

УДК 539.319

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ПРОЕКТОВ ПРИ ФИКСИРОВАННЫХ ПОЛЯХ НАПРЯЖЕНИЙ ИЛИ ДЕФОРМАЦИЙ

Кунташев П. А., Немировский Ю. В.

Изучаются множества распределений упругих модулей, при которых в термоупругом теле реализуется одно и то же поле деформаций или напряжений. Доказана аффинность структуры этих множеств и исследована их взаимосвязь. Показано, что задача о распределении упругих параметров, реализующих минимальный уровень напряжений при заданном поле деформаций, является задачей выпуклого программирования. Рассмотрен пример оптимального проектирования термоупругой балки.

Вследствие достаточно широких возможностей управления новыми технологическими методами создания материалов и конструкций возникает проблема оптимального проектирования, т. е. создания таких полей упругих параметров, при которых обеспечивается предпочтительное для эксплуатации напряженно-деформированное состояние. Была рассмотрена задача об оптимальном распределении параметров Ламе в упругом теле из условия минимума работы внешних сил [1]. Исследовано распределение параметров Ламе, максимизирующее жесткость на кручение призматического стержня [2]. Решена задача об оптимальном распределении модуля Юнга в стержне из условия максимума критической нагрузки потери устойчивости [3]. Получено распределение модуля Юнга в предварительно напряженной балке из требования реализации высшей первой собственной частоты [4].

Во многих случаях важно не только улучшать жесткостные характеристики конструкций, но и снижать уровень напряжений. Ниже исследуются общие свойства множеств распределений упругих модулей, обеспечивающих при фиксированных нагрузках и температурном поле реализацию одного и того же поля деформаций или напряжений. Установлено, что эти множества имеют аффинную структуру, пересекаются в единственной точке и касательные пространства этих множеств являются взаимно дополняющими.

1. Рассмотрим линейно-упругое неоднородное изотропное тело, занимающее конечную область $V \subset R^3$ с кусочно-гладкой поверхностью A , на части A_1 которой смещения u_i равны нулю. На остальной части A_2 поверхности действует поверхностная нагрузка p_i , которая совместно с объемными силами X_i и температурным полем T вызывает в состоянии равновесия напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} .

Упругие свойства изотропного тела будем характеризовать вектор-функцией λ с компонентами $\lambda_1(\cdot) = K(\cdot)$, $\lambda_2(\cdot) = G(\cdot)$ или вектор-функцией β , $\beta_1(\cdot) = K^{-1}(\cdot)$, $\beta_2(\cdot) = G^{-1}(\cdot)$. Здесь K , G — модули объемной упругости и сдвига. Функции λ , β считаем принадлежащими множеству Q_+ вектор-функций со строго положительными компонентами, из пространства Q кусочно-гладких на V вектор-функций с нормой

$$\|h\| = \text{vrai} \max_{(\cdot) \in V} \max_{i=1,2} |h_i(\cdot)|$$

Будем считать, что свойства материала и деформированное состояние тела позволяют применить соотношения линейной теории термоупругости [5]. Следуя вариационным методам [6], их можно свести к эквивалентной задаче о минимуме квадратичного функционала. В пространстве квадра-

точно-суммируемых на V симметричных тензоров второго ранга

$$(1.1) \quad \mathfrak{E} = \left\{ t_{ij} \mid t_{ij}(\cdot) = t_{ji}(\cdot), (\cdot) \in V; (t, t) = \int_V t_{ij} t_{ij} dV < \infty \right\}$$

введем эквивалентную метрику при помощи энергетического скалярного произведения

$$(1.2) \quad [\varepsilon, \varepsilon^{(1)}]_\lambda = \int_V \left(\frac{1}{3} \lambda_1 \varepsilon_{kk} \varepsilon_{nn}^{(1)} + \lambda_2 e_{ij} e_{ij}^{(1)} \right) dV, \quad \|\varepsilon\|_\lambda^2 = [\varepsilon, \varepsilon]_\lambda$$

где $e_{ij}, e_{ij}^{(1)}$ — девиаторы тензоров $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^{(1)}$; по повторяющимся индексам производится суммирование. Произведение (1.2) будем использовать для полей деформаций. Для полей напряжений введем другое скалярное произведение, порождающее метрику, эквивалентную (1.2)

$$(1.3) \quad [\sigma, \sigma^{(1)}]_\beta = \int_V \left(\frac{1}{3} \beta_1 \sigma_{kk} \sigma_{nn}^{(1)} + \beta_2 s_{ij} s_{ij}^{(1)} \right) dV, \quad \|\sigma\|_\beta^2 = [\sigma, \sigma]_\beta$$

