Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 4, 1985

УДК 62—50

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ ВРЕМЕНИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Пшеничный Б. Н., Шишкина Н. Б.

Предлагается новый эффективный способ решения задачи преследования, охватывающий случай нелинейных дифференциальных уравнений. Управляющее воздействие догоняющего строится по позиции игры. Развиваются идеи, ранее опубликованные в [1—6].

1. В эвклидовом пространстве R^n задана дифференциальная игра

$$z^{\cdot} = f(t, z, u, v),\ z \in R^n,\ u \in U,\ v \in V \tag{1.1}$$

где $U \subset R^n$ и $V \subset R^n$ — непустые компакты; точка означает дифференцирование по времени t. Вектор-функция f непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет условию Липшица по z и представима в виде суммы $f(t, z, u, v) = f_1(t, z, u) + f_2(t, z, v)$. При этом множество $f_1(t, z, U)$ выпукло для любых значений переменных t и z. Терминальное множество имеет вид $M = M_0 + K$, где M_0 — выпуклый компакт в R^n, а K — замкнутый выпуклый конус в R^n. Игра (1.1) считается законченной из начальной позиции t°, z°, если в некоторый момент времени $t > t^\circ$, $z(t) \in M$.

Определение 1. Стратегией убегающего в игре (1.1) называется любая измеримая функция $v(t)$, $t \geqslant t^\circ$ со значениями в V.

Определение 2. Стратегией преследователя в игре (1.1) называется любое полунепрерывное сверху многозначное отображение $U(z)$ из R^n в 2^U, где 2^U — множество всех подмножеств компакта U.

Будем говорить, что дифференциальная игра (1.1) может быть закончена из заданного начального положения t°, z°, если существует стратегия преследователя $U(z)$, такая, что для любой стратегии убегающего $v(t)$ решение дифференциального включения

$$z^{\cdot} \in f(t,\ z,\ U(z),\ v(t))$$

попадает на множество M за конечное время.

2. Введем некоторые обозначения и докажем ряд вспомогательных фактов из теории выпуклого анализа.

Положим для $x \overline{\in} M$.

$$D_x = \{z\colon\ z = x + \gamma(m - x),\ \gamma > 0,\ m \in M\}$$

Для $z \in D_x$ определена функция

$$\lambda(z) = \max\{\lambda > 0\colon x + \lambda^{-1}(z - x) \in M\} \tag{2.1}$$

В силу замкнутости M

$$m(z) = x + \lambda^{-1}(z)\ (z - x) \in M\} \tag{2.2}$$

Лемма 1. Функции $\lambda(z)$ и $m(z)$ дифференцируемы по направлению и удовлетворяют условию Липшица внутри области определения.

Доказательство. Из определения функции $\lambda(z)$ имеем

$$z = x + \lambda(z)\ (m(z) - x) \tag{2.3}$$

Для любых $\gamma_1 \geqslant 0$, $\gamma_2 \geqslant 0$, таких, что $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ и $z_1, z_2 \in D_x$, справедливо равенство

$$(2.4)\qquad \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 = x + \Lambda\left(\frac{\gamma_1\lambda(z_1)}{\Lambda} m(z_1) + \frac{\gamma_2\lambda(z_2)}{\Lambda} m(z_2) - x\right)$$
$$\Lambda = \gamma_1\lambda(z_1) + \gamma_2\lambda(z_2)$$

Вследствие определения функции $\lambda(z)$, выпуклости множества M и равенства (2.4) имеем $\lambda(\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2) \geqslant \Lambda$, т. е. функция $\lambda(z)$ вогнута на D_x. Из вогнутости $\lambda(z)$ вытекает [7], что для нее справедливы свойства, сформулированные в лемме. Это влечет выполнение аналогичных свойств для $m(z)$.

