переменных L, G и h будут такими (двойные штрихи у переменных опущены):

$$L = L - \frac{C(A-B)(G^2-L^2)}{4BL(A-C)}\cos 2l - \varkappa\,[L\sqrt{G^2-H^2}\sin l\cos g +$$
$$+ G\sqrt{G^2-H^2}\cos l\sin g + H\sqrt{G^2-L^2}\sin l] + O(\varepsilon^2)$$
$$G = G - \varkappa\,[L\sqrt{G^2-H^2}\cos l\sin g + G\sqrt{G^2-H^2}\sin l\cos g] +$$
$$+\frac{k_1(G^2-H^2)(G^2-L^2)}{4L^2G^5}\cos 2g + \frac{k_1H(G^2-H^2)}{2LG^5}\cos g -$$
$$-\frac{3k_1H}{2LG^5}\sqrt{(G^2-H^2)(G^2-L^2)}\cos g + O(\varepsilon^2)$$
$$h = h_0 + \varkappa\left[\frac{GH}{\sqrt{G^2-H^2}}\sin l\sin g + \sqrt{G^2-L^2}\cos l -\right.$$
$$\left.-\frac{LH}{\sqrt{G^2-H^2}}\cos l\cos g\right] - \frac{k_1H(G^2-L^2)}{4L^2G^5}\sin 2g +$$
$$+\frac{k_1H(G^2-3H^2)}{2LG^5}\sin g - \frac{3k_1(G^2-2H^2)}{2LG^5}\sqrt{\frac{G^2-L^2}{G^2-H^2}}\sin g + O(\varepsilon^2)$$
$$\varkappa = \frac{PACX_c}{LG^2(A-C)}.$$

Таким образом, значения этих переменных получены в виде тригонометрических рядов, постоянные коэффициенты которых зависят от L'', G'', H''. Выражения угловых переменных l и g содержат кроме аналогичных членов еще и вековую часть. Надо заметить, что при построении теории с точностью до членов второго порядка включительно вековая часть появляется и в выражении для h.

Ввиду инвариантности скобок Пуассона формула (6) позволяет достаточно просто определить в виде рядов такого же типа, например, переменные p, q, z, γ, γ', γ'' задачи Эйлера — Пуассона, если воспользоваться их выражением через переменные Деприт [4] и полученными значениями производящих функций S' и S''. Последние зависят только от новых переменных, что существенно облегчает вычисления и удобно при машинном счете.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Deprit A*. Free rotation of a rigid body studied in the phase plane.— Amer. J. Phys., 1967, v. 35, No. 5, p. 424—428.— Рус. перев.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, М.: Мир, 1968, № 2, с. 3—9.
2. *Демин В. Г.*, *Киселев Ф. И.* О периодических движениях твердого тела в центральном ньютоновском поле.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 2, с. 224—227.
3. *Hori G*. Theory of general perturbation with unspecified canonical variables.— Publ. Astron. Soc. Japan, 1966, v. 18, No. 4, p. 287—296.
4. *Архангельский Ю. А*. Аналитическая динамика твердого тела.— М.: Наука, 1977. 328 с.

Кишинев

Поступила в редакцию
19.IV.1984

УДК 531.36 : 534.1

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕАВТОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА — ПЛАНКА — КОЛМОГОРОВА

Нгуен Донг Ань

Предлагается один метод интегрирования уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова (УФПК), используемых в теории случайных колебаний [1—4]. В качестве примера рассматривается уравнение Дуффинга. Затем предлагаемый метод в сочетании с методом усреднения применяется к исследованию случайных колебаний неавтономных механических систем с одной степенью свободы при случайно изменяющейся собственной частоте. Рассматривается уравнение Ван-дер-Поля при случайно изменяющейся собственной частоте и периодическом параметрическом возбуждении. При замене искомой функции УФПК преобразуется в другое уравнение, тривиальным решениям которого соответствуют частные решения УФПК. Как простое следствие рассматриваемой замены получено условие интегрируемости УФПК.

1. Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, движение которой описывается следующим стохастическим уравнением:

$$x^{\cdot\cdot} + \omega^2 x = f(x, x^{\cdot}) + \sigma\xi^{\cdot}(t) \tag{1.1}$$

$$f(x, x^{\cdot}) = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \sum_{i,\, j=0}^{i+j=s} \gamma_{ij} x^i x^{\cdot j}; \quad \alpha_s, \gamma_{ij} = \text{const} \tag{1.2}$$

где $\xi^{\cdot}(t)$ — случайное действие типа «белого шума» с единичной интенсивностью. При помощи замены

$$x = a\cos\psi, \ x^{\cdot} = -a\omega\sin\psi \tag{1.3}$$

с использованием формулы Ито приводим уравнение (1.1) к виду [4]

$$da = \left[-\frac{1}{\omega} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi + \frac{\sigma^2}{2a\omega^2}\cos^2\psi\right]dt - \tag{1.4}$$
$$-\frac{\sigma}{\omega}\sin\psi\, d\xi(t)$$
$$d\psi = \left[\omega - \frac{1}{a\omega} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi - \frac{\sigma^2}{a^2\omega^2}\sin\psi\cos\psi\right]dt -$$
$$-\frac{\sigma}{a\omega}\cos\psi\, d\xi(t)$$

Составим соответствующее системе (1.4) УФПК для стационарной плотности вероятностей амплитуды и фазы $W(a, \psi)$

$$\frac{\partial}{\partial a}[B_1(a,\psi)W] + \frac{\partial}{\partial\psi}[B_2(a,\psi)W] = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}[B_{11}(a,\psi)W] + \right. \tag{1.5}$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial\psi}[B_{12}(a,\psi)W] + \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}[B_{22}(a,\psi)W]\right\}$$

С учетом выражения для $f(x, x^{\cdot})$ (1.2) имеем

$$B_1(a,\psi) = -\frac{\sin\psi}{\omega} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\varphi) + \frac{\sigma^2\cos^2\psi}{2\omega^2 a} = \tag{1.6}$$
$$= \frac{\sigma^2\cos^2\psi}{2\omega^2}a^{-1} + \sum_{s=1}^{m} A_s(\psi)a^s$$
$$A_s(\psi) = \alpha_s \sum_{i,\, j=0}^{i+j=s} \gamma_{ij}(-\omega)^{j-1}\cos^i\psi\sin^{j+1}\psi$$
$$B_2(a,\psi) = \omega - \frac{\sigma^2\cos\psi\sin\psi}{\omega^2 a^2} - \frac{\cos\psi}{a\omega} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) =$$
$$= \omega - \frac{\sigma^2\cos\psi\sin\psi}{\omega^2}a^{-2} + \sum_{s=1}^{m} D_s(\psi)a^{s-1}$$
$$D_s(\psi) = \alpha_s \sum_{i,\, j=0}^{i+j=s} \gamma_{ij}(-\omega)^{j-1}\cos^{i+1}\psi\sin^j\psi$$
$$B_{11}(a,\psi) = \frac{\sigma^2}{\omega^2}\sin^2\psi, \quad B_{12}(a,\psi) = \frac{\sigma^2\sin\psi\cos\psi}{a\omega^2}$$
$$B_{22}(a,\psi) = \frac{\sigma^2\cos^2\psi}{a^2\omega^2}$$

Сделаем замену

$$W(a,\psi) = \exp\{\Phi(a,\psi)\} \tag{1.7}$$

и учитывая тождества

$$\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial\Phi}{\partial a}, \quad \frac{1}{W}\frac{\partial^2 W}{\partial a\,\partial\psi} = \frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial a\,\partial\psi}$$

преобразуем уравнение (1.5) к виду

$$\left(\frac{\partial B_1}{\partial a} + \frac{\partial B_2}{\partial\psi} - \frac{\partial^2 B_{12}}{\partial\psi\,\partial a} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_{22}}{\partial\psi^2}\right) + \left(B_1 - \frac{\partial B_{12}}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial a} + \tag{1.8}$$

$$+\left(B_2-\frac{\partial B_{12}}{\partial a}-\frac{\partial B_{22}}{\partial \psi}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}-\frac{B_{11}}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right)^2+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2}\right]-$$
$$-B_{12}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right)+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a\,\partial \psi}\right]-\frac{B_{22}}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right)^2+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2}\right]=0$$