где $s_{ij}, s_{ij}^{(1)}$ — девиаторы тензоров $\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^{(1)}$. Тензоры напряжений и деформаций связаны законом Дюгамеля — Неймана

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{nn} &= \lambda_1 \varepsilon_{kk}^y, & s_{ij} &= \lambda_2 e_{ij}^y \\ \varepsilon_{ij}^y &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*, & \varepsilon_{ij}^* &= \alpha (T - T_0) \delta_{ij} \end{aligned}$$

Здесь α — коэффициент линейного температурного расширения, T_0 — начальная температура в недеформированном состоянии, δ_{ij} — символ Кронекера.)

Вариационные принципы Лагранжа и Кастильяно линейной задачи термоупругости [5] с учетом обозначений (1.2), (1.3) можно записать в виде

$$(1.5) \quad \varepsilon : \|\varepsilon - \varepsilon^*\|_\lambda^2 - 2l_H(\varepsilon) \rightarrow \min_{\varepsilon \in \Gamma} l_H(\varepsilon) = \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV$$

$$(1.6) \quad \sigma = \sigma^* - \tau : \|\sigma^* - \tau\|_\beta^2 - 2l_T(\tau) \rightarrow \min_{\tau \in \Psi}$$

$$l_T(\tau) = \int_V \varepsilon_{ij}^* \tau_{ij} dV$$

где пространство Γ кинематически возможных деформаций построено как пополнение в метрике (1.2) следующего пространства:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} D &= \{ \varepsilon \mid \exists u_i \in C^2(V) : \varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}), u_i(\cdot) = 0, \\ &(\cdot) \in A_1 \}; \Gamma = \bar{D} \end{aligned}$$

Пространство Ψ статически возможных напряжений построено как пополнение в метрике (1.3) пространства

$$(1.8) \quad \begin{aligned} M &= \{ \sigma \mid \sigma_{ij} \in C^1(V), \sigma_{ji,j} = 0 \text{ на } V, \sigma_{ji} n_j = 0 \text{ на } A_2 \} \\ \Psi &= \bar{M} \end{aligned}$$

Здесь $C^k(V)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых на V функций (индекс после запятой указывает на дифференцирование по соответствующей координате), n_j — вектор нормали к поверхности. Через σ_{ij}^* в (1.5), (1.6) обозначено произвольное частное решение, почти всюду на V удовлетворяющее уравнениям равновесия в напряжениях и силовым граничным условиям на A_2 .

Предполагаем далее, что тензоры ε^*, σ^* квадратично суммируемы на V . При этом задачи (1.5), (1.6) являются частными случаями задач о ми-

нимуме квадратичных функционалов [7], условия минимума которых

$$(1.9) \quad \varepsilon \in \Upsilon: [\varepsilon - \varepsilon^*, \varepsilon^{(1)}]_{\lambda} = l_H(\varepsilon^{(1)}), \quad \forall \varepsilon^{(1)} \in \Upsilon$$

$$(1.10) \quad \tau \in \Psi: [\sigma^* - \tau, \tau^{(1)}]_{\beta} = -l_T(\tau^{(1)}), \quad \forall \tau^{(1)} \in \Psi$$

однозначно определяют деформации ε и напряжения $\sigma = \sigma^* - \tau$.

Обозначим через Λ_{ε} множество распределений упругих модулей $\lambda \in Q_+$, при которых в состоянии равновесия под действием заданной нагрузки и температурного поля реализуется одно и то же поле деформаций ε . Соответственно B_{σ} — множество распределений упругих податливостей $\beta \in Q_+$, реализующих распределение напряжений σ .

