

УДК 539.375

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ЭЛЕКТРОДОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Кокунов В. А., Кудрявцев Б. А., Сеник Н. А.

На основании статических уравнений электроупругости изучается напряженное состояние и распределение электрических полей в пьезоэлектрическом слое, на поверхностях которого имеется периодическая система бесконечно тонких электродов. Предполагается, что материал слоя — пьезоэлектрик класса симметрии  $6mm$  и ось симметрии перпендикулярна срединной поверхности слоя. С учетом периодичности системы электродов механические смещения и электрический потенциал определяются в форме тригонометрических рядов, а граничные электрические и механические условия на поверхностях слоя приводят к парным рядовым уравнениям, из решения которых получено выражение для плотности распределения электрических зарядов на каждом электроде. Представлены формулы для определения электрического потенциала на поверхностях слоя между электродами и механических напряжений в окрестности края электрода. Показано, что нормальные напряжения на поверхности слоя имеют особенность у края электрода [1], наличие которой может привести к появлению микротрещин в этой зоне.

1. Рассмотрим плоскую деформацию пьезоэлектрического слоя  $|z| < h$ ,  $|x| < \infty$ , возникшую под действием разности электрического потенциала на периодической системе электродов с электрическими потенциалами  $V_0$  и  $-V_0$  на верхней  $z = h$  и нижней  $z = -h$  гранях слоя (фиг. 1). Для пьезоэлектрика класса  $6mm$ , ось симметрии которого совпадает с осью  $z$ , компоненты напряжений и электрической индукции определяются по формулам

$$(1.1) \quad \sigma_{xx} = c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \sigma_{zz} = c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\sigma_{zx} = c_{44} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$(1.2) \quad D_x = e_{15} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \epsilon_{11}^S \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad D_z = e_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial w}{\partial z} - \epsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Здесь  $c_{11}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{44}$  — модули упругости,  $e_{31}$ ,  $e_{33}$ ,  $e_{15}$  — пьезоэлектрические модули,  $\epsilon_{11}^S$ ,  $\epsilon_{33}^S$  — диэлектрические постоянные,  $u$ ,  $w$  — составляющие вектора смещений в направлении осей  $x$  и  $z$  соответственно,  $\varphi$  — электрический потенциал.

Механические смещения  $u$ ,  $w$  и электрический потенциал определяются из системы уравнений равновесия и электростатики, которую с учетом уравнений (1.1) и (1.2) можно записать в виде

$$(1.3) \quad \begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} &= 0 \\ (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 0 \\ (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + e_{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \epsilon_{11}^S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \epsilon_{33}^S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

Учитывая симметрию электроупругого состояния относительно плоскости  $z = 0$  и периодичность функций  $u(x, z)$ ,  $w(x, z)$ ,  $\varphi(x, z)$  по координате  $x$

