

УДК 539.375

СИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРЕЩИН, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

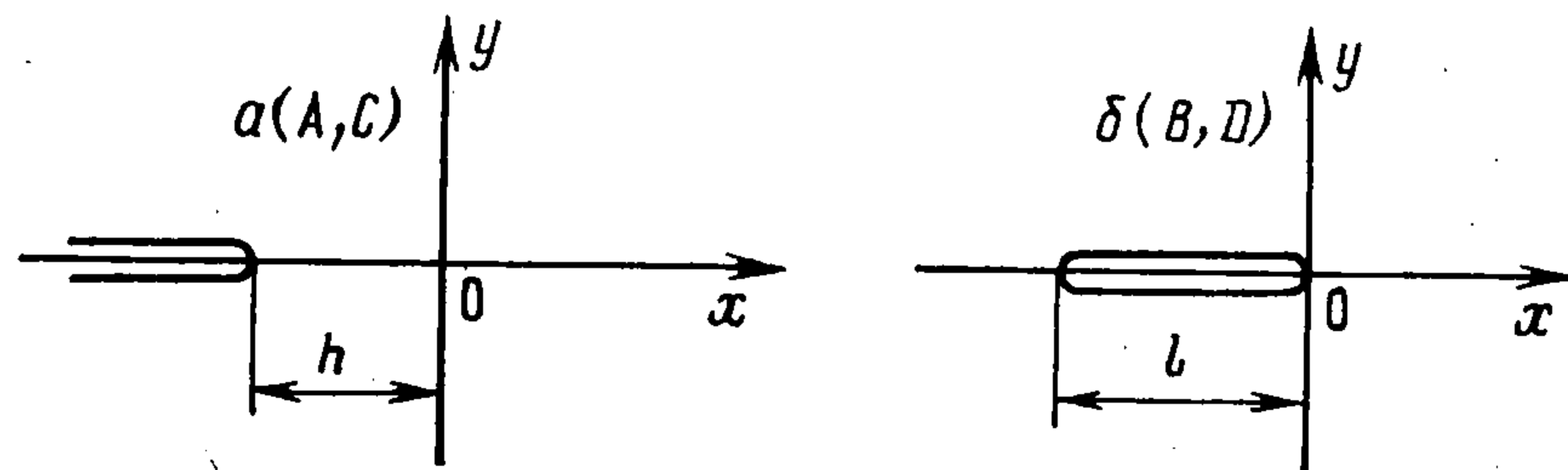
Жеков Н. Д., Кулиев В. Д.

Методом Винера — Хопфа строятся точные решения задач о трещинах, перпендикулярных плоской границе раздела двух различных, однородных, изотропных упругих сред. Решения строятся для следующих случаев: полубесконечная трещина с вершиной, расположенной на конечном расстоянии от границы раздела (трещина нормального разрыва — задача *A*, трещина продольного сдвига — задача *C*); трещина конечной длины с одной из вершин, лежащей на границе раздела (трещина нормального разрыва — задача *B*, трещина продольного сдвига — задача *D*).

Решение задачи *B* было построено ранее [1]. Ниже используется другой метод факторизации [2—5], что позволило сравнительно легко построить решение задачи *B*, а также задач *A*, *C*, *D*.

1. Постановка задач. Пусть два изотропных, однородных, упругих полупространства с различными упругими свойствами жестко сцеплены одно с другим вдоль плоскости $x = 0$. На расстоянии h от границы раздела вдоль отрицательной полуоси x расположена трещина длиной l . Эта задача для тела с конечными линейными размерами была решена [6] методом конечных элементов. Ниже описываются два предельных случая этой задачи:

- а) $l \rightarrow \infty$ (задачи *A*, *C* — для трещин нормального разрыва и продольного сдвига соответственно, фигура, *a*);
- б) $h \rightarrow 0$ (задачи *B*, *D* — также для трещин нормального разрыва и продольного сдвига соответственно, фигура, *b*).



Считается, что в левой полуплоскости (для $x < 0$) заданы значения упругих постоянных E_1, ν_1 для первого материала и в правой полуплоскости (для $x > 0$) E_2, ν_2 для второго материала.