Покажем, что Λ_{ε} , B_{σ} имеют аффинную структуру. Выберем два проекта, реализующих одинаковое распределение деформаций $\lambda' \in \Lambda_{\varepsilon}$, $\lambda'' \in \Lambda_{\varepsilon}$, и рассмотрим допустимый проект $\lambda \in Q_+$, лежащий на прямой, соединяющей λ' , λ'' . Записывая условие (1.9) для каждого проекта, умножая первое соотношение на p и складывая со вторым, умноженным на $(1-p)$, вновь получаем в силу линейной зависимости скалярного произведения (1.2) от λ условия (1.9), где $\lambda = (p\lambda' + (1-p)\lambda'') \in \Lambda_{\varepsilon}$. Проведя сходный анализ соотношений (1.10), можно сделать вывод о том, что множества Λ_{ε} , B_{σ} вместе с любыми двумя своими точками содержат и часть соединяющей их прямой, лежащую в Q_+ , т. е. Λ_{ε} , B_{σ} имеют аффинную структуру

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \lambda' \in \Lambda_{\varepsilon}, \lambda'' \in \Lambda_{\varepsilon} &\Rightarrow (p\lambda' + (1-p)\lambda'') \in \Lambda_{\varepsilon} \\ \forall p \in R: p\lambda' + (1-p)\lambda'' \in Q_+; \beta' \in B_{\sigma}, \beta'' \in B_{\sigma} &\Rightarrow \\ \Rightarrow (p\beta' + (1-p)\beta'') \in B_{\sigma}, \forall p \in R: p\beta' + (1-p)\beta'' \in Q_+ \end{aligned}$$

2. Исследуем связь множеств проектов Λ_{ε} , реализующих одинаковое поле деформаций со множествами проектов B_{σ} , реализующими одинаковое поле напряжений, и получим явный вид множеств Λ_{ε} , B_{σ} .

Введем пространство Υ_{σ} напряжений, соответствующих по закону Гука деформациям из Υ , как замыкание в метрике (1.3) следующего пространства:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} D_{\sigma} &= \{\sigma \mid \exists \varepsilon \in D: \sigma_{kk} = \lambda_1 \varepsilon_{nn}, s_{ij} = \lambda_2 e_{ij}\} \\ \Upsilon_{\sigma} &= \bar{D}_{\sigma} \end{aligned}$$

Введем пространство Ψ_{ε} деформаций, соответствующих по закону Гука напряжениям из Ψ , как замыкание в метрике (1.2) следующего пространства:

$$(2.2) \quad M_{\varepsilon} = \{\varepsilon \mid \exists \sigma \in M: \varepsilon_{kk} = \beta_1 \sigma_{nn}, e_{ij} = \beta_2 s_{ij}\}$$

где пространства D , M введены в (1.7), (1.8).

В дальнейшем понадобится тот факт, что введенные пространства связаны соотношениями

$$(2.3) \quad \mathfrak{E} = \Psi \oplus \Upsilon_{\sigma}, \quad \mathfrak{E} = \Upsilon \oplus \Psi_{\varepsilon}.$$

Первое свойство доказано в [6]. Второе эквивалентно двум следующим утверждениям:

$$(2.4) \quad [\varepsilon', \varepsilon'']_{\lambda} = 0, \quad \forall \varepsilon' \in \Psi_{\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon'' \in \Upsilon$$

$$(2.5) \quad \forall \xi \in \mathfrak{E}, \quad \exists \varepsilon' \in \Psi_{\varepsilon}, \quad \exists \varepsilon'' \in \Upsilon: \xi = \varepsilon' + \varepsilon''$$

Свойство (2.4) доказывается путем предельного перехода в соотношении ортогональности пространств D , M_{ε} , которое устанавливается интегрированием по формуле Остроградского—Гаусса. Для доказательства соотношения (2.5) рассмотрим задачу о равновесии тела под действием дисторсии ξ [5] при отсутствии внешней нагрузки. Пользуясь условием (1.5), получаем задачу о минимуме квадратичного функционала

с ограниченным в Γ линейным функционалом

$$\varepsilon'' : \|\varepsilon'' - \xi\|_{\lambda}^2 \rightarrow \min_{\varepsilon'' \in \Gamma}, \quad 2 |[\xi, \varepsilon]_{\lambda}| \leq \alpha \|\varepsilon\|_{\lambda}$$

$$\alpha = 2 (\xi, \xi)^{1/2} \max_{(\cdot) \in V} \max_{i=1,2} \lambda_i(\cdot)$$

Решение таких задач существует и единственно [7]. Напряжения, полученные при этом, самоуравновешенные, поэтому соответствующие им чисто упругие части деформаций $\varepsilon' = (\varepsilon'' - \xi)$ принадлежат Ψ_{ε} . Деформации ε'' принадлежат Γ по построению. Свойство (2.5), а с ним и (2.3), доказано.

