$\beta_0 P_x{}^\circ + \ldots + \beta_\nu P_x{}^\nu \leqslant -\beta_{\nu+1} P_x^{\nu+1} - \ldots - \beta_{N-1} P_x^{N-1}$$

Тогда новым амплитудам управлений отвечает значение усредненного критерия

$$P(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) = \sum_{i=0}^{N-1} \bar{P}_x{}^i = \sum_{i=0}^{N-1} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_1}\right) P_x{}^i = P(x(\cdot, N), u(\cdot, N)) -$$
$$- \frac{1}{\beta_1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \beta_i P_x{}^i\right] \geqslant P(x(\cdot, N), u(\cdot, N))$$

что совпадает с (12.10) с точностью до нумерации гармоник.

Управлению в виде суммы гармоник (12.7) отвечает значение усредненного функционала (11.3) вида

$$(12.11)\qquad \begin{aligned} &I=I(U^\circ,\ldots,U^r,\ \omega_1,\ldots,\omega_r,\ \psi_1,\ldots,\psi_r)\to\min\\ &U^i=\operatorname{col}[U_1{}^i,\ldots,U_r{}^i],\quad \psi_i=\operatorname{col}[\psi_{i1},\ldots,\psi_{ir}]\end{aligned}$$

где $U^\circ = 0$, либо $U^r = 0$, т. е. общее число гармоник, включая постоянную составляющую, не превышает r, а ограничения (11.5) запишутся в виде

$$(12.12)\qquad \sum_{i=0}^{r}(U_k{}^i)^2\leqslant\alpha_k{}^2,\quad 1\leqslant k\leqslant r$$

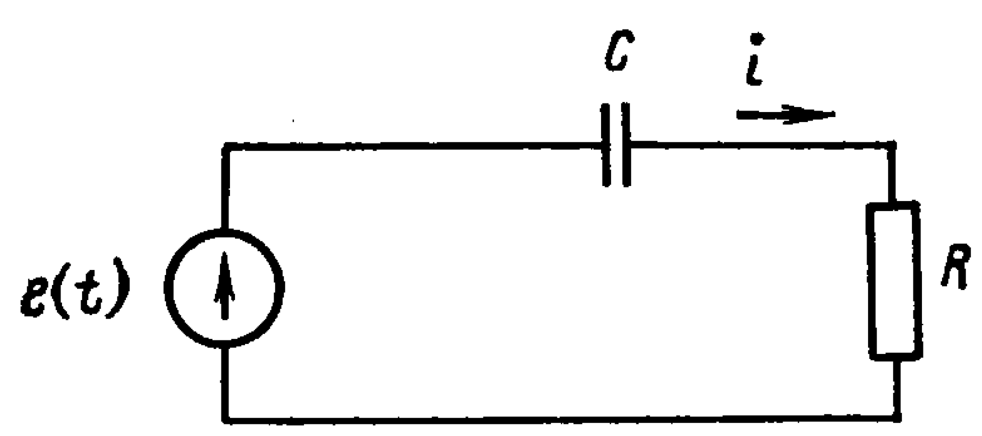
В силу (12.12) и (12.7) области изменения U^i, ψ_i компактны. Для ω_i допускаются все значения от 0 до ∞. Тогда условие (11.1) позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 12.2. Задача нелинейного программирования (12.11), (12.12) имеет решение, которое определяет решение задачи (11.2), (11.3), (11.5), (12.1) в виде (12.7), (12.1).

Следствие 12.1. Задача (11.1)—(11.5) имеет решение, которое дается решением задачи (12.11), (12.12) в виде (12.7), (12.1).

Тем самым, если число входов $r\geqslant 2$ и частоты $\omega_1,\ldots,\omega_{r-1}$, полученные решением задачи (12.11), (12.12), несоизмеримы, то решение получается в классе почти-периодических функций.

Замечание. Задача (11.1) — (11.5) может трактоваться как задача о передаче максимума мощности в нагрузку при ограничении мощности по каждому из входов. Кроме того, видно, что теоремы 12.1, 12.2 и следствие 12.1 сохраняют силу и при замене функционала (11.3) функционалом



Фиг. 1

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[(x,Dx)+(x,Lu)+ +(u,Gu)]\,dt\to\max$$

где L — матрица $n\times r$.

Пример. Рассмотрим задачу передачи максимума мощности в сопротивление нагрузки R в электрической цепи, показанной на фигуре, причем

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T i^2R\,dt\to\max$$

при ограничении на управление, которым служит электродвижущая сила $e(t)$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,dt\leqslant\frac{\alpha^2}{2},\quad \alpha>0$$

Обозначив x — напряжение на емкости, i — ток, C — емкость, получим согласно второму закону Кирхгофа $x+iR=e$. Для емкости

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{C}i$$

откуда следует дифференциальное уравнение цепи

$$\frac{dx}{dt}=(e-x)(RC)^{-1}$$

Согласно следствию 12.1, решение доставляется одной гармоникой $e=\alpha\sin\omega t$. Отсюда $i=\alpha(R^2+1/(\omega C)^2)^{-1/2}\sin(\omega t+\varphi)$. Видим, что максимум $P=\alpha^2/(2R)$ достигается при $\omega=\infty$. Фактически это соответствует тому, что передача максимума мощности в нагрузку для рассматриваемой цепи отвечает как угодно большим частотам. Математически же это означает, что в качестве решения рассматривается $e(t) = \alpha \sin \omega t$ при $\omega \to \infty$. Та же задача для цепи, отличающейся от приведенной на фигуре наличием последовательно включенной индуктивности L, имеет решением $e(t) = \alpha \sin \omega t$, $\omega = (LC)^{-1/2}$ с тем же значением максимальной мощности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Об асимптотике траекторий одного класса задач оптимизации.— Автоматика и телемеханика, 1975, № 8, с. 5—13.
2. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977. 204 с.
3. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* О поведении бесконечных оптимальных траекторий одного класса непрерывных динамических систем.— Дифференц. уравнения, 1982, № 6, с. 1087—1089.
4. *Panasjuk A., Panasjuk V.* Die wichtigsten Leitsätze der magistralen asymptotischen Theorie der optimalen Steuerung.— In: 27 Intern. Wiss. Kolloq., Ilmenau, 1982. H. 5. Vortragsz. B1, B2. Ilmenau, s. a., p. 99—104.
5. *Романовский И. В.* Алгоритмы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1977. 352 с.
6. *Гусев Д. Е., Якубович В. А.* Теорема о магистрали в задаче непрерывной оптимизации.— Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон., 1983, № 1, вып. 1, с. 21—27.
7. *Дукельский М. С., Цирлин А. М.* Условия нестационарности оптимального установившегося режима управляемого объекта.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 9, с. 5—12.
8. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
9. *Анисович В. В., Крюков Б. И.* Об оптимизации почти-периодических колебаний.— Автоматика и телемеханика, 1981, № 12, с. 168—170.
10. *Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления.— В кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 20. М.: ВИНИТИ, 1982, с. 3—77.
11. *Плотников В. А.* Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1984, № 4, с. 30—37.
12. *Панасюк В. И.* Магистральные свойства траекторий в дискретных задачах оптимального управления.— Автоматика и телемеханика, 1981, № 8, с. 119—130.
13. *Панасюк В. И.* Магистральные периодические траектории в дискретных задачах оптимального управления.— Автоматика и телемеханика, 1983, № 9, с. 58—66.
14. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 316 с.
15. *Келли Дж. Л.* Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.

Минск

Поступила в редакцию
17.VII.1984