УДК 531.38

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ

Моторина Н. Н.

Методом теории возмущений, основанном на применении рядов Ли, исследуется один частный случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Используется гамильтонова форма уравнений в переменных действие — угол. Решения получены в виде тригонометрических рядов с постоянными коэффициентами.

Предполагается, что распределение масс в теле близко к распределению в случае Ковалевской и центр тяжести тела расположен достаточно близко к закрепленной точке. Используются канонические переменные Депри [1]. Движение тела в этих переменных можно описать следующей системой уравнений:

$$\frac{d(L, G, H)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial (l, g, h)}, \quad \frac{d(l, g, h)}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial (L, G, H)}$$

При условии, что центр тяжести тела расположен достаточно близко к закрепленной точке, а главные моменты инерции A и B мало различаются, гамильтониан этих уравнений можно представить в соответствии с порядком величин в виде [2]

(1)
$$F = F_0 + F_1$$
$$F_0 = \frac{G^2 - L^2}{2A} - \frac{L^2}{2C}$$
$$F_1 = \frac{A - B}{2AB}(G^2 - L^2)\cos^2 l + \frac{px_c}{G^2}\left(L\sqrt{G^2 - H^2}\sin l\cos g + G\sqrt{G^2 - H^2}\cos l\sin g + H\sqrt{G^2 - L^2}\sin l\right)$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции для закрепленной точки, P — вес тела, x — координата центра масс в главных осях инерции.

В качестве малого параметра примем $\varepsilon = \max\{A - B, x_c\}$. Для решения уравнений с гамильтонианом (1) удобно применить метод теории канонических преобразований с использованием рядов Ли, разработанный Хори [3].

Для исключения из гамильтониана переменной l осуществим каноническое преобразование переменных

$$L, G, H, l, g, h \to L', G', H', l', g', h'$$

при помощи производящей функции $S'(L', G', H', l', g', h') = S_1' + S_2' + \ldots$. Предполагаем, что гамильтониан новых уравнений тоже может быть представлен в соответствии с порядком величин в виде $F' = F_0' + F_1' + \ldots$.

Согласно методу Хори, составляющие производящей функции и гамильтониана находятся по формулам

(2)
$$F_0' = F_0, \quad F_1' = F_{1s}, \quad S_1' = \int F_{1p}dt', \quad F_2' = F_{2s} + {}^1/_2\{F_1 + F_1', S_1'\}_s,$$
$$S_2' = \int [F_{2p} + {}^1/_2\{F_1 + F_1', S_1'\}_p]dt'$$

и т. д. Фигурными скобками обозначены скобки Пуассона, а индексами p и s — периодическая и вековая части по t' соответственно.

Параметр t' вводится уравнениями

$$\frac{d(L', G', H')}{dt'} = \frac{\partial F_0'}{\partial (l', g', h')}, \quad \frac{d(l', g', h')}{dt'} = -\frac{\partial F_0'}{\partial (L', G', H')}$$

В силу этих уравнений справедлива следующая скобка Пуассона:

$$\{F_0, S_k\} = -ds_k/dt'$$

из которой определяем связь между t' и l'

(3)
$$dt' = -(\partial F_0/\partial L)^{-1}dl'$$

Применяя к исходному гамильтониану F алгоритм (2) с учетом формулы (3), находим (для удобства штрихи у переменных опущены)

(4)
$$F_0' = \frac{G^2 - L^2}{2A} - \frac{L^2}{2C}, \quad F_1' = \frac{A - B}{4AB}(G^2 - L^2)$$
$$S_1' = -\frac{C(A - B)}{8BL(A - C)}(G^2 - L^2)\sin 2l - \frac{PACX_c}{LG^2(A - C)} \times$$
$$\times\left(L\sqrt{G^2 - H^2}\cos l\cos g - G\sqrt{G^2 - H^2}\sin l\sin g + H\sqrt{G^2 - L^2}\cos l\right)$$

$$F_2' = \left[\frac{C(A-B)^2(G^2-L^2)(G^2+3L^2)}{64AB^2L^2(A-C)} + \frac{kH^2}{4G^4}\sqrt{\frac{G^2-H^2}{G^2-L^2}} - \frac{kH^2}{2G^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{k}{4L^2}\right] - \frac{k(G^2-H^2)(G^2-L^2)}{4L^2G^4}\cos^2 g - \frac{3kH}{4LG^4}\sqrt{(G^2-H^2)(G^2-L^2)}\cos g -$$
$$-\frac{kH(G^2-H^2)}{4LG^4}\cos g, \quad k = \frac{P^2ACX_c^2}{A-C}$$