Рассмотрим множество

$$N = \{\psi:\ \|\psi\| = 1,\ W_M(\psi) < +\infty\}$$

где $W_M(\psi)$ — опорная функция множества M. При предположениях, сделанных относительно множества M, множество N замкнуто и функция $W_M(\psi)$ непрерывна на нем. Это позволяет определить функцию

$$F(z, \lambda) = \max_{\psi\in N} \{(\psi, z - x) + \lambda[(\psi, x) - W_M(\psi)]\} =$$
$$= \max_{\psi\in N} \lambda\{(\psi, x + \lambda^{-1}(z - x)) - W_M(\psi)\}$$

Обозначим

$$K_x = \operatorname{con}\{M - x\} = \{z:\ z = \gamma(m - x),\ \gamma > 0,\ m \in M\}$$

Конус, сопряженный к конусу K_x, обозначим K_x^*.

Лемма 2. Функция $F(z, \lambda)$ дифференцируема по направлению z^*, λ^*, причем

$$(2.5)\qquad F'(z, \lambda(z), z^*, \lambda^*) = \max_{\psi\in K^*_{m(z)}} \{-(\psi, z^*) + \lambda^*(\psi, m(z) - x)\}$$
$$F'(z, \lambda(z), 0, 1) \geqslant 0$$

Доказательство. Известно [8], что функция $F(z, \lambda)$ выпукла по z и λ. Следовательно, она дифференцируема, а ее производная по направлению z^*, λ^* вычисляется по формуле

$$F'(z, \lambda, z^*, \lambda^*) = \max_{\psi\in N(z,\lambda)} \{(\psi, z^*) + \lambda^*((\psi, x) - W_M(\psi))\}$$
$$N(z, \lambda) = \{\psi:\ \psi \in N,\ (\psi, z - x) + \lambda[(\psi, x) - W_M(\psi)] = F(z, \lambda)\}$$

Известно, что $m \in M$ тогда и только тогда, когда $(\psi, m) \leqslant W_M(\psi)$ для всех ψ, $\|\psi\| = 1$. Следовательно, учитывая определения функций $F(z, \lambda)$ и $\lambda(z)$, получим $F(z, \lambda(z)) = 0$, т. е. $\psi \in N(z, \lambda(z))$ означает, что $\lambda(z)((\psi, m(z)) - W_M(\psi)) = 0$, или $(\psi, m - m(z)) \leqslant 0$ для всех $m \in M$. Таким образом, учитывая определение сопряженного конуса, получим $-\psi \in K^*_{m(z)}$. Так как, кроме того, $\psi \in N$, то $N(z, \lambda(z)) = (-K^*_{m(z)}) \cap N$. Первая часть утверждения леммы доказана.

Используя определение производной по направлению, получим

$$F'(z, \lambda(z), 0, 1) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{F(z, \lambda + t) - F(z, \lambda(z))}{t} \geqslant 0$$

так как $F(z, \lambda(z)) = 0$, а $F(z, \lambda(z) + t) > 0$, $t > 0$.

Отметим, что если множество M имеет гладкую границу, то, по определению, множество $K^*_{m(z)} \cap B$, где B — единичная сфера в R^n, состоит из единственной точки $T(m(z))$ — внутренней единичной нормали к поверхности, непрерывно зависящей от точки.

Лемма 3. Пусть множество M имеет гладкую границу. Тогда в области выполнения неравенства

$$(2.6)\qquad S(z) > 0,\quad S(z) = (T(m(z)),\ m(z) - x)$$

функция $\lambda(z)$ дифференцируема и ее производная по направлению z^* вычисляется по формуле

$$\lambda'(z, z^*) = (T(m(z)), z^*)/S(z) \tag{2.7}$$

Доказательство. В данном случае формула (2.5) примет вид

$$F'(z, \lambda(z), z^*, \lambda^*) = -(T(m(z)), z^*) + \lambda^* S(z) \tag{2.8}$$

Так как $\lambda(z)$ дифференцируема по направлению, то

$$\lambda(z + tz^*) = \lambda(z) + t\lambda'(z, z^*) + o(t)$$

Дифференцируя теперь соотношение $F(z + tz^*, \lambda + t\lambda^*) = 0$, получаем в силу (2.8) утверждение леммы (2.7).