Граничные условия для задач *A* и *B*

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \theta = \pm\pi/2, [u_\theta] = [u_r] = 0, [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = 0 \\ \theta = 0, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0 \\ \theta = \pm\pi, \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned}$$

Кроме (1.1) имеем

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \theta = \pm\pi, 0 < r < h, u_\theta = 0 \\ r > h, \sigma_\theta = 0 \text{ для задачи } A \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \theta = \pm\pi, 0 < r < l, \sigma_y(x) = -\sigma(x) \\ r > l, u_\theta = 0 \text{ для задачи } B \end{aligned}$$

Граничные условия для задач *C* и *D*

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \theta = \pm\pi/2, [\sigma_{\theta z}] = 0, [w] = 0 \\ \theta = 0, w = 0 \end{aligned}$$

Кроме (1.4) имеем также

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \theta = \pm\pi, r > h, \sigma_{\theta z} = 0 \\ 0 < r < h, w = 0 \text{ для задачи } C \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \theta = \pm\pi, 0 < r < l, \sigma_{\theta z} = \tau(x) \\ r > l, w = 0 \text{ для задачи } D \end{aligned}$$

Кроме условий (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) для задач *A* и *C* зададим условие при $r \rightarrow \infty$. Очевидно, что при $h \rightarrow 0$ приходим к задаче Зака — Вильямса [7]. При $h \neq 0$ точное решение Зака — Вильямса должно реализовываться как заданная асимптотика при $r \rightarrow \infty$.

Для задачи *A* имеем [2,7]

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta} &= K^{\circ} [(2 + \lambda) \cos \lambda\theta + B \cos (2 + \lambda)\theta] \\ \sigma_r &= K^{\circ} [(2 - \lambda) \cos \lambda\theta - B \cos (2 + \lambda)\theta] \\ \tau_{r\theta} &= K^{\circ} [\lambda \sin \lambda\theta + B \sin (2 + \lambda)\theta], \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} &= -K^{\circ} \frac{(1 - \nu_1)}{2\mu_1} \sin \lambda\pi \frac{B(3 + 2\lambda) - (2\lambda^2 + 5\lambda + 2)}{\lambda(2 + \lambda) + \sin^2 \lambda\pi/2}, \quad \pi/2 < \theta < \pi \\ B &= \frac{1}{1 + k_1} [(2 + 3\lambda)k_1 - (1 + 2\lambda)k_2 + 1 + \lambda] \\ k_1 &= \frac{k - 1}{4(1 - \nu_1)}, \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2}{1 - \nu_1} k, \quad k = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad K^{\circ} = K_I \frac{(1 + \lambda)r^{\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Для задачи *C*

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta z} &= K_{III}^{\circ} \cos(\delta + 1)\theta, \quad \sigma_{rz} = K_{III}^{\circ} \sin(\delta + 1)\theta, \quad |\theta| < \pi/2 \\ w &= K_{III} \frac{r^{\delta+1}}{\mu_1 \sqrt{2\pi}(\delta + 1)}, \quad \theta = \pi \\ K_{III}^{\circ} &= K_{III} \frac{r^{\delta}}{\sqrt{2\pi k}} \end{aligned}$$

Здесь K_I, K_{III} — коэффициенты интенсивности напряжений, для этих задач они считаются заданными, $\sigma_{\theta}, \sigma_r, \tau_{r\theta}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}$ — напряжения, ν и μ — коэффициент Пуассона и модуль сдвига, λ — единственный действительный корень уравнения

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \cos \pi\lambda &= a + b(\lambda + 1)^2 \\ \left(a = \frac{2k_1^2 - 2k_1k_2 + 2k_1 - k_2 + 1}{2(k_2 - k_1)(k_1 + 1)}, \quad b = \frac{2k_1}{k_1 + 1} \right) \end{aligned}$$

лежащий в интервале $(-1, 0)$. Степень сингулярности напряжений δ определяется формулой

$$(1.10) \quad \delta = -2\pi^{-1} \arctg \sqrt{k} \quad (-1 < \delta < 0)$$

Для задач *B* и *D* напряжения стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$.