Для выявления взаимосвязи множеств Λ_{ε} , B_{σ} воспользуемся зависимостями напряжений и деформаций от проекта распределения упругих модулей. Наряду с проектом λ (или β) из Q_+ и соответствующими ему деформациями $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$ и напряжениями $\sigma = \sigma(\beta)$ рассмотрим другой проект $\lambda' = \lambda + \mu$ (или $\beta' = \beta + \gamma$). Соответствующие ему напряжения σ' и деформации ε' вычисляются по методу возмущений в виде рядов [8]

$$(2.6) \quad \sigma' = \sigma + \sum_{n=1}^{\infty} (-\nabla_{\gamma})^n \sigma, \quad \varepsilon' = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (-\Delta_{\mu})^n (\varepsilon - \varepsilon^*)$$

где билинейные операторы $\nabla : Q \times \mathcal{E} \rightarrow \Psi$, $\Delta : Q \times \mathcal{E} \rightarrow \Gamma$ задаются условиями

$$(2.7) \quad \gamma \in Q, \sigma \in \mathcal{E}, (\nabla_{\gamma} \sigma) \in \Psi : [\nabla_{\gamma} \sigma, \tau]_{\beta} = [\sigma, \tau]_{\gamma}, \quad \forall \tau \in \Psi$$

$$(2.8) \quad \mu \in Q, \varepsilon \in \mathcal{E}, (\Delta_{\mu} \varepsilon) \in \Gamma : [\Delta_{\mu} \varepsilon, \varepsilon']_{\lambda} = [\varepsilon, \varepsilon']_{\mu}, \quad \forall \varepsilon' \in \Gamma$$

Величины $[\cdot]_{\gamma}$, $[\cdot]_{\mu}$ определяются по формулам (1.2), (1.3) при замене β на γ , λ на μ . Следуя [8], можно доказать, что ряды (2.6) сходятся по энергетической норме в областях, содержащих соответственно шары

$$(2.9) \quad \|\beta' - \beta\| < r_1, \quad r_1 = \text{vrai} \min_{(\cdot) \in V} \min_{i=1,2} \beta_i \|\lambda' - \lambda\| < r_2$$

$$r_2 = \text{vrai} \min_{(\cdot) \in V} \min_{i=1,2} \lambda_i(\cdot)$$

Предположим, что распределение модулей λ претерпевает бесконечно малое изменение $\delta\lambda$, тогда соответствующее изменение податливостей определяется после дифференцирования

$$(2.10) \quad \beta_i^{-1}(\cdot) \cdot \delta\beta_i(\cdot) = -\lambda_i^{-1}(\cdot) \cdot \delta\lambda_i(\cdot), \quad (\cdot) \in V, \quad i = 1, 2$$

В рядах (2.6) ограничимся величинами первого порядка малости для изменения напряжений $\delta\sigma$ и деформаций $\delta\varepsilon$

$$\delta\sigma \in \Psi : [\delta\sigma, \sigma']_{\beta} = -[\sigma, \sigma']_{\delta\beta}, \quad \forall \sigma' \in \Psi$$

$$\delta\varepsilon \in \Gamma : [\delta\varepsilon, \varepsilon']_{\lambda} = -[\varepsilon - \varepsilon^*, \varepsilon']_{\delta\lambda}, \quad \forall \varepsilon' \in \Gamma$$

Пусть тензоры ε' , σ' связаны законом Гука (1.4), тогда, пользуясь (2.10), (1.2), (1.3), можно получить свойство

$$[\sigma, \sigma']_{\delta\beta} = -[\varepsilon - \varepsilon^*, \varepsilon']_{\delta\lambda}$$

которое позволяет записать условия неизменности деформаций или напряжений при малом изменении проекта в виде

$$(2.11) \quad \delta\sigma = 0 \Leftrightarrow [q, \varepsilon']_{\lambda} = 0, \quad \forall \varepsilon' \in \Psi_{\varepsilon}$$

$$\delta\varepsilon = 0 \Leftrightarrow [q, \varepsilon']_{\lambda} = 0, \quad \forall \varepsilon' \in \Gamma$$

где тензор q вводится соотношениями

$$(2.12) \quad q_{kk} = \delta\lambda_1 \cdot \lambda_1^{-1} (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^*), \quad q_{ij} - 1/3 q_{kk} \delta_{ij} = \delta\lambda_2 \cdot \lambda_2^{-1} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^* - 1/3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij})$$

Свойство (2.3), состоящее в том, что пространство Γ — ортогональное дополнение Ψ_{ε} до пространства \mathcal{E} , дает связь первого и второго условий

(2.11). Во-первых, по (2.4) одновременное выполнение этих условий при $q \neq 0$ невозможно, т. е. нет направления малого изменения упругих модулей $\delta\lambda$, в котором не меняются ни деформации, ни напряжения. Во-вторых, по (2.5) любое малое изменение проекта $\delta\lambda$ можно однозначно представить в виде суммы $\delta\lambda' + \delta\lambda''$ так, что изменение проекта $\delta\lambda'$ не изменит напряжений, а изменение $\delta\lambda''$ не изменит деформаций.