Лемма 4. Для любой точки $z \neq x$, $z = x + \lambda(m_0 - x)$, где $m_0 \in \operatorname{int} M$ ($\operatorname{int} M$ — внутренность множества M), выполняется неравенство $(\psi, m(z) - x) > 0$, $\forall \psi \in K^*_{m(z)} \cap B$.

Доказательство. Так как $m_0 \in \operatorname{int} M$, то $m_0 - \varepsilon y \in M$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого y, $\| y \| \leqslant 1$. Далее, для $\psi \in K^*_{m(z)}$ справедливо неравенство $(\psi, m) \geqslant (\psi, m(z))$, $\forall m \in M$. Следовательно, $(\psi, m) - \varepsilon(\psi, y) \geqslant (\psi, m(z))$. Подставляя сюда $m_0 = x + \lambda^{-1}(z - x)$, $m(z) = x + \lambda^{-1}(z)(z - x)$, получаем

$$(\lambda^{-1} - \lambda^{-1}(z))\,(\psi, z - x) \geqslant \varepsilon(\psi, y) \tag{2.9}$$

Можно показать, что $\lambda < \lambda(z)$. Взяв максимум правой части (2.9) по y, получим, что левая часть будет не меньше, чем $\varepsilon\|\psi\| > 0$. Поэтому $(\psi, m(z) - x) = \lambda(z) \times (\psi, z - x) > 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 5. Для любого $\varepsilon > 0$ ε-окрестность выпуклого множества M имеет гладкую границу.

Доказательство. Пусть x — граничная точка множества M_ε. Тогда существует такой вектор ψ, $\| \psi \| \neq 0$, что $(\psi, m - x) \geqslant 0$ для любого $m \in M$. Требуется доказать, что нормаль в этой точке единственна и непрерывно зависит от точки x.

Пусть теперь $M_\varepsilon = M + \varepsilon S_1$, где S_1 — единичный шар в R^n. Можно показать что $W_{M_\varepsilon}(\psi) = W_M(\psi) + \varepsilon \| \psi \|$. Положим

$$F_\varepsilon(m) = \max_{\|\psi\|=1} \{(\psi, m) - W_M(\psi) - \varepsilon\|\psi\|\} \tag{2.10}$$

Теперь $m \in M_\varepsilon$ тогда и только тогда, когда $F_\varepsilon(m) \leqslant 0$, а граница множества M_ε характеризуется равенством $F_\varepsilon(x) = 0$, т. е. $F_\varepsilon(m) \leqslant F_\varepsilon(x)$, $m \in M_\varepsilon$, или $(-\psi, m - x) \geqslant 0$. Таким образом, $-\psi \in K_x^*$ и $\| \psi \| = 1$. Следовательно, $-\psi$ — нормаль к M_ε в точке x.

Проведя выкладки в обратном порядке, убеждаемся, что если $-\psi$ — единичная нормаль в x, то $F_\varepsilon(x) = 0$.

Итак, множество нормалей в x к M_ε совпадает с взятым со знаком минус множеством тех ψ, на которых у (2.10) достигается максимум. Но в силу строгой вогнутости функции $(\psi, x) - W_M(\psi) - \varepsilon\|\psi\|$ максимум в (2.10) достигается в единственной точке. Тем самым доказано, что M_ε имеет в каждой граничной точке единственную нормаль $T_\varepsilon(x)$. Известно [8], что если в (2.10) максимум достигается в единственной точке $\psi(x)$, то $\psi(x)$ непрерывно зависит от x. Поэтому $T_\varepsilon(x) = -\psi(x)$ также непрерывно зависит от x, что и требовалось доказать.

Лемма 6. Если множество M имеет гладкую границу, $x \in M$ и точка $m_0 \in M$, такова, что $\lambda(m_0) = 1$, то $T(m_0) \in K_x^* \cap B$.