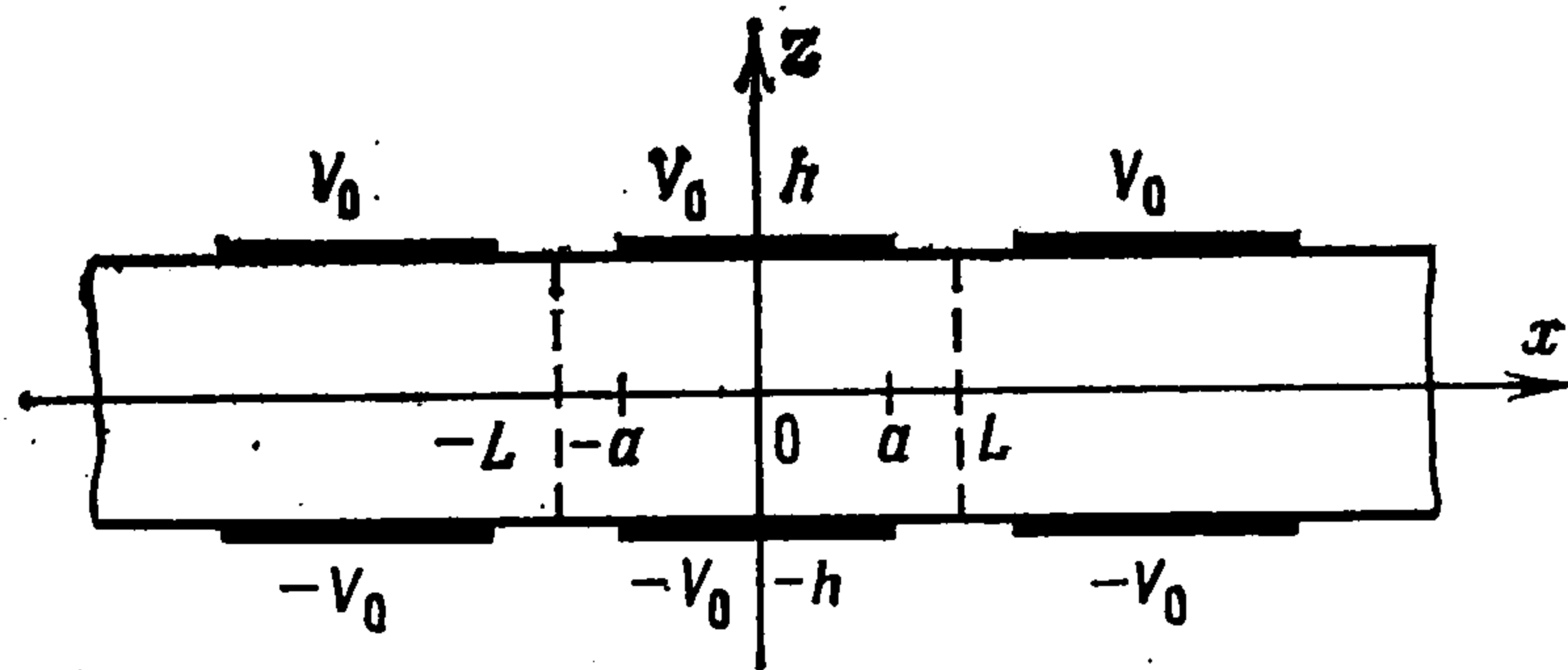
нате  $x$ , представим решение системы (1.3), удовлетворяющее условиям

$$w(x, 0) = \varphi(x, 0) = \sigma_{zx}(x, 0) = 0$$

в форме рядов

$$(1.4) \quad u(x, z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_1 A_{1n} \operatorname{ch}(k_1 \lambda_n z) + (\alpha_{21} B_{1n} - \alpha_{22} C_{1n}) \operatorname{ch}(\delta \lambda_n z) \times \\ \times \cos(\omega \lambda_n z) - (\alpha_{22} B_{1n} + \alpha_{21} C_{1n}) \operatorname{sh}(\delta \lambda_n z) \sin(\omega \lambda_n z)] \sin \lambda_n x \\ w(x, z) = W_0 z + 2 \Sigma_{\beta}, \quad \varphi(x, z) = \Phi_0 z - 2 \Sigma_{\gamma} \\ \Sigma_{\kappa} = \sum_{n=1}^{\infty} [-\kappa_1 A_{1n} \operatorname{sh}(k_1 \lambda_n z) - (\kappa_{21} B_{1n} - \kappa_{22} C_{1n}) \operatorname{sh}(\delta \lambda_n z) \cos(\omega \lambda_n z) + \\ + (\kappa_{22} B_{1n} + \kappa_{21} C_{1n}) \operatorname{ch}(\delta \lambda_n z) \sin(\omega \lambda_n z)] \cos \lambda_n x, \quad \kappa = \beta, \gamma \\ \chi = \chi(k_1), \quad \chi_{21} + i \chi_{22} = \chi(\delta + i \omega), \quad \chi = \alpha, \beta, \gamma \\ \alpha(k) = a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}, \quad \beta(k) = -a_{11} a_{23} - a_{13} a_{12}, \quad \gamma(k) = \\ = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \\ a_{11} = c_{44} k^2 - c_{11}, \quad a_{12} = -a_{21} = k(c_{13} + c_{44}), \quad a_{13} = a_{31} = \\ = -k(e_{31} + e_{15}) \\ a_{22} = c_{33} k^2 - c_{44}, \quad a_{23} = -a_{32} = -e_{33} k^2 + e_{15}, \quad a_{33} = \varepsilon_{33}^s k^2 - \\ - \varepsilon_{11}^s$$

Здесь  $\lambda_n = \pi n/L$ ,  $W_0, \Phi_0, A_{1n}, B_{1n}, C_{1n}$  — постоянные,  $\pm k_1, \pm \delta \pm \pm i \omega$  — корни уравнения  $\det \| a_{ke} \| = 0$ .