Полученный гамильтониан F' не содержит переменной l'. Для исключения оставшейся угловой переменной g' осуществим еще одно каноническое преобразование

$$L', G', H', l', g', h' \to L'', G'', H'', l'', g'', h''$$

при помощи производящей функции $S''(L'', G'', H'', l'', g'', h'') = S_1'' + S_2'' + \ldots$. Как и прежде, предполагаем, что гамильтониан новых уравнений движения имеет вид $F'' = F_0'' + F_1'' + \ldots$.

Для нахождения составляющих этого гамильтониана и производящей функции используем формулы

(5) $$F_0'' = F_0', \quad F_1'' = F_1', \quad F_2'' = F_{2s}', \quad S_1'' = \int F_{2p}' dt''$$

и т. д. Вводим параметр t'' при помощи уравнений

$$\frac{d(L'', G'', H'')}{dt''} = \frac{\partial F_1''}{\partial(l'', g'', h'')}, \quad \frac{d(l'', g'', h'')}{dt''} = -\frac{\partial F_1''}{\partial(L'', G'', H'')}$$

Тогда связь между t'' и g'' будет такой:

$$dt'' = -(\partial F_1''/\partial G'')^{-1} dg''$$

Переходя в выражениях (5) от интегрирования по t'' к интегрированию по g'', получаем (двойные штрихи у переменных опущены)

$$F_2'' = [\ldots] - \frac{k(G^2-H^2)(G^2-L^2)}{8L^2G^4}$$
$$S_1'' = \frac{k_1(G^2-H^2)(G^2-L^2)}{8L^2G^5}\sin 2g + \frac{k_1H(G^2-H^2)}{2LG^5}\sin g -$$
$$-\frac{3k_1H}{2LG^5}\sqrt{(G^2-H^2)(G^2-L^2)}; \quad k_1 = \frac{kAB}{A-C}$$

Выражения для F_0'', F_1'' совпадают с приведенными в (4), символ [...] означает выражение в квадратных скобках для величины F_2' в (4).

Полученный гамильтониан F'' не содержит угловых переменных. Из уравнений движения непосредственно следует $L'' = \text{const}$, $G'' = \text{const}$, $H'' = \text{const}$, в то время как угловые переменные будут линейными функциями времени

$$l'' = \dot{l}''t + l_0, \quad g'' = \dot{g}''t + g_0, \quad h'' = \dot{h}''t + h_0$$

где l_0, g_0, h_0 — начальные значения соответствующих переменных. Из уравнений движения получаем (двойные штрихи у переменных опущены)

$$\dot{l}'' = -\frac{L(A-C)}{AC} + \frac{L(A-B)}{2AB} + \frac{C(A-B)^2(G^4+3L^4)}{32AB^2L^3(A-C)} -$$
$$-\frac{k(G^2+H^2)}{4G^2L^3} - \frac{kLH^2}{4G^4(G^2-L^2)}\sqrt{\frac{G^2-H^2}{G^2-L^2}} + O(\varepsilon^3)$$
$$\dot{g}'' = -\frac{G(A+B)}{2AB} - \frac{CG(A-B)^2(G^2+L^2)}{16AB^2L^2(A-C)} - \frac{k(G^2-10H^2)}{4G^5} - \frac{kH^2}{4L^2G^3} +$$
$$+\frac{kH^2[G^2(4G^2-3L^2)-H^2(5G^2-4L^2)]}{G^5(G^2-L^2)\sqrt{(G^2-H^2)(G^2-L^2)}} + O(\varepsilon^3)$$
$$\dot{h}'' = \frac{5kH}{4G^4} - \frac{kH}{4L^2G^2} - \frac{kH(2G^2-3H^2)}{4G^4\sqrt{(G^2-H^2)(G^2-L^2)}} + O(\varepsilon^3)$$

Последнее выражение содержит лишь члены второго порядка малости относительно малого параметра.