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Тогда $x + \lambda^{-1}(m_0 - x) \overline{\in} M$ при $\lambda > 1$ в силу того, что $\lambda(m_0) = 1$, и определения функции $\lambda(z)$. Поэтому M и множество $\{x + \gamma(m_0 - x) : 0 \leqslant \gamma \leqslant 1\}$ не пересекаются. Значит, существует вектор ψ, $\| \psi \| = 1$, такой что

$$(\psi, m) \geqslant (\psi, x + \gamma(m_0 - x)), \quad x \in M, \; 0 \leqslant \gamma \leqslant 1$$

Отсюда при $\gamma = 0$ получим $(\psi, m) \geqslant (\psi, x)$, т. е. $\psi \in K_x^*$. С другой стороны, при $\gamma \to 1$ получаем $(\psi, m) \geqslant (\psi, m_0)$, т. е. $\psi \in K^*_{m_0}$. Так как M имеет гладкую границу и $\| \psi \| = 1$, то $\psi = T(m_0)$.

3. Ответ на вопрос о возможности окончания преследования за конечное время дает следующая

Теорема 1. Пусть терминальное множество M имеет непустую внутренность и гладкую границу, существует такая точка $m_0 \in \operatorname{int} M$ и число $\rho > 0$, что для точки $x = z^\circ + \rho (z^\circ - m_0)$ и соответствующей ей функции $\lambda (z)$ (2.1) при любых z, удовлетворяющих условию $1 > \lambda (z) \geqslant \lambda (z^\circ)$ и $t \geqslant t^\circ$

$$\min_{v \in V} \max_{u \in U} (T (m (z)), f (t, z, u, v)) \geqslant \delta \geqslant 0 \tag{3.1}$$

(функция $m (z)$ определена в (2.2)).

Тогда дифференциальная игра (1.1), начинающаяся в момент t° из точки z°, может быть завершена.

Доказательство. Можно видеть, что $\lambda (m (z)) = 1$. Действительно, по определению $\lambda (z)$, имеем $m (z) \in M$, и поэтому

$$x + \frac{1}{1} (m (z) - x) = m (z) \in M$$

т. е. $\lambda (m (z)) \geqslant 1$. Но если $\lambda (m (z)) > 1$, т. е.

$$x + \frac{1}{\gamma} (m (z) - x) = m \in M, \quad \gamma > 1$$

то $m (z) = x + \gamma (m - x)$, и, подставляя это выражение в (2.2), получаем

$$m = x + \frac{1}{\gamma \lambda (z)} (z - x)$$

Последнее означает, что $1 \geqslant \gamma$ в противоречии с предположением.

Далее, так как $m_0 = x + \frac{1 + \rho}{\rho} (z^\circ - x)$, то $\lambda (z^\circ) \geqslant \frac{\rho}{1 + \rho} > 0$. Кроме того, так как $m_0 \in \operatorname{int} M$, то согласно лемме 4 $S (z) > 0$ (величина $S (z)$ определена в (2.6)).

Построим теперь стратегию догоняющего. Положим для всех z, таких, что $\lambda (z^\circ) \leqslant \lambda (z) < 1$

$$U (z) = \{u \in U : (T (m (z)), f_1 (t, z, U))\} = \max_{u \in U} (T (m (z)), f_1 (t, z, u))$$

Так как $m (z)$ непрерывно зависит от z, а $T (m)$ — также непрерывная функция, то [8] множество $U (z)$ полунепрерывно сверху зависит от z в области, где выполнено условие (2.6). Последнее условие необходимо, так как согласно лемме 3 только в этой области функция $\lambda (z)$ непрерывно дифференцируема, а обращение левой части (2.6) в нуль означает выход на границу области определения функции $\lambda (z)$.

Итак, в области, где выполняется условие (2.6), определено дифференциальное включение

$$z^{\boldsymbol{\cdot}} \in f (t, z, U (z), v (t)), \quad t \geqslant t^\circ, \quad z (t^\circ) = z^\circ \tag{3.2}$$

и оно имеет продолжимые достаточно далеко решения.