Сходный анализ, опирающийся на первое соотношение (2.3), можно проделать для малых изменений упругих податливостей $\delta\beta'$, не меняющих напряжений, и изменений $\delta\beta''$, не меняющих деформаций.

С множеством Λ_ε распределений упругих модулей, реализующих одно и то же поле деформаций ε , сопоставим множество V_ε распределений соответствующих упругих податливостей. А с множеством V_σ распределений упругих податливостей, реализующих одинаковое поле напряжений σ , сопоставим множество Λ_σ соответствующих распределений упругих модулей. Тогда полученные здесь результаты имеют следующую геометрическую интерпретацию. Семейство аффинных множеств Λ_ε вместе с семейством множеств Λ_σ покрывает все множество возможных проектов Q_+ . Каждое множество Λ_ε пересекается с множеством Λ_σ не более чем в одной точке, причем касательные пространства, построенные к Λ_ε и Λ_σ в этой точке, дополняют одно другое. Аналогичными свойствами обладают семейства аффинных множеств V_σ и множеств V_ε .

Множества Λ_ε , V_σ могут быть построены по одному из их представителей $\lambda \in \Lambda_\varepsilon$, $\beta \in V_\sigma$ следующим образом:

$$(2.13) \quad \Lambda_\varepsilon = \{(\lambda + \mu) \in Q_+ : [\varepsilon - \varepsilon^*, \varepsilon']_\mu = 0, \forall \varepsilon' \in \Gamma\}$$

$$(2.14) \quad V_\sigma = \{(\beta + \gamma) \in Q_+ : [\sigma, \sigma']_\gamma = 0, \forall \sigma' \in \Psi\}$$

Для доказательства (2.13) предположим, что приращение проекта μ удовлетворяет условию

$$(2.15) \quad \mu \in Q : [\varepsilon - \varepsilon^*, \varepsilon']_\mu = 0, \forall \varepsilon' \in \Gamma$$

Выберем положительное число t_1 так, чтобы проект $\lambda' = \lambda + t_1\mu$ принадлежал шару (2.9) сходимости ряда (2.6) для ε' . Согласно условию (2.15), элемент $\Delta_\mu (\varepsilon - \varepsilon^*)$, вычисленный по (2.8), а с ним и все элементы $(-\Delta_\mu)^n (\varepsilon - \varepsilon^*)$ равны нулю. Это означает, что $(\lambda + t_1\mu) \in \Lambda_\varepsilon$, но тогда по свойству (1.11) аффинности множества Λ_ε и вся часть прямой $\lambda + t\mu$, лежащая в допустимом множестве Q_+ , лежит в Λ_ε . Иными словами, проекты, построенные по рецепту (2.13), действительно принадлежат множеству Λ_ε . Остается показать, что конструкция (2.13) исчерпывает все элементы множества Λ_ε . Предположим от противного, что

$$(2.16) \quad \exists (\lambda + \mu) \in \Lambda_\varepsilon : \exists \varepsilon' \in \Gamma : [\varepsilon - \varepsilon^*, \varepsilon']_\mu \neq 0$$

По свойству аффинности Λ_ε (1.11) и вся часть прямой $(\lambda + t\mu)$ принадлежит Λ_ε . Выберем на этой части прямой отрезок $t \in [0, t_1]$, такой, чтобы сходился степенной ряд по t

$$[\varepsilon(\lambda + t\mu), \varepsilon']_\lambda = [\varepsilon, \varepsilon']_\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$$

$$c_n = [(-\Delta_\mu)^n (\varepsilon - \varepsilon^*), \varepsilon']_\lambda$$

Поскольку этот ряд представляет разложение нулевой функции, определенной на $[0, t_1]$, то по известному [9] свойству единственности степенного разложения должны быть равны нулю все коэффициенты c_n , что при $n = 1$ противоречит предположению (2.16).