Фиг. 1

На основании формул (1.4) получим выражения для напряжений и электрической индукции в слое

$$(1.5) \quad \sigma_{xz} = 2 \Sigma_{(m)}, \quad \sigma_{zz} = c_{33} W_0 + e_{33} \Phi_0 + 2 \Sigma_{(m)'} \\ \sigma_{xx} = c_{13} W_0 + e_{31} \Phi_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \{ -m_1 k_1 A_{1n} \operatorname{ch}(k_1 \lambda_n z) + \\ + [(-\delta m_2 + \omega m_3) \operatorname{ch}(\delta \lambda_n z) \cos(\omega \lambda_n z) + (\delta m_3 + \omega m_2) \operatorname{sh}(\delta \lambda_n z) \times \\ \times \sin(\omega \lambda_n z)] B_{1n} + [\operatorname{idem}(m_2 \rightarrow -m_3, m_3 \rightarrow m_2)] C_{1n} \} \cos \lambda_n x \\ D_z = e_{33} W_0 - \varepsilon_{33}^s \Phi_0 + 2 \Sigma_{(n)'}, \quad D_x = 2 \Sigma_{(n)} \\ \Sigma_{(l)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \{ -l_1 A_{1n} \operatorname{sh}(k_1 \lambda_n z) + [-l_2 \operatorname{sh}(\delta \lambda_n z) \cos(\omega \lambda_n z) + \\ + l_3 \operatorname{ch}(\delta \lambda_n z) \sin(\omega \lambda_n z)] B_{1n} + [\operatorname{idem}(l_2 \rightarrow -l_3, l_3 \rightarrow l_2)] C_{1n} \} \sin \lambda_n x \\ \Sigma_{(l)'} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left\{ \frac{l_1}{k_1} A_{1n} \operatorname{ch}(k_1 \lambda_n z) + [(\delta' l_2 + \omega' l_3) \operatorname{ch}(\delta \lambda_n z) \cos(\omega \lambda_n z) - \right. \\ \left. - (\delta' l_3 - \omega' l_2) \operatorname{sh}(\delta \lambda_n z) \sin(\omega \lambda_n z)] B_{1n} - \right. \\ \left. - [\operatorname{idem}(l_2 \rightarrow l_3, l_3 \rightarrow -l_2)] C_{1n} \right\} \cos \lambda_n x, \quad l = m, n \\ \delta' = \frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2}, \quad \omega' = \frac{\omega}{\delta^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= e_{15}\gamma_1 - c_{44}(\beta_1 + k_1\alpha_1), \quad m_2 = e_{15}\gamma_{21} - c_{44}(\alpha_{21}\delta - \\
&\quad - \omega\alpha_{22} + \beta_{21}) \\
m_3 &= e_{15}\gamma_{22} - c_{44}(\delta\alpha_{22} + \omega\alpha_{21} + \beta_{22}) \\
n_1 &= -\varepsilon_{11}^S\gamma_1 - e_{15}(\beta_1 + k_1\alpha_1), \quad n_2 = -\varepsilon_{11}^S\gamma_{21} - e_{15}(\delta\alpha_{21} - \\
&\quad - \omega\alpha_{22} + \beta_{21}) \\
n_3 &= -\varepsilon_{11}^S\gamma_{22} - e_{15}(\delta\alpha_{22} + \omega\alpha_{21} + \beta_{22})
\end{aligned}$$