Рассмотрим какое-либо из них, например $z (t)$. Согласно [9], ему соответствует управление $u (t)$ — измеримая функция со значениями в $U (z (t)) \in U$, такая, что

$$z^{\boldsymbol{\cdot}} = f (t, z, u (t), v (t)) \tag{3.3}$$

При этом, так как функция $\lambda (z)$ внутри области, определяемой соотношением (2.6), непрерывно дифференцируема, то по лемме 3

$$d\lambda (z (t))/dt = \lambda' (z, z^{\boldsymbol{\cdot}} (t)) = (T (m (z)), f (t, z, u (t), v (t)))/S (z)$$

Учитывая условия теоремы и то, что $u(t) \in U(z(t))$, получаем неравенство

$$d\lambda(z(t))/dt \geqslant \delta / S(z) \tag{3.4}$$

из которого вытекает, что функция $\lambda(z)$ монотонно возрастает вдоль траектории $z(t)$.

Рассмотрим величину $S(z)$. По определению, $T(m(z))$ для любой точки $m \in M$

$$(T(m(z)), m) \geqslant (T(m(z)), m(z)) = (T(m(z)), x) + S(z)$$

Так как $T(m(z))$ — вектор единичной длины, точки m и x фиксированы, то величина $S(z)$ ограничена сверху. Поэтому $\lambda(z(t))$ растет с отличной от нуля скоростью и достигает значения единицы, если только в какой-то момент $S(z)$ в (3.4) не обратится в нуль и нельзя будет продолжить траекторию.

Можно показать, что этого не случится.

Допустим противное, т. е. при $t \uparrow t_*$, $z(t) \to z_*$

$$S(z_*) = 0 \tag{3.5}$$

Функция $F(z, \lambda)$ выпукла, и в точке z_*, $\lambda(z_*)$, согласно (2.8), ее производные по z и λ равны — $(T(m(z_*)), z_*)$ и $S(z)$ соответственно. В силу выпуклости

$$F(z(t), \lambda(z(t)) \geqslant F(z_*, \lambda(z_*)) - (T(m(z_*)), \quad z(t) - z_*) + (\lambda(z(t)) - \lambda(z_*))\, S(z_*)$$

Учитывая равенство (3.5) и то, что $F(z_*, \lambda(z_*)) = 0$, получаем

$$(T(m(z_*)), \; z_* - z(t)) \leqslant 0$$

Из (3.3) следует, что

$$z_* - z(t) = \int_t^{t_*} f\,d\tau, \quad f = f(\tau, z(\tau), u(\tau), v(\tau))$$

Поэтому

$$0 \geqslant \int_0^{t_*} (T(m(z_*)), f)\,d\tau = \int_t^{t_*} (T(m(z(\tau)), f)\,d\tau +$$
$$+ \int_t^{t_*} (T(m(z_*)) - T(m(z(\tau)), f))\,d\tau$$

В силу непрерывной зависимости $T(m)$ от m последний член в полученной формуле будет $o(t_* - t)$. С другой стороны, в силу того, что $u(\tau) \in U(z(\tau))$, выбора $U(z)$ и предположений теоремы, подынтегральная величина в предпоследнем члене больше δ. Итак, $\delta(t_* - t) + o(t_* - t) \leqslant 0$, $t \uparrow t_*$, что невозможно при достаточной близости t к t_*.

Таким образом, в формуле (3.4) величина $S(z)$ ограничена сверху и всегда отлична от нуля. Поэтому величина $\lambda(z(t))$ с течением времени растет и в некоторый конечный момент времени обратится в единицу. Но условие $\lambda(z(t)) = 1$ эквивалентно тому, что $z(t) = m(z(t)) \in M$.

Игра завершена и завершено доказательство теоремы.

Следствием доказанной теоремы является теорема 2, обобщающая результаты, полученные в [1—3].