Искомые решения задач теории упругости должны удовлетворять граничным условиям (1.1)–(1.6) и условиям на бесконечности. Вблизи концов трещин должна реализовываться соответствующая асимптотика ($\varepsilon \ll 1$):

для задачи *A*

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta}(r, \pi) &= \frac{k_I}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}, \quad \varepsilon = 1 - r \\ \frac{\partial u_{\theta}(r, \pi)}{\partial r} &= -\frac{2(1 - \nu_1^2)k_I}{E_1 \sqrt{2\pi\varepsilon}}, \quad \varepsilon = r - 1 \end{aligned}$$

(K_I — коэффициент интенсивности напряжений, подлежащий определению);

для задачи C

$$(1.12) \quad \sigma_{\theta z} = -\frac{k_{III}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}, \quad \varepsilon = 1 - r$$

$$\frac{\partial w(r, \pi)}{\partial r} = \frac{k_{III}}{\mu_1 \sqrt{2\pi\varepsilon}}, \quad \varepsilon = r - 1$$

Для задач B и D вблизи вершины трещины, находящейся на границе, должна реализовываться соответствующая асимптотика для трещин, перпендикулярных границе раздела: для задачи B в качестве асимптотики в вершине трещины принимаются зависимости (1.7), а для задачи D — (1.8); для другой вершины трещины, не лежащей на границе, принимаются зависимости (1.11) в задаче B и (1.12) в задаче D .

2. Вывод уравнений Винера — Хопфа. Задачи A и B . Применяя интегральное преобразование Меллина [8] к уравнениям равновесия и сплошности плоской задачи теории упругости, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка [8], решение которого ищем в виде

$$(2.1) \quad \sigma_{\theta}^*(p, \theta) = A_1 \cos(p+1)\theta + A_2 \cos(p-1)\theta +$$

$$+ A_3 \sin(p+1)\theta + A_4 \sin(p-1)\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\sigma_{\theta}^*(p, \theta) = B_1 \cos(p+1)\theta + B_2 \cos(p-1)\theta +$$

$$+ B_3 \sin(p+1)\theta + B_4 \sin(p-1)\theta, \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi$$

(A_i, B_i — неизвестные функции параметра p). Функции σ_r^* и $\tau_{r\theta}^*$ выражаются через σ_{θ}^* так:

$$(2.2) \quad \tau_{r\theta}^* = \frac{1}{p-1} \frac{d\sigma_{\theta}^*}{d\theta}, \quad p\sigma_r^* = \frac{1}{p-1} \frac{d^2\sigma_{\theta}^*}{d\theta^2} - \sigma_{\theta}^*$$

Применяя к закону Гука преобразование Меллина, получим

$$(2.3) \quad \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^* = \frac{1+\nu_j}{E_j} [(1-\nu_j)\sigma_r^* - \nu_j\sigma_{\theta}^*]$$

$$\left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r}\right)^* = \frac{1+\nu_j}{E_j(p+1)} \left[2p\tau_{r\theta}^* + (1-\nu_j)\frac{d\sigma_r^*}{d\theta} - \nu_j\frac{d\sigma_{\theta}^*}{d\theta} \right], \quad j=1, 2$$

При помощи (2.1)–(2.3), (1.1) получим систему уравнений относительно A_i, B_i . Решение этой системы запишем в виде

$$(2.4) \quad A_3 = A_4 = 0$$

$$A_1 = B_3 (k_1 + 1) [k_1 (k_1 - k_2) (2p + 1) \sin p\pi]^{-1}$$

$$B_1 = B_3 [2k_1 (p \cos p\pi - \sin^2 p\pi/2) - 1] [k_1 (2p + 1) \sin p\pi]^{-1}$$

$$A_2 = B_3 [(k_1 - k_2) (2p + 1) + p (k_1 + 1)] [\Delta(p) \sin p\pi]^{-1}$$

$$B_2 = B_3 [2k_1 (k_1 - k_2) (p + 1) (p \cos p\pi + \sin^2 p\pi/2) -$$

$$- (k_1 + 1) \cos p\pi + (k_1 - k_2) (p + 2 \sin^2 p\pi/2)] [\Delta(p) \sin p\pi]^{-1}$$

$$B_4 = B_3 \{ (k_1 - k_2) [k_1 p (2p + 1) - (k_1 + 1)] - (k_1 + 1) \} [\Delta(p)]^{-1}$$

$$\Delta(p) = k_1 (k_1 - k_2) (2p + 1) (p - 1)$$

Согласно (1.2) и (2.1)–(2.4), приходим к однородному функциональному уравнению Винера—Хопфа для задачи A

$$(2.5) \quad (p + \lambda + 1) \Phi_A^+(p) = \frac{1}{2} G_A(p) K_A(p) \Phi_A^-(p)$$

$$(2.6) \quad \Phi_A^+(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_1^{\infty} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial s}\right)_{\theta=\pi} s^p ds$$

$$\begin{aligned}
\Phi_A^-(p) &= \int_0^1 (\sigma_\theta)_{\theta=\pi} s^p ds \\
G_A(p) &= \operatorname{ctg} p \frac{\pi}{2} \sin^2 p \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} (p + \lambda + 1) \pi [\gamma(p)]^{-1} \\
K_A(p) &= (p + \lambda + 1) \operatorname{ctg} (p + \lambda + 1) \pi \\
(2.7) \quad \gamma(p) &= \sin^2 p \frac{\pi}{2} - p^2 \frac{k_1}{k_1 + 1} - \frac{k_2 + 1}{4(k_1 + 1)(k_2 - k_1)}
\end{aligned}$$