Задача заключается в решении нелинейного уравнения в частных производных (1.8), коэффициенты которого вычисляются по формулам (1.6). Прежде всего заметим, что в уравнении (1.8) с коэффициентами (1.6) амплитуда a может играть роль обобщенной циклической координаты [5—7] (коэффициенты уравнения—многочлены с целыми степенями амплитуды a). Следовательно, по методу разложения в ряд по обобщенной циклической координате [5—7] решение уравнения (1.8) относительно $\partial\Phi/\partial a$ найдется также в виде многочлена с целыми степенями амплитуды a. Тогда

(1.9)
$$\Phi(a,\psi)=\ln C+\ln a+\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i(\psi)\,a^i,\quad C=\text{const},\quad C>0$$

Подставляя выражения Φ из (1.9) и коэффициентов B_1, B_2, B_{11}, B_{12}, B_{22} из (1.6) в уравнение (1.8) и сравнивая коэффициенты при a^{-2}, a^{-1}, a^0, $a^1,\ldots$, получим систему уравнений для неизвестных μ_1, μ_2, $\mu_3,\ldots$ (штрих означает производную по ψ)

(1.10)
$$\frac{\sigma^2}{2\omega^2}(\cos^2\psi-2\sin^2\psi)+\frac{\sigma^2}{2\omega^2}(2\sin^2\psi-\cos^2\psi)=0$$
$$\frac{\sigma^2\cos^2\psi}{2\omega^2}(\mu_1+\mu_1'')=0$$
$$\frac{\sigma^2}{\omega^2}\left(\frac{\cos^2\psi}{2}\mu_2''+\sin\psi\cos\psi\mu_2'+\mu_2\right)=2A_1(\psi)+D_1'(\psi)-$$
$$-\frac{\sigma^2}{\omega^2}\left[\frac{\sin^2\psi}{2}\mu_1^2+\frac{\cos^2\psi}{2}\mu_1'^2+\sin\psi\cos\psi\mu_1\mu_1'\right]$$
$$\frac{\sigma^2}{\omega^2}\left(\frac{\cos^2\psi}{2}\mu_3''+2\sin\psi\cos\psi\mu_3'+\frac{3(1+\sin^2\psi)}{2}\mu_3\right)=$$
$$=3A_2(\psi)+D_2'(\psi)+A_1(\psi)\mu_1-\frac{\sigma^2}{\omega^2}[2\sin^2\psi\mu_1\mu_2+\cos^2\psi\mu_1'\mu_2+$$
$$+2\sin\psi\cos\psi\mu_1'\mu_2+\sin\psi\cos\psi\mu_2'\mu_1]+(\omega+D_1(\psi))\mu_1'$$
$$\frac{\sigma^2}{\omega^2}\left(\frac{\cos^2\psi}{2}\mu_{n+2}''+(n+1)\sin\psi\cos\psi\mu_{n+2}'+\right.$$
$$\left.+\frac{n+2}{2}(1+n\sin^2\psi)\mu_{n+2}\right)=(n+2)A_{n+1}(\psi)+$$
$$+D_{n+1}'(\psi)+\sum_{i,\,s=1}^{i+s=n+1}[iA_s(\psi)\mu_i+D_s(\psi)\mu_i']+$$
$$+\omega\mu_n'-\frac{\sigma^2}{\omega^2}\left[\frac{\sin^2\psi}{2}\sum_{i,\,j=1}^{i+j=n+2}ij\mu_i\mu_j+\sin\psi\cos\psi\sum_{i,\,j=1}^{i+j=n+2}i\mu_i'\mu_j+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos^2}{2}\sum_{i,\,j=1}^{i+j=n+2}\mu_i'\mu_j'\right],\quad n=2,3,\ldots$$
$$A_k(\psi),\ D_k(\psi)=0,\quad k=m+1,\ m+2,\ldots$$

Отметим одно интересное свойство системы (1.10): дифференциальные уравнения этой системы разделяются относительно μ_i и позволяют последовательно определить все μ_1, μ_2, μ_3, ... Произвольные постоянные интегрирования должны быть выбраны из условия периодичности функций $\mu_i(\psi)$. Вопрос о сходимости ряда (1.9) является трудным, и в общем случае система (1.10) должна подлежать отдельному рассмотрению.

Заметим только, что вопрос о сходимости не возникает в случаях, когда система (1.10) допускает точное решение вида

$$\mu_i=\varphi_i(\psi),\quad i=1,2,\ldots,N;\quad \mu_l=0,\quad l\geqslant N+1$$

Тогда получим

$$W(a,\psi)=Ca\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(\psi)\,a^i\right\}$$

Таким свойством будут обладать многие механические системы с одной степенью свободы, нелинейная часть которых линейно зависит от скорости.

