Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 3, 1985

УДК 531.38

О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ЭЛЛИПСОИДА ПО ГЛАДКОЙ ПЛОСКОСТИ

Буров А. А., Карапетян А. В.

Известны два случая, когда система уравнений движения тяжелого твердого тела по гладкой плоскости интегрируема по Лиувиллю (см., например, [1]): если тело — шар, центр масс которого совпадает с геометрическим центром, а моменты инерции произвольны, и если тело является телом вращения. В данной работе получены необходимые условия существования дополнительного аналитического по фазовым переменным первого интеграла для тел эллипсоидальной формы, близких к шару, главные моменты инерции которого различны и центр масс совпадает с геометрическим центром.

1. Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела по неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Положение тела будем задавать координатами x и y его центра масс G в неподвижной системе координат $Oxyz$ (плоскость Oxy совпадает с опорной плоскостью, ось Oz направлена вертикально вверх) и углами Эйлера φ, ψ, θ, которые определяют ориентацию главных центральных осей инерции тела $G\xi_1$, $G\xi_2$, $G\xi_3$ по отношению к осям неподвижной системы координат.

Тело на гладкой плоскости представляет собой консервативную голономную систему, и его движение определяется уравнениями Лагранжа с лагранжианом [2]

$$\begin{aligned} L = {}^1/_2\{(I_3 + m\chi_2^2 \sin^2\theta)\,\varphi^{\cdot 2} + [(I_1 \sin^2\varphi + I_2\cos^2\varphi)\sin^2\theta + \\ + I_3\cos^2\theta]\,\psi^{\cdot 2} + [I_1\cos^2\varphi + I_2\sin^2\varphi + m\,(\chi_1\cos\theta - \xi_3\sin\theta)]\,\theta^{\cdot 2} + \\ + 2I_3\cos\theta\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot} + 2m\,(\chi_1\cos\theta - \xi_3\sin\theta)\,\chi_2\sin\theta\varphi^{\cdot}\theta^{\cdot} + \\ + 2\,(I_1 - I_2)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\psi^{\cdot}\theta^{\cdot}\} + \frac{m}{2}\,(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + mg\,(\chi_1\sin\theta + \xi_3\cos\theta) \\ \chi_1 = \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi,\;\; \chi_2 = \xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi \end{aligned}$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — главные центральные моменты инерции тела, m — масса, g — ускорение силы тяжести, ξ_1, ξ_2, ξ_3 — координаты точки касания тела с плоскостью в главных центральных осях инерции, представляющие собой функции переменных θ и φ, определяемые по уравнению поверхности тела.

Переходя от обобщенных координат и скоростей к координатам и импульсам, уравнения движения тела на гладкой плоскости можно представить в каноническом виде с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} < p,\quad A^{-1}p > + \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2) - mg\,(\chi_1\sin\theta + \xi_3\cos\theta)$$

где $p = (p_\varphi, p_\psi, p_\theta)$, A — матрица квадратичной формы относительно $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, $\theta^{\cdot}$, заключенной в фигурные скобки в выражении для функции L.

Поскольку функция H не зависит от x, y, ψ, то рассматриваемая система помимо интеграла энергии $H = \text{const}$ обладает тремя интегралами

$$p_x = P_x,\; p_y = P_y, p_\psi = P_\psi$$

причем без уменьшения общности можно считать, что постоянные P_x и P_y равны нулю, т. е. проекция центра масс тела на опорную плоскость неподвижна (постоянная P_ψ произвольна).

В общем случае для полной интегрируемости уравнений движения тела на гладкой плоскости не достает, как и в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, одного дополнительного интеграла. Заметим, что в отличие от последней в рассматриваемой задаче существенное значение имеет вид поверхности тела.

2. Пусть тело ограничено эллипсоидальной поверхностью. Тогда координаты точки касания тела с плоскостью можно представить в виде (далее всюду подразумевается

суммирование по повторяющемуся индексу от 1 до 3)

$$\xi_k = -\alpha_k - \rho^{-1}\rho_i^2\Gamma_i c_{ik} \quad (k = 1, 2, 3)$$
$$\rho^2 = \rho_i^2\Gamma_i^2, \quad \Gamma_i = c_{ij}\gamma_j$$

Здесь ρ_i — полуоси эллипсоида поверхности тела, c_{ij} — косинусы углов между его главными осями и главными осями инерции тела $G\xi_j$, $-\alpha_j$ и γ_j — соответственно координаты геометрического центра эллипсоида в главных центральных осях инерции тела и проекции единичного вектора вертикали на эти оси

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \ \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \ \gamma_3 = \cos\theta$$

При этом потенциальная энергия тела примет вид

$$U = mg\,[\alpha_j\gamma_j + (\rho_i^2\Gamma_i^2)^{1/2}]$$

Предположим, что рассматриваемое тело эллипсоидальной формы близко к шару, центр масс которого совпадает с его геометрическим центром, а $I_1 < I_2 < I_3$. Тогда

$$\alpha_k = \mp \varepsilon a_k, \ \rho_k = r + \varepsilon r_k \tag{2.1}$$

При $\varepsilon = 0$ задача интегрируема (см. первый случай интегрируемости). Разложим функцию Гамильтона по степеням параметра ε:

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \ldots$$
$$H_1 = mg\,[a_j\gamma_j + r_i\Gamma_i^2] \tag{2.2}$$

Здесь H_0 с точностью до аддитивной постоянной совпадает с кинетической энергией движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

3. Если все $r_i = 0$, а $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ (тело вырождается в шар, центр масс которого не совпадает с его геометрическим центром), то H_1 имеет вид, аналогичный виду H_1 в случае возмущения классической задачи Эйлера — Пуансо, и согласно [3] при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ уравнения движения рассматриваемого тела не имеют дополнительного аналитического по фазовым переменным первого интеграла.