Теорема 2. Пусть M — выпуклое множество, $f(t, z, u, v) = f(t, u, v)$. Если уравнение

$$\rho(m - z^\circ) = f(t, u, v), \; \forall v \in V, \; \forall t \geqslant t^\circ \tag{3.6}$$

имеет решение $m \in M$, $u \in U$ и $\rho \geqslant \rho_* > 0$, то игра (1.1), начинающаяся в момент t° из точки z°, может быть закончена на терминальном множестве M_ε (M_ε — ε-окрестность множества M, а ε — произвольно малое положительное число).

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и при данных $t \geqslant t^\circ$ и $v \in V$ величины $m_* \in M$, $u_* \in U$ и $\rho^* > \rho_*$ выбраны согласно уравнению (3.6). Положим $x = z^\circ + \varphi(z^\circ - m_0)$, где m_0 — произвольная точка M.

Можно доказать, что при достаточно малых $\varphi > 0$ и $\delta > 0$ точка $f(t, u_*, v)$ вместе с δ-окрестностью принадлежит конусу

$$K_{x,\varepsilon} = \{\gamma(m + \varepsilon y - x) \colon \gamma > 0,\ m \in M,\ \|y\| \leqslant 1\} = \operatorname{con}\{M_\varepsilon - x\}$$

Для этого достаточно показать, что уравнение

$$\gamma(m + \varepsilon y - z^\circ - \varphi(z^\circ - m_0)) = f(t, u_*, v) + \delta y_1$$

разрешимо. Положим $\gamma = \rho^*$, $m = m_*$. Тогда, учитывая (3.6), получаем $\rho^* \varepsilon y_1 = \delta y_1 + \rho^* \varphi(z^\circ - m_0)$, или

$$y = \frac{\delta}{\rho^*\varepsilon} y_1 + \frac{\varphi}{\varepsilon}(z^\circ - m_0)$$

Если выбрать

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{2\|z^\circ - m_0\|}, \quad \delta = \frac{1}{2}\rho_*\varepsilon$$

то

$$\|y\| \leqslant \frac{\delta}{\rho^*\varepsilon}\|y_1\| + \frac{\varphi}{\varepsilon}\|z^\circ - m_0\| \leqslant \frac{1}{2}\frac{\rho_*}{\rho} + \frac{1}{2} \leqslant 1$$

Итак, указанное уравнение действительно разрешимо и $f(t, u_*, v) + \delta y_1 \in K_{x,\varepsilon}$ для любого $y_1 \in S$.

Тогда для $\psi \in K^*_{x,\varepsilon}$, $\|\psi\| = 1$ будем иметь

$$(\psi, f(t, u_*, v)) \geqslant -\delta(\psi, y_1), \|y_1\| \leqslant 1$$

Беря максимум по $u \in U$ левой части и по $y_1 \in S_1$ правой, получаем

$$\max_{u \in U}(\psi, f(t, u, v)) \geqslant \delta, \ \psi \in K_{x,\varepsilon}, \ v \in V \tag{3.7}$$

Применим теперь теорему 1, взяв в качестве терминального множество M_ε. Ясно, что $\operatorname{int} M_\varepsilon \neq \varnothing$, точка $m_0 \in M$, использовавшаяся при построении точки x, принадлежит $\operatorname{int} M_\varepsilon$. Далее, согласно лемме 5, поверхность M_ε гладкая, а согласно лемме 6 $T(m(z)) \in K^*_{x,\varepsilon}$. Поэтому в силу (3.7) получаем

$$\max_{u \in U}(T(m(z)), f(t, u, v)) \geqslant \delta > 0$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Следовательно, преследование может быть закончено за конечное время.

Замечания. 1°. Теорема 2 может быть аналогично доказана, если функция f зависит и от позиции z.

2°. Полученные результаты без труда переносятся на случай нескольких преследователей.