Функция $\Phi_A^-(p)$ аналитична в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > -1$, а функция $\Phi_A^+(p)$ аналитична в левой полуплоскости $\operatorname{Re} p < -(\lambda + 1)$.

Аналогично (2.5) получаем, используя (1.3), уравнение Винера—Хопфа для задачи *B*

$$(2.8) \quad \left(\frac{p}{\lambda + 1} + 1\right) \Phi_B^-(p) = G_B(p) K_B(p) [F_B(p) + \Phi_B^+(p)]$$

Здесь

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad \Phi_B^-(p) &= \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)_{\theta=\pi} s^p ds, \quad \Phi_B^+(p) = \int_1^\infty (\sigma_\theta)_{\theta=\pi} s^p ds \\
G_B(p) &= \operatorname{ctg} p \frac{\pi}{2} \sin^2 p \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{p}{\lambda + 1} + 1\right) \frac{\pi}{2} [\gamma(p)]^{-1} \\
K_B(p) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda + 1} + 1\right) \operatorname{ctg} \left(\frac{p}{\lambda + 1} + 1\right) \frac{\pi}{2}, \quad F_B(p) = \int_0^1 \sigma_\nu(s) s^p ds
\end{aligned}$$

Функция $\Phi_B^-(p)$ аналитична в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > -(\lambda + 1)$, $\Phi_B^+(p)$ — при $\operatorname{Re} p < 0$.

Задачи C и D. Уравнения Винера — Хопфа для задач *C* и *D* получаются аналогично предыдущему. Применяя интегральное преобразование Меллина к соотношениям теории упругости для сложного сдвига [5], получаем дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого ищем в виде

$$\begin{aligned}
(2.10) \quad W &= A_1 \cos p\theta + A_2 \sin p\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\
W &= B_1 \cos p\theta + B_2 \sin p\theta, \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi \\
W &\equiv \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^* = \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial r} r^p dr
\end{aligned}$$

Здесь A_i, B_i — функции p , подлежащие определению. Функции $\sigma_{r_3}^*(p, \theta), \sigma_{\theta_3}^*(p, \theta)$ выражаются через $W(p, \theta)$ так:

$$(2.11) \quad \sigma_{r_3}^* = \mu_j W, \quad \sigma_{\theta_3}^* = -\frac{\mu_j}{p} \frac{dW}{d\theta}$$

Из условий (1.4) получаем систему уравнений, решение которой будет

$$\begin{aligned}
(2.12) \quad A_1 &= 0, \quad A_2 = B_1 \frac{2k}{(k-1) \sin p\pi} \\
B_2 &= 2B_1 (k \sin^2 p\pi/2 + \cos^2 p\pi/2) [(k-1) \sin p\pi]^{-1}
\end{aligned}$$

Используя далее условия (1.5), получаем уравнение Винера—Хопфа задачи *C*

$$(2.13) \quad K_C(p) \Phi_C^-(p) = (p + \delta + 1) G_C(p) \Phi_C^+(p)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
(2.14) \quad \Phi_C^-(p) &= \int_0^1 (\sigma_{\theta_3})_{\theta=\pi} s^p ds, \quad \Phi_C^+(p) = \mu_1 \int_1^\infty \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_{\theta=\pi} s^p ds \\
G_C(p) &= \frac{(k \operatorname{tg}^2 p\pi/2 - 1) \operatorname{ctg} (p + \delta + 1)}{(k + 1) \operatorname{tg} p\pi/2} \\
K_C(p) &= (p + \delta + 1) \operatorname{ctg} (p + \delta + 1) \pi
\end{aligned}$$

Функция $\Phi_C^+(p)$ аналитична в левой полуплоскости $\operatorname{Re} p < -\delta - 1$, а $\Phi_C^-(p)$ — при $\operatorname{Re} p > -1$.