Здесь  $\text{idem}(\cdot)$  означает выражение, которое получается из выражения, стоящего в предыдущих квадратных скобках, при указанной замене символов. При выводе формул (1.5) были использованы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
c_{11}\alpha_{21} - c_{13}(\delta\beta_{21} - \omega\beta_{22}) + e_{31}(\delta\gamma_{21} - \omega\gamma_{22}) &= -\delta m_2 + \omega m_3 \\
c_{11}\alpha_{22} - c_{13}(\delta\beta_{22} + \omega\beta_{21}) + e_{31}(\delta\gamma_{22} + \omega\gamma_{21}) &= -\delta m_3 - \omega m_2 \\
c_{11}\alpha_1 - c_{13}k_1\beta_1 + e_{31}k_1\gamma_1 &= m_1 k_1 \\
c_{13}\alpha_1 - c_{33}k_1\beta_1 + e_{33}k_1\gamma_1 &= m_1/k_1 \\
c_{13}\alpha_{21} - c_{33}(\delta\beta_{21} - \omega\beta_{22}) + e_{33}(\delta\gamma_{21} - \omega\gamma_{22}) &= \delta' m_2 + \omega' m_3 \\
c_{13}\alpha_{22} - c_{33}(\delta\beta_{22} + \omega\beta_{21}) + e_{33}(\delta\gamma_{22} + \omega\gamma_{21}) &= \delta' m_3 - \omega' m_2 \\
e_{31}\alpha_1 - e_{33}k_1\beta_1 - \varepsilon_{33}^S k_1\gamma_1 &= n_1/k_1 \\
e_{31}\alpha_{21} - e_{33}(\delta\beta_{21} - \omega\beta_{22}) - \varepsilon_{33}^S(\delta\gamma_{21} - \omega\gamma_{22}) &= \delta' n_2 + \omega' n_3 \\
e_{31}\alpha_{22} - e_{33}(\delta\beta_{22} + \omega\beta_{21}) - \varepsilon_{33}^S(\delta\gamma_{22} + \omega\gamma_{21}) &= \delta' n_3 - \omega' n_2
\end{aligned}$$

Пусть при  $z = \pm h$  отсутствует механическая нагрузка. Тогда условия (1.6)

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0, \quad z = \pm h$$

будут выполняться, если полагать

$$\begin{aligned}
(1.7) \quad A_{1n} &= k_1(m_2^2 + m_3^2)[\omega' \text{sh}(\delta\lambda_n h) \text{ch}(\delta\lambda_n h) + \\
&\quad + \delta' \sin(\omega\lambda_n h) \cos(\omega\lambda_n h)] A_n \\
B_{1n} &= m_1 \{k_1 \text{sh}(k_1\lambda_n h) [(\delta' m_3 - \omega' m_2) \text{ch}(\delta\lambda_n h) \cos(\omega\lambda_n h) + \\
&\quad + (\delta' m_2 + \omega' m_3) \text{sh}(\delta\lambda_n h) \sin(\omega\lambda_n h)] - \text{ch}(k_1\lambda_n h) \times \\
&\quad \times [m_3 \text{sh}(\delta\lambda_n h) \cos(\omega\lambda_n h) + m_2 \text{ch}(\delta\lambda_n h) \sin(\omega\lambda_n h)]\} A_n \\
C_{1n} &= m_1 \{k_1 \text{sh}(k_1\lambda_n h) [(\delta' m_2 + \omega' m_3) \text{ch}(\delta\lambda_n h) \cos(\omega\lambda_n h) - \\
&\quad - (\delta' m_3 - \omega' m_2) \text{sh}(\delta\lambda_n h) \sin(\omega\lambda_n h)] + \\
&\quad + \text{ch}(k_1\lambda_n h) [m_3 \text{ch}(\delta\lambda_n h) \sin(\omega\lambda_n h) - \\
&\quad - m_2 \text{sh}(\delta\lambda_n h) \cos(\omega\lambda_n h)]\} A_n \\
W_0 &= -e_{33}\Phi_0/c_{33}
\end{aligned}$$