Пример 1 (простое преследование). Движение объекта задано дифференциальным уравнением

$$z^\cdot = u - v; \ \|u\| \leqslant \alpha, \ \|v\| \leqslant \beta, \ \alpha > 0, \ \beta > 0, \ z \in R^2$$

Терминальное множество имеет вид $M = \{z \in R^2 : \|z\| \leqslant \varepsilon\}$.
Выясним, какой вид будет иметь условие (3.1) в данной задаче.
Имеем

$$\min_{\|v\| \leqslant \beta} \max_{\|u\| \leqslant \alpha}(T(m(z)), f(t, z, u, v)) = \min_{\|v\| \leqslant \beta} \max_{\|u\| \leqslant \beta}(T(m(z)), u - v) = \max_{\|u\| \leqslant \alpha}(T(m(z)), u) + \min_{\|v\| \leqslant \beta}(T(m(z)), -v).$$

Очевидно, что внутренние единичные нормали в каждой граничной точке m множества M равны $-m/\varepsilon$. Следовательно

$$\max_{\|u\|\leqslant\alpha} (T(m(z)), u) = \alpha, \quad \min_{\|v\|\leqslant\beta} (T(m(z)), -v) = -\beta$$

и условие (3.1) принимает вид $\alpha - \beta > 0$.

Точку m_0 полагаем совпадающей с началом координат, а управления преследователя в каждой реализовавшейся позиции игры выбираются равными вектору $-m(z)\alpha\varepsilon^{-1}$, где $m(z) = x + \lambda(z)(z - x)$, $x = (1 + \rho) z^\circ$, z — текущая позиция игры, а $\lambda(z)$ — функция, построенная указанным выше способом.

Пример 2. Дифференциальная игра задана уравнением

$$\dot{z} = \alpha z + u - v, \quad \|u\| \leqslant r, \quad \|v\| \leqslant s, \quad r \geqslant 0, \quad s \geqslant 0, \quad \alpha > 0, \quad z \in R^2$$
$$M = \{z \in R^2 : \|z\| \leqslant \varepsilon\}$$

Условие (3.1) в данной задаче будет иметь вид

$$(T(m(z)), z) > (s - r)/\alpha \tag{3.8}$$

Покажем, что если выполнено неравенство

$$r - s > \alpha s \tag{3.9}$$

то условие (3.8) имеет место для всех z, таких, что $1 > \lambda(z) \geqslant \lambda(z^\circ)$.

Положим $m_0 = (0, 0)$. Тогда $x = (1 + \rho) z^\circ$, $T(m(z)) = -m(z)/\varepsilon$, так же как и в предыдущем примере.

Исходя из (3.9) запишем

$$\left(\frac{r-s}{\alpha} - \|x\|\right)\frac{1}{\varepsilon - \|x\|} > 1$$

Следовательно

$$\left(\frac{r-s}{\alpha} - \|x\|\right)\frac{1}{\varepsilon - \|x\|} > \lambda(z)$$

Воспользуемся неравенством $(m(z), x) \leqslant \|m(z)\|\|x\| = \varepsilon\|x\|$. Будем иметь

$$(-m(z)/\varepsilon, \; x + \lambda(z)\; (m(z) - x)) > (s - r)/\alpha$$

Используя равенство (2.3), получаем требуемое условие (3.8).

Таким образом, игра может быть закончена из начального положения z° за конечное время, если ее параметры связаны соотношением (3.9). При этом управления преследователей строятся так же, как и в предыдущем примере.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пшеничный Б. Н.* Простое преследование несколькими объектами.— Кибернетика, 1976, № 3, с. 145—146.
2. *Пшеничный Б. Н., Раппопорт И. С.* Об одной задаче группового преследования.— Кибернетика, 1979, № 6, с. 145—146.
3. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями.— Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 3, с. 530—535.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования.— Матем. сб., 1980, т. 112, вып. 3, с. 307—330.
6. *Григоренко Н. Л.* К линейной задаче преследования несколькими объектами.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 2, с. 275—279.
7. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
8. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982. 143 с.
9. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.

Киев

Поступила в редакцию
16.VII.1984