В качестве примера рассмотрим уравнение (1.1) при

$$f(x, x^{\cdot}) = -\beta x^{\cdot} - \gamma x^3; \ \beta, \gamma > 0 \tag{1.11}$$

(уравнение Дуффинга). Для этого случая по (1.6) вычислим

$$\begin{aligned} &A_1 = -\beta \sin^2 \psi, \ A_2 = 0, \ A_3 = \gamma\omega^{-1} \cos^3 \psi \sin \psi \\ &D_1 = -\beta \sin\psi \cos\psi, \ D_2 = 0, \ D_3 = \gamma\omega^{-1} \cos^4 \psi \\ &A_n = 0, \ D_n = 0, \ n \geqslant 4 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Подставляя выражения (1.12) в систему (1.10), можно показать, что она допускает следующее решение:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = \mu_3 = 0, \ \mu_2 = -\beta\omega^2\sigma^{-2} \\ &\mu_4 = -{}^1/_2\beta\gamma\sigma^{-2} \cos^4 \psi; \ \mu_s = 0, \ s \geqslant 5 \end{aligned}$$

Следовательно, решение уравнения (1.5), соответствующего случаю Дуффинга (1.11), будет

$$W(a, \psi) = Ca \exp\left\{-\frac{\beta\omega^2}{\sigma^2} a^2 - \frac{\beta\gamma \cos^4 \psi}{2\sigma^2} a^4\right\} \tag{1.13}$$

Заметим, что решение (1.13) может быть получено также из известного решения УФПК, соответствующего случаю Дуффинга (1.11), при переходе от фазовых координат x, $x^{\cdot}$ к переменным амплитуде и фазе [2].

2. Рассмотрим применение предлагаемого в п.1 метода решения УФПК в сочетании с принципом усреднения к исследованию случайного колебания неавтономных механических систем с одной степенью свободы при случайно изменяющейся частоте [3], описываемых следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$x^{\cdot\cdot} + [\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi^{\cdot}(t)]x = \varepsilon f(x, x^{\cdot}, \omega t) \tag{2.1}$$

$$f(x, x^{\cdot}, \omega t) = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \sum_{i, j=0}^{i+j=s} \gamma_{ij} x^i x^{\cdot j} + \gamma x^2 \cos \omega t \tag{2.2}$$

где $\xi^{\cdot}(t)$ — случайное действие типа белого шума с единичной интенсивностью. При помощи замены (1.3), где $\psi = \omega t + \theta(t)$, с использованием формулы Ито приводим уравнение (2.1) к стандартному виду

$$\begin{aligned} da &= \left[-\frac{\varepsilon}{\omega} f \sin\psi + \frac{\varepsilon\sigma^2 \cos^4 \psi}{2\omega^2}\right] dt + \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{\omega} a \cos\psi \sin\psi \, d\xi(t) \\ d\theta &= \left[-\frac{\varepsilon}{a\omega} f \cos\psi - \frac{\varepsilon\sigma^2}{\omega^2} \cos^2\psi \sin\psi\right] dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{\omega} \cos^2\psi \, d\xi(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Составим соответствующее системе (2.3) усредненное УФПК для стационарной плотности вероятностей амплитуды и фазы [4, 8]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a}(K_1 W) + \frac{\partial}{\partial\theta}(K_2 W) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11} W) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial a \, \partial\theta}(K_{12} W) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{22} W) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Учитывая соотношение (2.2), получим [4] выражения для K_1, K_2, K_{11}, K_{12}, K_{22}. Затем сделаем замену (1.7) и получим, как в п. 1, уравнение относительно $\partial\Phi/\partial a$. Решение этого уравнения ищется в виде многочлена с целыми степенями амплитуды a, т. е.

$$\Phi(a, \theta) = \lambda_1 \ln a + \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(\theta) a^i + \ln C, \quad C > 0, \quad \lambda_1 = \text{const} \tag{2.5}$$