Подставляя выражения (1.7) в соотношения (1.5) для  $\sigma_{zz}$  и  $D_z$ , найдем электрический потенциал и составляющую  $D_z$  вектора электрической индукции на поверхности слоя

$$(1.8) \quad \varphi(x, h) = \Phi_0 h + \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} A_n \cos \lambda_n x$$

$$(1.9) \quad D_z(x, h) = -\varepsilon_{33}^* \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n^{(0)} \cos \lambda_n x$$

$$\begin{aligned}
f_{1n} &= \Phi_1 \text{sh}(k_1\lambda_n h) \text{sh}(2\delta\lambda_n h) + \Phi_2 \text{sh}(k_1\lambda_n h) \sin(2\omega\lambda_n h) - \\
&\quad - \Phi_3 \text{ch}(k_1\lambda_n h) (\text{ch}(2\delta\lambda_n h) - \cos(2\omega\lambda_n h)), \quad A_n^{(0)} = f_{2n} A_n
\end{aligned}$$

$$f_{2n} = d_1 \text{ch}(k_1\lambda_n h) \text{sh}(2\delta\lambda_n h) + d_2 \text{ch}(k_1\lambda_n h) \sin(2\omega\lambda_n h) -$$

$$\begin{aligned}
& - d_3 \operatorname{sh}(k_1 \lambda_n h) (\operatorname{ch}(2\delta \lambda_n h) + \cos(2\omega \lambda_n h)), \quad \varepsilon_{33}^* = \varepsilon_{33}^S (1 + \\
& + e_{33}^2 / (c_{33} \varepsilon_{33}^S)) \\
\Phi_1 & = k_1 [\gamma (m_2^2 + m_3^2) \omega' + m_1 \gamma_{21} (\delta' m_3 - \omega' m_2) - \\
& - m_1 \gamma_{22} (\delta' m_2 + \omega' m_3)] \\
\Phi_2 & = k_1 \operatorname{idem} (\omega' \rightarrow \delta', \delta' \rightarrow -\omega') \\
d_3 & = m_1 k_1 (\delta'^2 + \omega'^2) (m_2 n_3 - m_3 n_2) \\
d_1 & = [n_1 (m_2^2 + m_3^2) \omega' + m_1 m_2 (\delta' n_3 - \omega' n_2) - m_1 m_2 (\delta' n_2 + \\
& + \omega' n_3)] \\
d_2 & = \operatorname{idem} (\omega' \rightarrow \delta', \delta' \rightarrow -\omega'), \quad \Phi_3 = m_1 (\gamma_{21} m_3 - \gamma_{22} m_1)
\end{aligned}$$

Граничные условия на поверхности  $z = h$  представим в виде

$$(1.10) \quad \varphi(x, h) = V_0, \quad 0 \leq x < a$$

$$(1.11) \quad D_z(x, h) = 0, \quad a < x < L$$

Тогда с учетом (1.8), (1.9) заключаем, что условия (1.10), (1.11) приводят к парным рядовым уравнениям для определения коэффициентов  $A_n^{(0)}$

$$(1.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} F_n A_n^{(0)} \cos \lambda_n x = V_0 - \Phi_0 h, \quad 0 \leq x < a; \quad F_n = \frac{f_{1n}}{f_{2n}}$$

$$(1.13) \quad -\varepsilon_{33}^* \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n^{(0)} \cos \lambda_n x = 0, \quad a < x < L$$

2. Переходя к решению парных уравнений (1.12), (1.13), запишем их в виде

$$(2.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(0)} \cos \lambda_n x = \beta_* (V_0 - \Phi_0 h) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n A_n^{(0)} \cos \lambda_n x, \quad 0 \leq x < a$$

$$(2.2) \quad -\varepsilon_{33}^* \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n^{(0)} \cos \lambda_n x = 0, \quad a < x < L$$

$$R_n = 1 - \beta_* F_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0, \quad \beta_* = \frac{d_1 - d_3}{\Phi_1 - \Phi_3}$$

Введем вспомогательную функцию  $f(x)$ , полагая

$$(2.3) \quad -\varepsilon_{33}^* \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n^{(0)} \cos \lambda_n x = f(x), \quad 0 \leq x < a$$

Тогда из равенств (2.2) и (2.3) найдем

$$(2.4) \quad -\varepsilon_{33}^* \Phi_0 = \frac{1}{L} \int_0^a f(\xi) d\xi, \quad \lambda_n A_n^{(0)} = \frac{2}{L} \int_0^a f(t) \cos \lambda_n t dt$$