Задача D. Вводя функции

$$(2.15) \quad \Phi_D^-(p) = \mu_1 \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_{\theta=\pi} s^p ds, \quad \Phi_D^+(p) = \int_1^\infty (\sigma_{\theta 3})_{\theta=\pi} s^p ds$$

получим из (1.6)

$$(2.16) \quad K_D(p) [\Phi_D^+(p) + F_D(p)] = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\delta+1} + 1 \right) G_D(p) \Phi_D^-(p)$$

Здесь

$$(2.17) \quad G_D = \left(k \operatorname{tg}^2 p \frac{\pi}{2} - 1 \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{p}{\delta+1} - 1 \right) \frac{\pi}{2} \left[(k+1) \operatorname{tg} p \frac{\pi}{2} \right]^{-1}$$

$$K_D(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\delta+1} + 1 \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{p}{\delta+1} + 1 \right) \frac{\pi}{2}, \quad F_D(p) = \int_0^1 \tau(s) s^p ds$$

Функции $\Phi_D^+(p)$ и $\Phi_D^-(p)$ аналитичны при $\operatorname{Re} p < 0$ и $\operatorname{Re} p > -\delta - 1$ соответственно.

3. Решение краевых задач. *Задача A.* Уравнение Винера — Хопфа (2.5) имеет место в полосе $-1 < \operatorname{Re} p < -(\lambda + 1)$, $-\infty < \operatorname{Im} p < \infty$. Функция $G_A(p)$ обладает следующими свойствами: она регулярна и не имеет нулей в полосе $-1 < \operatorname{Re} p \leq -(\lambda + 1)$, если $k < 1$; при $k > 1$ функция $G_A(p)$ регулярна и не имеет нулей в полосе $-(\lambda + 3/2) < \operatorname{Re} p \leq -(\lambda + 1)$; при $\operatorname{Im} p \rightarrow \pm\infty$ $\operatorname{Re} p = -\lambda - 1$, $G_A(p) \rightarrow 1$; функция $\gamma(p)$ имеет нуль первого порядка в точке $p = -(\lambda + 1)$; нуль этой функции является корнем характеристического уравнения (1.9).

Обозначим области, находящиеся слева и справа от контура L_A (L_A : $\operatorname{Re} p = -(\lambda + 1)$, $-\infty < \operatorname{Im} p < \infty$), соответственно D^+ и D^- . Функцию $G_A(p)$ можно представить в виде [9, 10]

$$(3.1) \quad G_A(p) = G_A^+(p)/G_A^-(p)$$

$$(3.2) \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_A} \frac{\ln G_A(p)}{t-p} dt \right] = \begin{cases} G_A^+(p), & p \in D^+ \\ G_A^-(p), & p \in D^- \end{cases}$$

В (3.1) функции G_A^+ и G_A^- аналитичны и не имеют нулей в областях D^+ и D^- соответственно, причем при $p \rightarrow \infty$ они стремятся к единице. Для факторизации функции $K_A(p)$ воспользуемся следующим представлением:

$$(3.3) \quad K_A(p) = K_A^+(p)K_A^-(p)$$

$$K_{A^\pm}(p) = \frac{\Gamma[1 \mp (p + \lambda + 1)]}{\Gamma[1/2 \mp (p + \lambda + 1)]}$$

Здесь $\Gamma(p)$ — гамма-функция.

Функция $K_A^+(p)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Re} p < -(\lambda + 1/2)$, а функция $K_A^-(p)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Re} p > -(\lambda + 3/2)$. Кроме того

$$(3.4) \quad K_{A^\pm}(p) \sim \sqrt{\mp p} + o(1) \text{ при } p \rightarrow \infty$$

Используя представления (3.2), (3.3) для (2.5), получим

$$(3.5) \quad \frac{(p + \lambda + 1) \Phi_A^+(p)}{K_A^+(p) G_A^+(p)} = \frac{1}{2} \frac{K_A^-(p)}{G_A^-(p)} \Phi_A^-(p)$$

Левая часть этого равенства аналитична в D^+ , а правая — в D^- . Согласно принципу аналитического продолжения, эти части равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости. Для определения