где $\mu_i(\theta)$ — неизвестные коэффициенты, зависящие только от фазы θ. Наконец, как в п. 1, получим следующие уравнения для λ_1, μ_0, μ_1, . . .:

$$\begin{aligned} &3\mu_0'' + \frac{16\omega\beta_1}{\sigma^2}\mu_0' + 3\mu_0'^2 + \lambda_1^2 + \frac{16\omega\eta_1}{\sigma^2}\lambda_1 + \frac{16\omega\eta_1}{\sigma^2} - 1 = 0 \\ &3\mu_1'' + \left(6\mu_0' + \frac{16\omega\beta_1}{\sigma^2}\right)\mu_1' + \left(2\lambda_1 + \frac{16\omega\eta_1}{\sigma^2} + 1\right)\mu_1 = \\ &= \frac{16\omega^2}{\sigma^2}\left\{-\frac{2\eta_2}{\omega} + \frac{\gamma \sin\theta}{8\omega} - \left(\frac{\eta_2}{\omega} + \frac{\gamma\sin\theta}{8\omega}\right)\lambda_1 + \left(\frac{\beta_2}{\omega} + \frac{3\gamma\cos\theta}{8\omega}\right)\mu_0'\right\} \\ &3\mu_k'' + \left(6\mu_0' + \frac{16\omega\beta_1}{\sigma^2}\right)\mu_k' + (k(k + 2\lambda_1 - 1)) + \left(\frac{16\omega\eta_1 k}{\sigma^2} + k\right)\mu_k = \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$= \frac{16\omega^2}{\sigma^2}\left\{-\frac{(k+1)\eta_{k+1}}{\omega} + \left(\frac{\eta_2}{\omega} + \frac{\gamma\sin\theta}{8\omega}\right)(k-1)\mu_{k-1} - \right.$$
$$- \sum_{i=0,\, s=3}^{s+i=k+1} \frac{i\mu_i\eta_s}{\omega} - \frac{\eta_{k+1}\lambda_1}{\omega} - \left(\frac{\beta_2}{\omega} + \frac{3\gamma\cos\theta}{8\omega}\right)\mu'_{k-1} -$$
$$\left. - \sum_{i=0,\, s=3}^{s+i=k+1} \frac{\beta_s\mu_i'}{\omega}\right\} - \sum_{i=1,\, j=1}^{i+j=k} ij\mu_i\mu_j - 3\sum_{i=1,\, j=1}^{i+j=k} \mu_i'\mu_j', \quad k = 2, 3, \ldots$$

Итак, получена замкнутая система дифференциальных уравнений, которые позволяют последовательно определить все λ_1, μ_i. Произвольные постоянные интегрирования должны быть выбраны из условия периодичности функций $\mu_i(\theta)$. К системе (2.6) относятся также замечания, сделанные в п. 1 для системы (1.10).

Во многих случаях система (2.6) допускает точное решение вида

$$\lambda_1 = \alpha = \mathrm{const}, \quad \mu_i = \varphi_i(\theta), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N; \quad \mu_j = 0, \quad j \geqslant N + 1$$

Тогда получим точное решение УФПК (2.4)

$$W(a, \theta) = Ca^{\alpha} \exp\left\{\sum_{i=0}^{N} \varphi_i(\theta) a^i\right\}, \quad C > 0 \tag{2.7}$$

В качестве примера рассмотрим неавтономное уравнение Ван-дер-Поля при случайно изменяющейся собственной частоте

$$x'' + (\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi'(t))x = \varepsilon\{\Delta x + (1 - \beta x^2)x' + \gamma x^2\cos\omega t\}, \quad \omega^2 - \varepsilon\Delta = \nu^2 \tag{2.8}$$

Вычисление дает

$$K_1(a, \theta) = \frac{a}{2} - \frac{\beta a^3}{8} - \frac{\gamma a^2\sin\theta}{8\omega} + \frac{3\sigma^2}{16\omega^2}a$$
$$K_2(a, \theta) = \frac{\Delta}{2\omega} - \frac{3\gamma a}{8\omega}\cos\theta; \quad \eta_1 = -\frac{\omega}{2}, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = \frac{\beta\omega}{8}$$
$$\eta_i = 0, \quad i = 4, 5, \ldots, \quad \beta_1 = -\frac{\Delta}{2}, \quad \beta_j = 0, \quad j = 2, 3, \ldots$$