Подставляя (2.4) в уравнение (2.1) и используя выражение [2]

$$(2.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x \cos \lambda_n t}{\lambda_n} = -\frac{L}{2\pi} \ln(2 |\cos 2x_* - \cos 2t_*|)$$

$$(x_* = \pi x / (2L), \quad t_* = \pi t / (2L))$$

получим интегральное уравнение относительно функции  $f(x)$

$$(2.6) \quad -\frac{1}{\pi} \int_0^a f(t) \ln(2 |\cos 2x_* - \cos 2t_*|) dt = \beta_* (V_0 - \Phi_0 h) +$$

$$+ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n \cos \lambda_n x}{\lambda_n} \int_0^a f(t) \cos \lambda_n t dt, \quad 0 \leq x < a$$

Для решения уравнения (2.6) введем новые переменные  $\xi$  и  $\zeta$ , связанные с  $x, t$  равенствами

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \cos 2x_* &= \cos^2 a_* + \sin^2 a_* \cos 2\xi_* \\ \cos 2t_* &= \cos^2 a_* + \sin^2 a_* \cos 2\zeta_* \\ \left( \xi_* &= \frac{\pi\xi}{2L}, \zeta_* = \frac{\pi\zeta}{2L}, a_* = \frac{\pi a}{2L} \right) \end{aligned}$$

Переходя к переменным  $\xi, \zeta$ , воспользуемся разложением

$$\begin{aligned} & -\frac{L}{2\pi} \ln (2 |\cos 2x_* - \cos 2t_*|) = \\ & = -\frac{L}{2\pi} \ln (2 \sin^2 a_*) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k \xi \cos \lambda_k \zeta}{\lambda_k} \end{aligned}$$

и запишем уравнение (2.6) в виде

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \ln (2 \sin^2 a_*) \int_0^L f^*(\zeta) d\zeta + \frac{2}{\pi} \int_0^L f^*(\zeta) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k \xi \cos \lambda_k \zeta}{k} \right) d\zeta = \\ & = \beta_* (V_0 - \Phi_0 h) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\lambda_n} \cos (\lambda_n x (\xi)) \frac{2}{L} \int_0^L f^*(\zeta) \cos (\lambda_n t (\zeta)) d\zeta \\ & (f^*(\zeta) = f(t(\zeta)) t'(\zeta)) \end{aligned}$$

Будем искать решение уравнения (2.8) в форме ряда

$$(2.9) \quad \begin{aligned} f(t(\zeta)) t'(\zeta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cos \lambda_m \zeta \\ \alpha_0 &= \frac{1}{L} \int_0^a f(t) dt = -\varepsilon_{33}^* \Phi_0 \end{aligned}$$

Тогда с учетом разложений [3]

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \cos (\lambda_n x (\xi)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^{(n)} \cos \lambda_k \xi, \quad \cos (\lambda_n t (\zeta)) = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s^{(n)} \cos \lambda_s \zeta \\ (n &= 1, 2, \dots, \beta_k^{(n)} = 0 \text{ при } k > n) \end{aligned}$$

получим из равенства (2.8) бесконечную систему алгебраических уравнений для определения постоянных  $\alpha_m$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \alpha_0 \left[ \ln (2 \sin^2 a_*) + \frac{\pi h \beta_*}{L \varepsilon_{33}^*} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{n} (\beta_0^{(n)})^2 \right] + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{n} \beta_0^{(n)} \beta_s^{(n)} = -\frac{\pi \beta_*}{L} V_0 \end{aligned}$$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} 2\alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{n} \beta_m^{(n)} \beta_0^{(n)} - \frac{\alpha_m}{m} + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{n} \beta_m^{(n)} \beta_s^{(n)} = 0 \\ (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Возвращаясь в (2.9) к переменной  $t$  и используя известные соотношения для полиномов Чебышева  $T_{2m}$  [2], найдем следующее выражение для функции плотности электрических зарядов на верхней системе электродов:

$$(2.13) \quad f(t) = \frac{\cos t_*}{\sqrt{\cos^2 t_* - \cos^2 a_*}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_m T_{2m} \left( \frac{\sin t_*}{\sin a_*} \right)$$

С учетом (2.13) получим решение системы (2.1), (2.2) в виде

$$(2.14) \quad A_n^{(0)} = [2\alpha_0\beta_0^{(n)} + \sum_{s=1}^n \alpha_s\beta_s^{(n)}] \lambda_n^{-1}$$