этой функции найдем поведение левой и правой частей (3.5) при $p \rightarrow \infty$. Изучим поведение искомым $\Phi_A^+(p)$ и $\Phi_A^-(p)$ при $p \rightarrow \infty$. По теореме абелева типа [10], используя (1.11), находим при $p \rightarrow \infty$

$$(3.6) \quad \Phi_A^-(p) \sim \frac{k_1}{\sqrt{2p}}, \quad \Phi_A^+(p) \sim -\frac{k_1}{2\sqrt{-2p}}$$

С учетом (3.2), (3.5) получаем

$$(3.7) \quad \Phi_A^-(p) = \frac{k_1 G_A^-(p)}{\sqrt{2} K_A^-(p)}, \quad \Phi_A^+(p) = \frac{k_1 K_A^+(p) G_A^+(p)}{2\sqrt{2}(p + \lambda + 1)}$$

В решение (3.7) входит параметр k_1 , который должен определяться из условия (1.7).

Используя (1.7), в силу теоремы абелева типа имеем ($p \rightarrow -\lambda - 1$)

$$(3.8) \quad \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^* = K_1 \frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1 \sqrt{2\pi}} \frac{(\lambda + 1) \sin \lambda\pi [B(3 + 2\lambda) - (2\lambda^2 + 5\lambda + 2)]}{[\lambda(2 + \lambda) + \sin^2 \lambda\pi/2] (p + \lambda + 1)}$$

С другой стороны, из (3.7) получаем

$$(3.9) \quad \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^* = k_1 \frac{2(1 - \nu_1^2)}{E_1 \sqrt{2\pi}} \frac{G_A^+(-\lambda - 1)}{(p + \lambda + 1)}$$

Сравнивая (3.8) и (3.9) и переходя к размерным переменным, находим

$$(3.10) \quad K_{I(A)} = K_1 \frac{(\lambda + 1) \sin \lambda\pi [B(3 + 2\lambda) - (2\lambda^2 + 5\lambda + 2)] h^{\lambda+1/2}}{2[\lambda(2 + \lambda) + \sin^2 \lambda\pi/2] G_A^+(-\lambda - 1)}$$

Задача В. Уравнение Винера — Хопфа задачи В (2.8) определено в полосе $-\lambda - 1 < \operatorname{Re} p < 0$. Функция $G_B(p)$ (2.9) имеет следующие свойства: она регулярна и не имеет нулей в полосе определения уравнения, а при $\operatorname{Im} p \rightarrow \pm\infty$ $G_B(p) \rightarrow 1$, при этом, как было указано, $\gamma(p)$ имеет нуль первого порядка в точке $p = -(\lambda + 1)$. Обозначим области, находящиеся справа и слева от контура L_B ($L_B: -(\lambda + 1) \leq \operatorname{Re} p \leq 0, -\infty < \operatorname{Im} p < \infty$), через D^- и D^+ . Тогда G_B можно представить в виде [9, 10]:

$$(3.11) \quad G_B(p) = G_B^+(p)/G_B^-(p)$$

Здесь $G_B^+(p)$ и $G_B^-(p)$ получаются аналогично $G_A^\pm(p)$, но с использованием $G_B(p)$ и учетом L_B . Функция $K_B(p)$ аналогично (3.3) представляется в виде

$$(3.12) \quad K_B(p) = K_B^+(p)K_B^-(p) \\ K_B^\pm(p) = \Gamma \left[1 \mp \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\lambda + 1} + 1 \right) \right] \left(\Gamma \left[\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\lambda + 1} + 1 \right) \right] \right)^{-1}$$

Используя (3.11), (3.12), получим из (2.8)

$$(3.13) \quad \left(\frac{p}{\lambda + 1} + 1\right) \frac{\Phi_B^- G_B^-(p)}{K_B^-(p)} = F_B(p) K_B^+(p) G_B^+(p) + \\ + K_B^+(p) G_B^+(p) \Phi_B^+(p)$$

Пусть функция

$$(3.14) \quad \Psi_B(p) = F_B(p) K_B^+(p) G_B^+(p)/p$$

такова, что

$$(3.15) \quad \Psi_B(p) = \Psi_B^+(p) - \Psi_B^-(p)$$

$$(3.16) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{L_B} \frac{F_B(t) K_B^+(t) G_B^+(t)}{t(t-p)} dt = \begin{cases} \Psi_B^+(p), & p \in D^+ \\ \Psi_B^-(p), & p \in D^- \end{cases}$$

$$(3.17) \quad \frac{p + \lambda + 1}{p(\lambda + 1)} \frac{\Phi_B^-(p) G_B^-(p)}{K_B^-(p)} + \Psi_B^-(p) = \\ = \Psi_B^+(p) + \frac{K_B^+(p) G_B^+(p) \Phi_B^+(p)}{p} \quad (p \in L_B)$$