В данном случае система (2.6) имеет точное решение

$$\lambda_1 = \frac{8\omega^2}{\sigma^2} + 1, \quad \mu_0 = \frac{8\Delta\omega}{3\sigma^2}\theta, \quad \mu_1 = -\frac{2\omega\gamma}{\sigma^2}\sin\theta \tag{2.9}$$
$$\mu_2 = -\frac{\beta\omega^2}{\sigma^2}, \quad \mu_i = 0, \quad i = 3, 4, \ldots$$

Однако для периодичности функции $\mu_0(\theta)$ необходимо положить $\Delta = 0$. Подставляя выражения (2.9) в (2.7), получим точное решение УФПК, соответствующего уравнению (2.9), при точном главном резонансе

$$W(a, \theta) = a\varkappa \exp\left\{-\frac{2\omega\gamma\sin\theta}{\sigma^2}a - \frac{\beta\omega^2}{\sigma^2}a^2\right\} \tag{2.10}$$
$$\varkappa = 8\omega^2\sigma^{-2} + 1$$

Эта плотность вероятностей $W(a, \theta)$ достигает экстремума в точках, где $\partial W/\partial a = \partial W/\partial\theta = 0$.

Устойчивость случайных становившихся колебаний можно получить при условии, что W достигает максимума. Заметим, что в данном случае $W(0, \theta) = 0$, следовательно, положение равновесия $x = 0$ неустойчиво.

В общем случае достаточным условием неустойчивости положения равновесия служит неравенство [3] $\lambda_1 > 0$.

3. Рассмотрим неавтономную механическую систему с одной степенью свободы в главной области резонанса

$$x'' + \omega^2 x = \varepsilon[f(x, x', \omega t) - \Delta x] + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi'(t), \quad \nu^2 = \omega^2 + \varepsilon\Delta \tag{3.1}$$

Как в п. 2, при замене (1.3), где $\psi = \omega t + \theta$, уравнение (3.1) преобразуется к стандартному виду, а соответствующее усредненное УФПК для стационарной плотности вероятностей $W(a, \theta)$ принимает вид [4]

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1 W) + \frac{\partial}{\partial\theta}(K_2 W) - \frac{\sigma^2}{4\omega^2}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial a^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right] = 0 \tag{3.2}$$

Здесь

$$K_1(a,\theta) = M_t\left(\frac{\sigma^2}{2a\omega^2}\cos^2\psi - \frac{\sin\psi}{\omega}(f - \Delta a\cos\psi)\right) = \tag{3.3}$$

$$= \frac{\sigma^2}{4a\omega^2} - \frac{1}{\omega}M_t(f\sin\psi)$$

$$K_2(a,\theta) = M_t\left(-\frac{\sigma^2\sin\psi\cos\psi}{a^2\psi^2} - \frac{\cos\psi}{a\omega}(f - \Delta a\cos\psi)\right) =$$

$$= \frac{\Delta}{2\omega} - \frac{1}{a\omega}M_t(f\cos\psi)$$

Сделаем в уравнении (3.2) замену искомой функции

$$W(a,\theta) = S(a,\theta)\exp\left\{\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\int_1^a K_1(a,\theta)\,da\right\} \tag{3.4}$$

Подставляя выражение (3.4) в уравнение (3.2), после простых преобразований приходим к следующему уравнению для неизвестной функции $S(a,\theta)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(K_2 - \frac{1}{a^2}\int_1^a\frac{\partial K}{\partial\theta}\,da\right) + \frac{4\omega^2}{\sigma^2}\int_1^a\frac{\partial K_1}{\partial\theta}\,da\left(K_2 - \frac{1}{a^2}\int_1^a\frac{\partial K_1}{\partial\theta}\,da\right)\right]S - \tag{3.5}$$

$$- K_1\frac{\partial S}{\partial a} + \left(K_2 - \frac{2}{a^2}\int_1^a\frac{\partial K_1}{\partial\theta}\,da\right)\frac{\partial S}{\partial\theta} - \frac{\sigma^2}{4\omega^2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2}\right) = 0$$

Видно, что это уравнение допускает тривиальное решение

$$S(a,\theta) = C,\quad C = \mathrm{const},\quad C > 0 \tag{3.6}$$

если

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(K_2 - \frac{1}{a^2}\int_1^a\frac{\partial K_1}{\partial\theta}\,da\right)\frac{4\omega^2}{\sigma^2} + \int_1^a\frac{\partial K_1}{\partial\theta}\,da\left(K_2 - \frac{1}{a^2}\int_1^a\frac{\partial K_1}{\partial\theta}\,da\right) \tag{3.7}$$