Исходные переменные, а также любая функция исходных переменных определяются при помощи формулы

(6) $$f(L, G, H, l, g, h) = f(L'', G'', H'', l'', g'', h'') + \{f, S' + S''\} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{f, \{S', S''\}\} + \tfrac{1}{2}\{\{f, S' + S''\}, S' + S''\} + O(\varepsilon^3)$$

Так, из данной теории следует $H = H'' = \text{const}$. Если выписать только члены до первого порядка включительно относительно малого параметра, то выражения для переменных L, G и h будут такими (двойные штрихи у переменных опущены):

$$L = L - \frac{C(A-B)(G^2-L^2)}{4BL(A-C)} \cos 2l - \varkappa \left[L\sqrt{G^2-H^2} \sin l \cos g + G\sqrt{G^2-H^2} \cos l \sin g + H\sqrt{G^2-L^2} \sin l\right] + O(\varepsilon^2)$$

$$G = G - \varkappa \left[L\sqrt{G^2-H^2} \cos l \sin g + G\sqrt{G^2-H^2} \sin l \cos g\right] + \frac{k_1(G^2-H^2)(G^2-L^2)}{4L^2G^5} \cos 2g + \frac{k_1H(G^2-H^2)}{2LG^5} \cos g - \frac{3k_1H}{2LG^5}\sqrt{(G^2-H^2)(G^2-L^2)} \cos g + O(\varepsilon^2)$$

$$h = h_0 + \varkappa \left[\frac{GH}{\sqrt{G^2-H^2}} \sin l \sin g + \sqrt{G^2-L^2} \cos l - \frac{LH}{\sqrt{G^2-H^2}} \cos l \cos g\right] - \frac{k_1H(G^2-L^2)}{4L^2G^5} \sin 2g + \frac{k_1H(G^2-3H^2)}{2LG^5} \sin g - \frac{3k_1(G^2-2H^2)}{2LG^5}\sqrt{\frac{G^2-L^2}{G^2-H^2}} \sin g + O(\varepsilon^2)$$

$$\varkappa = \frac{PACX_c}{LG^2(A-C)}.$$

Таким образом, значения этих переменных получены в виде тригонометрических рядов, постоянные коэффициенты которых зависят от L'', G'', H''. Выражения угловых переменных l и g содержат кроме аналогичных членов еще и вековую часть. Надо заметить, что при построении теории с точностью до членов второго порядка включительно вековая часть появляется и в выражении для h.

Ввиду инвариантности скобок Пуассона формула (6) позволяет достаточно просто определить в виде рядов такого же типа, например, переменные p, q, z, γ, γ', γ'' задачи Эйлера — Пуассона, если воспользоваться их выражением через переменные Деприт [4] и полученными значениями производящих функций S' и S''. Последние зависят только от новых переменных, что существенно облегчает вычисления и удобно при машинном счете.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Deprit A*. Free rotation of a rigid body studied in the phase plane.— Amer. J. Phys., 1967, v. 35, No. 5, p. 424—428.— Рус. перев.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, М.: Мир, 1968, № 2, с. 3—9.
2. *Демин В. Г., Киселев Ф. И.* О периодических движениях твердого тела в центральном ньютоновском поле.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 2, с. 224—227.
3. *Hori G*. Theory of general perturbation with unspecified canonical variables.— Publ. Astron. Soc. Japan, 1966, v. 18, No. 4, p. 287—296.
4. *Архангельский Ю. А*. Аналитическая динамика твердого тела.— М.: Наука, 1977. 328 с.

Кишинев

Поступила в редакцию 19.IV.1984

УДК 531.36 : 534.1

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕАВТОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА — ПЛАНКА — КОЛМОГОРОВА

Нгуен Донг Ань

Предлагается один метод интегрирования уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова (УФПК), используемых в теории случайных колебаний [1—4]. В качестве примера рассматривается уравнение Дуффинга. Затем предлагаемый метод в сочетании с методом усреднения применяется к исследованию случайных колебаний неавтономных механических систем с одной степенью свободы при случайно изменяющейся собственной частоте. Рассматривается уравнение Ван-дер-Поля при случайно изме-