Из (1.1) следует, что $\Phi_B^-(p)$ имеет нуль первого порядка в точке $p = 0$, таким образом, левая и правая части в (3.17) представляют собой аналитические функции в D^- и D^+ соответственно. Используя теорему Лиувилля, получаем

$$(3.18) \quad \Phi_B^-(p) = -\frac{p(\lambda+1)\Psi_B^-(p)K_B^-(p)}{(p+\lambda+1)G_B^-(p)}, \quad \Phi_B^+(p) = -\frac{p\Psi_B^+(p)}{K_B^+(p)G_B^+(p)}$$

Для получения коэффициента интенсивности напряжений на правом конце трещины воспользуемся ранее найденной асимптотикой (3.9) (сменился знак). Выделяя из $\partial u_\theta/\partial r$ $\Phi_B^-(p)$ по (2.9) и сравнивая с (3.18), получаем, переходя к размерным переменным

$$(3.19) \quad K_{I(B)} = -\frac{4\sqrt{2}[\lambda(2+\lambda) + \sin^2\lambda\pi/2]}{l^\lambda \sin\lambda\pi [B(3+2\lambda) - (2\lambda^2 + 5\lambda + 2)]} \Psi_B^-(-\lambda-1)$$

Здесь

$$(3.20) \quad \Psi_B^-(-\lambda-1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_B^*} \frac{\Psi_B(t)}{t+\lambda+1} dt$$

($L_B^* : \operatorname{Re} p = -\lambda - 1, -\infty < \operatorname{Im} p < \infty$; точка $p = -\lambda - 1$ обходится слева по полуокружности малого радиуса с центром в этой точке).

Определим коэффициент интенсивности напряжений на левом конце трещины. По теореме абелева типа [10] на основании (1.14)

$$(3.21) \quad \Phi_B^-(p) \sim \frac{k_I}{2\sqrt{2p}} \quad (p \rightarrow \infty)$$

С другой стороны, при $p \rightarrow \infty$ из (3.18) имеем

$$(3.22) \quad \Phi_B^-(p) = \frac{\sqrt{\lambda+1}}{\sqrt{2p}} g_B(\sigma) \quad (p \rightarrow \infty)$$

Здесь

$$(3.23) \quad g_B(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} K_B^+(t) G_B^+(t) F_B(t) dt$$

Сравнивая (3.22) и (3.21), получаем, переходя к размерным переменным

$$(3.24) \quad k_{I(B)} = -2\sqrt{l(1+\lambda)} g_B(\sigma)$$

Задачи C и D. Для задачи C факторизация уравнения Винера — Хопфа (2.13) проводится аналогично факторизации в задаче A. В результате получаем

$$(3.25) \quad \Phi_C^-(p) = -\frac{k_{III(C)}}{\sqrt{2} K_C^-(p) G_C^-(p)}$$

$$\Phi_C^+(p) = -\frac{k_{III(C)} K_C^+(p)}{\sqrt{2}(p+\delta+1) G_C^+(p)}, \quad K_C^\pm(p) = \frac{\Gamma[1 \mp (p+\delta+1)]}{\Gamma[1/2 \mp (p+\delta+1)]}$$

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_C} \frac{G_C(t)}{t-p} dt\right] = \begin{cases} G_C^+(p), & p \in D^+ \\ G_C^-(p), & p \in D^- \end{cases}$$

из (1.8) по теореме абелева типа [10] аналогично задаче A получаем связь K_{III} и $k_{III(C)}$

$$(3.26) \quad k_{III(C)} = K_{III} G_C^+(-\delta-1) h^{\delta+1/2}$$

В результате факторизации уравнения Винера — Хопфа (2.16) задачи D, проведенной аналогично факторизации уравнения (2.8) задачи B, по-