или, в частности

$$\frac{\partial}{\partial a}(a^2K_2) = \frac{\partial K_1}{\partial\theta} \tag{3.8}$$

Подставляя сюда выражения K_1, K_2 из (3.3), получим условие интегрируемости УФПК

$$\frac{\Delta a}{\omega} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial a}\{aM_t(f\cos\psi)\} = -\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\theta}\{M_t(f\sin\psi)\} \tag{3.9}$$

при выполнении которого из (3.4), (3.6) получим решение соответствующего УФПК (3.2)

$$W(a,\theta) = Ca\exp\left\{-\frac{4\omega}{\sigma^2}\int_1^a M_t[f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi, \psi-\theta)\sin\psi]\,da\right\} \tag{3.10}$$

Можно показать, что условие интегрируемости (3.9) будет удовлетворяться, если [9]

$$\Delta = 0,\quad \alpha > 0 \tag{3.11}$$

$$f(x, x^{\cdot}, \omega t) = \sum_{i=0}^{m}[g_i(x)x^{\cdot 2i+1} + h_i(x^{\cdot})x^{2i}] - \alpha\,\mathrm{sign}\,x^{\cdot} + P\cos\omega t$$

где $g_i(x)$, $h_i(x^{\cdot})$ — многочлены, соответственно, от x и $x^{\cdot}$. Подставляя (3.11) в (3.10), получим решение соответствующего УФПК (3.2).

В качестве примера рассмотрим стохастическое уравнение

$$x^{\cdot\cdot} + 2\varepsilon\alpha x^{\cdot} + \omega^2(1 + \varepsilon\lambda\cos 2\omega t)x = \tag{3.12}$$

$$= \varepsilon P\cos\nu t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi^{\cdot}(t),\quad \alpha > 0$$

Вычисление дает

$$K_1(a,\theta) = \frac{\sigma^2}{4a\omega^2} - \frac{P}{2\omega}\sin\theta - \alpha a + \frac{\omega\lambda a}{4}\sin 2\theta$$

$$K_2(a,\theta) = -\frac{P}{2a\omega}\cos\theta + \frac{\omega\lambda}{4}\cos 2\theta$$

Можно показать, что в данном случае условие интегрируемости (3.8) выполняется. Из решения УФПК, соответствующего уравнению (3.12)

$$W(a, \theta) = Ca \exp\left\{-\frac{2\omega P}{\sigma^2} a \sin\theta - \frac{\omega^2}{2\sigma^2}(4a - \omega\lambda \sin 2\theta)\, a^2\right\}$$

следует, что для существования установившегося случайного колебания достаточно, чтобы

$$4\alpha > \omega \mid \lambda \mid$$

Это неравенство служит условием устойчивости системы (3.12) при отсутствии внешних воздействий [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. Физматгиз, 1963. 410 с.
2. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
3. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
4. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах.— В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем. Киев: Изд-во Ин-та матем. АН УССР, 1976, с. 102—147.
5. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу исследования случайных колебаний методом уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова: Сб. научн. работ по механике. Изд-во НЦНИ Вьетнама, 1978, с. 16—28 (на вьетн. яз.).
6. *Нгуен Донг Ань.* Некоторые методы интегрирования уравнений Фоккера — Планка— Колмогорова в теории случайных колебаний.— Укр. матем. ж., 1981, т. 33, № 1, с. 87—91.
7. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу о решении уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова для неавтономных систем, подверженных периодическим и случайным воздействиям.— Укр. матем. ж., 1982, т. 34, № 4, с. 525—528.
8. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью.— Теория вероятностей и ее применения, 1966, т. 11, № 3, с. 444—462.
9. *Нгуен Донг Ань.* Случайные колебания механической системы с одной степенью свободы под воздействием периодической силы и «белого шума».— Укр. матем. ж., 1982, т. 34, № 5, с. 633—636.

Вьетнам

Поступила в редакцию 13.II.1984

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 27.03.85 Подписано к печати 17.05.85 Т-10738 Формат бумаги 70×108¹/₁₆
Высокая печать Усл. печ. л. 14,0 Усл. кр.-отт. 34,6 тыс. Уч.-изд. л. 14,3 Бум. л. 5,0
Тираж 2221 экз. Зак. 1212

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6