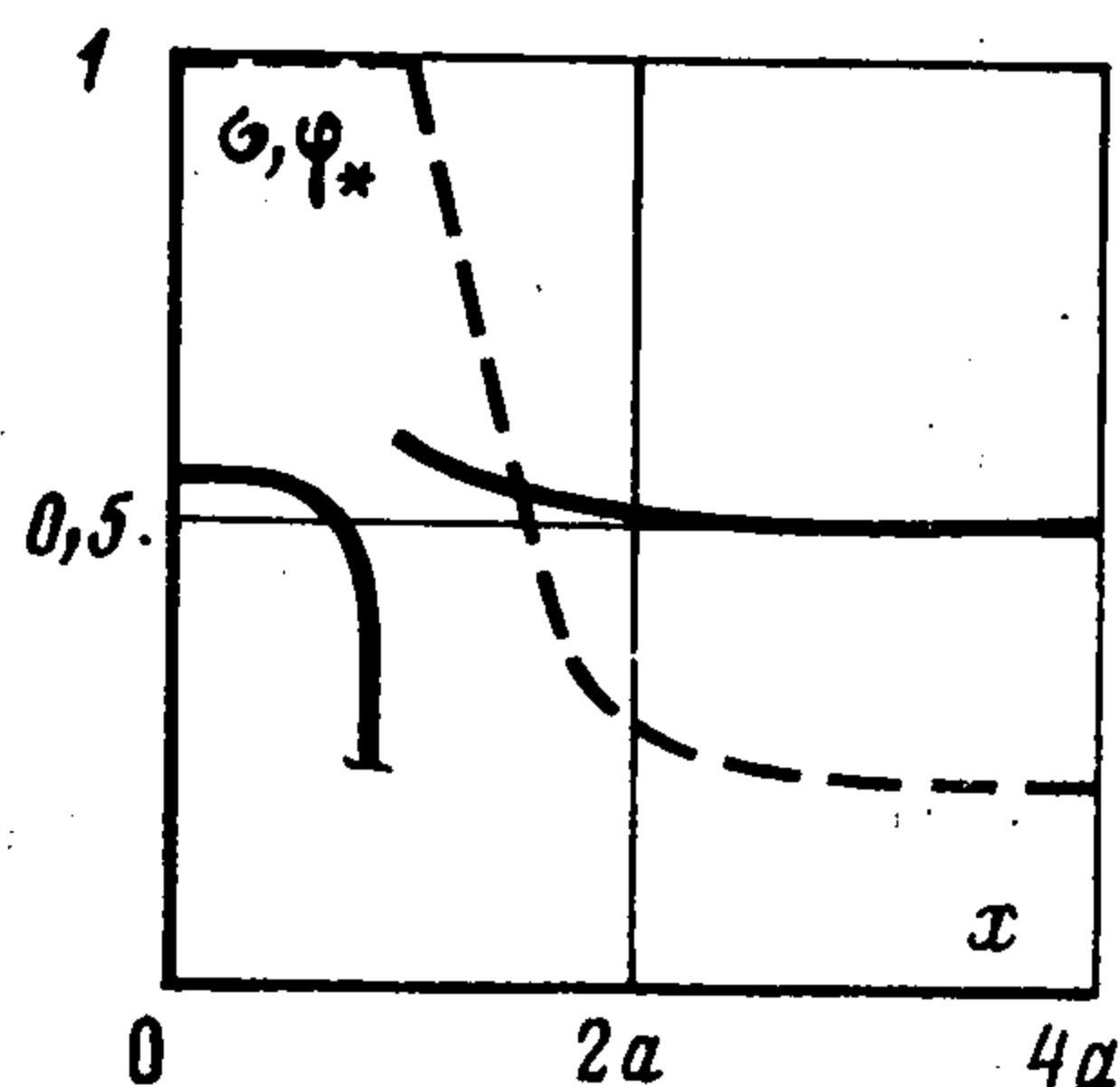
Определим электрический и нормальное напряжение  $\sigma_{xx}$  на поверхности слоя  $z = h$ . На основании (1.5), (1.7), (1.8) найдем