лучаем

$$(3.27) \quad \Phi_D^+(p) = -\frac{p\Psi_D^+(p)G_D^+(p)}{K_D^+(p)},$$

$$\Phi_D^-(p) = -\frac{2p(\delta+1)K_D^-(p)G_D^-(p)\Psi_D^-(p)}{(p+\delta+1)}$$

$$(3.28) \quad \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_D} \frac{\ln G_D(t)}{t-p} dt\right] = \begin{cases} G_D^+(p), & p \in D^+ \\ G_D^-(p), & p \in D^- \end{cases}$$

$$(L_D: -\delta-1 \leq \operatorname{Re} p < 0, -\infty \leq \operatorname{Im} p < \infty)$$

$$K_D^\pm(p) = \Gamma\left[1 \mp \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\delta+1} + 1\right)\right] \left(\Gamma\left[\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\delta+1} + 1\right)\right]\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_D} \frac{F_D(t)K_D^+(t)}{t(t-p)G_D^+(t)} dt = \begin{cases} \Psi_D^+(p), & p \in D^+ \\ \Psi_D^-(p), & p \in D^- \end{cases}$$

Далее, используя (1.8), получаем для правой вершины

$$(3.29) \quad K_{III(D)} = 2\sqrt{2}(\delta+1)^2 l^{-\delta} \Psi_D^-(-\delta-1) G_D^-(-\delta-1)$$

$$\Psi_D^-(-\delta-1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_D^*} \frac{F_D(t)K_D^+(t)}{t(t+\delta+1)G_D^+(t)} dt$$

(контур L_D^* совпадает с L_B^* , если формально заменить λ на δ).

На основании (1.12) для левой вершины трещины получаем в размерных переменных

$$(3.30) \quad k_{III(D)} = -2\sqrt{(\delta+1)l} g_D(\tau), \quad g_D(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{F_D(t)K_D^+(t)}{tG_D^+(t)} dt$$

4. Анализ полученных решений. Рассмотрим частные случаи общих решений для задач A, B, C, D .

Пусть $k = 1, k_2 = 1$. Тогда из (3.10) находим

$$k_{I(A)} = K_I$$

Пусть $k = 1, k_2 = 1, \sigma(x) = \sigma \equiv \text{const}$. Тогда из (3.19), (3.24) получаем

$$k_{I(B)} = K_{I(B)} = \sigma\sqrt{\pi l/2}$$

Аналогично для задач C и D находим при $k = 1, k_2 = 1$ из (3.26) для задачи C

$$k_{III(C)} = K_{III}$$

и для задачи D из (3.29) и (3.30) при $\tau(x) = \tau \equiv \text{const}$

$$k_{III(D)} = K_{III(D)} = \tau\sqrt{\pi l/2}$$

Заметим, что в работах [11, 12] решение задачи B при помощи интегральных преобразований Меллина и Фурье сведены к сингулярным интегральным уравнениям первого рода с ядром Коши. Численные методы решения аналогичных задач при помощи интегральных уравнений развиты в работах [13–15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Храпков А. А. Первая основная задача для кусочно-однородной плоскости с разрезом, перпендикулярным прямой раздела.— ПММ, 1968, т. 32, вып. № 4, с. 647–659.
2. Кулиев В. Д., Работнов Ю. Н., Черепанов Г. П. О торможении трещины на границе раздела различных упругих сред.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4, с. 120.
3. Кулиев В. Д. Трещина с конечным ответвлением в кусочно-однородной упругой среде.— Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 6, с. 1330.
4. Кулиев В. Д. Преломление трещины продольного сдвига.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 2, с. 315.
5. Кулиев В. Д. Некоторые задачи о ветвлении трещины сдвига в кусочно-однородной упругой среде.— Докл. АН АзССР, 1979, т. 35, № 9, с. 17.
6. Leverenz R. K. A finite element stress analysis of crack in a Bi-material plate.— Internat. J. Fract. Mech., 1972, v. 8, No. 3, p. 311.

7. *Zak A. L., Williams M. L.* Crack point stress singularities at a Bi-material interface.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, v. 30, No. 1, p. 142.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
10. *Нобл Б.* Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
11. *Ashbaugh N. E.* On the opening of a finite crack normal to an interface.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1973, v. 40, No. 2, p. 626—628.— Рус. перев.:— Прикл. механика, сер. Е. Тр. Амер. о-ва инж.-механ. 1973, т. 40, № 2, с. 312—314.
12. *Goree J. G., Venezia W. A.* Bonded elastic half-planes with an interface crack and a perpendicular intersecting crack that extends into the adjacent material. I, II.— Internat. J. Engng Sci., 1977, v. 15, No. 1, p. 1—17; p. 19—27.
13. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.* Numerical solution of singular integral equations.— In: Mechanics of fracture. V. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden: Noordhoff Int. Publ. Co., 1973, p. 368—425.
14. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
15. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 371 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.X.1983