4. Пусть теперь все $a_j = 0$, $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \neq 0$ (тело эллипсоидальной формы, центр масс которого совпадает с его геометрическим центром). Тогда H_1 — квадратичная форма относительно переменных γ_i и задача сводится к проблеме существования дополнительного интеграла в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в поле с квадратичным потенциалом.

Если все моменты инерции тела различны, то согласно [4] необходимые условия существования дополнительного интеграла в этом случае совпадают с условиями Клебша. Для данной задачи эти условия принимают вид

$$r_i c_{i1} c_{i2} = 0, \ r_i c_{i2} c_{i3} = 0, \ r_i c_{i3} c_{i1} = 0 \tag{4.1}$$
$$I_1 r_i (c_{i2}^2 - c_{i3}^2) + I_2 r_i (c_{i3}^2 - c_{i1}^2) + I_3 r_i (c_{i1}^2 - c_{i2}^2) = 0 \tag{4.2}$$

Соотношения (4.1) представляют собой линейную однородную систему относительно r_1, r_2, r_3. Можно показать, что определитель матрицы

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11}c_{12} & c_{21}c_{22} & c_{31}c_{32} \\ c_{12}c_{13} & c_{22}c_{23} & c_{32}c_{33} \\ c_{13}c_{11} & c_{23}c_{21} & c_{33}c_{31} \end{Vmatrix}$$

равен нулю и, следовательно, система (4.1) имеет нетривиальные решения.

Докажем, что при выполнении условия (4.2) $\operatorname{rank} C = 0$.

Пусть $\operatorname{rank} C = 2$, т. е. эллипсоид инерции и эллипсоид поверхности не имеют общих осей. Общее решение системы (4.1) имеет вид

$$r_1 = r_2 = r_3 = p \tag{4.3}$$

Следовательно, эллипсоид поверхности — сфера, что противоречит предположению об отсутствии общих осей у эллипсоидов инерции и поверхности. (Решение (4.3) обращает уравнение (4.2) в тождество.)

Предположим, что $\operatorname{rank} C = 1$. Можно показать, что в этом случае матрица косинусов углов между главными осями эллипсоидов инерции и поверхности тела с точностью до нумерации и выбора положительных направлений осей имеет вид

$$c_{11} = 1, \ c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{31} = 0$$
$$c_{22} = c_{33} = \cos\delta, \ c_{23} = -c_{32} = -\sin\delta \ (0 < \delta < \pi/2)$$

При этом эллипсоид инерции и эллипсоид поверхности имеют одну общую ось, а две другие оси эллипсоида поверхности повернуты на угол δ относительно соответствующих осей эллипсоида инерции. Такое распределение масс характерно для кельтского камня. В этом случае общее решение системы (4.1) имеет вид

$$r_1 = s, \quad r_2 = r_3 = p$$

а условие (4.2) записывается в виде

$$(I_3 - I_2)(s - p) = 0 \tag{4.4}$$

Так как $I_3 \neq I_2$, то из (4.4) $s = p$ и эллипсоид поверхности, как и в предыдущем случае,— сфера, что противоречит условию $0 < \delta < \pi/2$. Следовательно, rank $C = 0$. При этом оси эллипсоида инерции и эллипсоида поверхности совпадают, условия (4.1) выполняются тождественно, а соотношение (4.2) принимает вид

$$I_1 (r_2 - r_3) + I_2 (r_3 - r_1) + I_3 (r_1 - r_2) = 0 \tag{4.5}$$

Это соотношение заведомо выполнено как в первом, так и во втором случаях интегрируемости, но условия существования дополнительного интеграла в этих случаях ($r_1 = r_2 = r_3$ или $I_1 = I_2$, $r_1 = r_2$) не являются необходимыми для его выполнения. Заметим также, что для однородного тела эллипсоидальной формы соотношение (4.5) не выполняется.

5. В случае произвольного малого возмущения интегрируемой задачи о движении шара, центр масс которого совпадает с его геометрическим центром, в классе тел с эллипсоидальной поверхностью (a_k и r_k в соотношениях (2.1) таковы, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$, $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \neq 0$) необходимые условия существования дополнительного аналитического по фазовым переменным первого интеграла представляют собой комбинации соответствующих условий пп. 3 и 4. Таким образом, доказана

Теорема. Для существования дополнительного аналитического по фазовым переменным первого интеграла в задаче о движении по гладкой плоскости тяжелого твердого тела эллипсоидальной формы, близкого к шару, центр масс которого совпадает с его геометрическим центром, а все моменты инерции различны, необходимо одновременное выполнение трех условий: 1) центр масс эллипсоида совпадает с его геометрическим центром; 2) главные оси эллипсоида инерции и эллипсоида поверхности совпадают; 3) моменты инерции эллипсоида и полуоси его поверхности связаны соотношением

$$I_1 (\rho_2 - \rho_3) + I_2 (\rho_3 - \rho_1) + I_3 (\rho_1 - \rho_2) = 0$$

Более интересен и существенно более сложен вопрос о существовании дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении тела произвольной формы, близкого к шару, центр масс которого совпадает с его геометрическим центром. При этом уже в первом приближении по малому параметру потенциал может представлять собой, вообще говоря, произвольную функцию направляющих косинусов γ_1, γ_2, γ_3 в отличие от функции H_1 (2.2), представляющей сумму линейной и квадратичной форм переменных γ_1, γ_2, γ_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Карапетян А. В.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости.— ПММ, 1981, т. 45, № 3, с. 504—511.
3. *Зиглин С. Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1980, т. 41, с. 287—303.
4. *Козлов В. В., Онищенко Д. А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1298—1300.

Москва

Поступила в редакцию
24.IV.1984