$$(2.15) \quad \varphi(x, h) = \Phi_0 h - \frac{1}{\pi\beta_*} \int_0^a f(t) \ln(2|\cos 2x_* - \cos 2t_*|) dt - \\ - \beta_*^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} R_n A_n^{(0)} \cos \lambda_n x$$

$$(2.16) \quad \sigma_{xx}(x, h) = \sigma_{xx}^{(0)} + \frac{m_1(m_2^2 + m_3^2)}{d_1 - d_3} (2k_1\omega\delta' - \omega - k_1^2\omega') \eta(a-x)f(x) - \\ - \frac{m_1(m_2^2 + m_3^2)}{d_1 - d_3} \sum_{n=1}^{\infty} G_n A_n^{(0)} \lambda_n \cos \lambda_n x \\ \sigma_{xx}^{(0)} = [e_{31}^* + \frac{m_1(m_2^2 + m_3^2)}{d_1 - d_3} (2k_1\omega\delta' - \omega - k_1^2\omega') e_{33}^*] \Phi_0 \\ f_{2n} G_n = g_1 [\operatorname{ch}(k_1\lambda_n h) \operatorname{sh}(2\delta\lambda_n h) - \operatorname{sh}(k_1\lambda_n h) (\operatorname{ch}(2\delta\lambda_n h) + \\ + \cos(2\omega\lambda_n h))] + g_2 \operatorname{ch}(k_1\lambda_n h) \sin(2\omega\lambda_n h) \\ g_1 = 2k_1\omega\delta' d_1 - (\omega + k_1^2\omega') d_3, \quad e_{31}^* = e_{31} (1 - c_{13}e_{33}/(c_{33}e_{31})) \\ g_2 = (2k_1\omega\delta' - \omega - k_1^2\omega') d_2 - (\delta - k_1^2\delta')(d_1 - d_3)$$

( $\eta(x)$  — единичная функция). Из формулы (2.16) следует, что напряжение  $\sigma_{xx}(x, h)$  имеет особенность у края электрода.

3. Численный анализ электроупругих полей, возникающих в полосе, проводилась для пьезокерамики PZT-4 [4] при  $a/h = 3$ ,  $L/h = 18$ . В рядах, являющихся коэффициентами при неизвестных  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  системы (2.11), (2.12), удерживались первые четыре члена. Из усеченной системы определялись  $\alpha_0, \dots, \alpha_3$ , а затем по формуле



Фиг. 2

проверялось условие (1.10). Невязка при удовлетворении условию (1.10) не превышала 1% для всех значений  $0 \leq x < a$ . Для области вне электродов потенциал электрического поля при  $z = h$  вычислялся на основании формулы

$$(3.1) \quad \varphi(x, h) = \Phi_0 h - \beta_*^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} R_n A_n^{(0)} \cos \lambda_n x - \\ - \beta_*^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_m \int_0^{\pi/2} \cos(2m\eta) \ln(4|\cos^2 \eta \sin^2 a_* - \sin^2 x|) d\eta$$

получаемой из (2.15), (2.13) после преобразования интегрального члена. Отметим, что квадратуры, входящие в (3.1), для  $m = 0, 1$  ( $|x| > a$ ) вычисляются. На фиг. 2 представлено изменение  $\varphi_* = \varphi/V_0$  при  $z = h$  в зависимости от  $x$  (штриховая линия). Изменение напряжения  $\sigma = \sigma_{xx}h/(V_0 e_{31})$ , подсчитанное по (2.16), представлено сплошными линиями. Анализ результатов численных расчетов показывает, что у края электрода напряжение  $\sigma_{xx}$  имеет корневую особенность, обусловленную сменой электрических граничных условий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев Б. А. Электроупругое состояние полуплоскости из пьезокерамики с двумя граничными электродами.— Проблемы прочности, 1982, № 7, с. 56—59.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
3. Hussain M. A., Pu S. L. Dynamic stress intensity factor for an unbounded plate having collinear cracks.— Engng Fract. Mech., 1972, v. 4, No. 4, p. 865—876.
4. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.— В кн.: Физическая акустика. Т. 1. Ч. А. М.: Мир, 1966, с. 204—326.

Москва

Поступила в редакцию  
4.V.1983