Соотношение (2.13), определяющее явный вид аффинного подмножества Λ_ε , полностью доказано. Соотношение (2.14), определяющее аффинную структуру множества V_σ , доказывается аналогично.

3. В некоторых особо точных приборах (например, радиотелескопах), кроме требования прочности накладывается требование, чтобы поле смещений (деформаций) имело заданный вид. В связи с этим здесь предлагается следующая модельная задача оптимального проектирования. Для термоупругого тела, рассмотренного в п. 1, требуется отыскать такое распределение упругих модулей, чтобы в состоянии равновесия было реализовано заданное поле деформаций при минимальном уровне напряжений. Ниже будет показано, что поставленная задача относится к хорошо исследованному классу задач выпуклого программирования [10].

Уровень напряжений, соответствующих проекту λ , будем измерять величиной

$$(3.1) \quad p(\lambda) = \|\sigma(\lambda)\|, \quad \|\sigma\| = \max_{(\cdot) \in V} \Gamma(\sigma(\cdot))$$

$$\Gamma(\sigma) = (c_1 \sigma_{kk} \sigma_{nn} + c_2 s_{ij} s_{ij})^{1/2}$$

где c_1, c_2 — заданные положительные числа, s — девиатор тензора σ . Свойство положительной определенности и однородности нормы $\|\sigma\|$ очевидно, а неравенство треугольника для нее вытекает из свойства $\Gamma(\sigma' + \sigma'') \leq \Gamma(\sigma') + \Gamma(\sigma'')$ и свойств операции \max по области V .

Пользуясь законом Гука (1.4) и свойством (1.11) аффинности множества Λ_ε , получаем свойство аффинности множества соответствующих напряжений

$$(3.2) \quad \lambda' \in \Lambda_\varepsilon, \lambda'' \in \Lambda_\varepsilon, t\lambda' + (1-t)\lambda'' \in Q_+ \Rightarrow \sigma(t\lambda' + (1-t)\lambda'') = t\sigma(\lambda') + (1-t)\sigma(\lambda'')$$

Соотношения (3.1), (3.2) позволяют построить следующую цепочку неравенств, которая доказывает выпуклость функционала $p(\lambda)$ на Q_+

$$\begin{aligned} p(t\lambda' + (1-t)\lambda'') &= \|\sigma(t\lambda' + (1-t)\lambda'')\| = \\ &= \|t\sigma(\lambda') + (1-t)\sigma(\lambda'')\| \leq t\|\sigma(\lambda')\| + (1-t)\|\sigma(\lambda'')\| = \\ &= tp(\lambda') + (1-t)p(\lambda''), \quad t > 0, (1-t) > 0 \end{aligned}$$

Следовательно, поставленная задача оптимального проектирования

$$(3.3) \quad p(\lambda) \rightarrow \min_{\lambda \in \Lambda_\varepsilon}$$

является задачей о минимизации выпуклого функционала $p(\lambda)$ на выпуклом множестве Λ_ε , т. е. задачей выпуклого программирования [10]. Заметим, что задача проектирования оптимального по жесткости тела при заданном поле напряжений решается аналогично и также является задачей выпуклого программирования.

4. В качестве примера рассмотрим задачу о нахождении оптимального распределения модуля Юнга $E(x)$ по длине термоупругой балки из условия минимума максимального значения модуля напряжений σ при заданном распределении прогиба $w(x)$. Жестко заделанная на концах $x=0, x=l$ балка находится в равновесии под действием поперечной распределенной нагрузки $q(x)$ и температурного поля $T(x, z)$. Принимая гипотезу плоских сечений и полагая, что температурное поле согласуется с условиями чистого изгиба, имеем уравнения равновесия в виде [11]

$$(4.1) \quad (Ef)'' = q; \quad f = Iw'' - m, \quad I = \int_A z^2 dA, \quad m = \int_A \alpha T z dA$$

Здесь A — область, вообще говоря, переменного сечения балки.

Интегрируя уравнение (4.1), получаем закон распределения модуля Юнга

$$(4.2) \quad E(x) = \frac{c_1 x + c_2 + \varphi(x)}{f(x)}, \quad \varphi(x) = \int_0^x dt \int_0^t q(s) ds$$

для значений x , при которых $f(x) \neq 0$. В дальнейшем будем считать, что заданная функция $f(x)$ имеет конечное число корней на $[0, l]$. Неопределенные постоянные c_1, c_2 должны удовлетворять условию $E(x) > 0$, т. е.

$$(4.3) \quad \text{sign}(c_1x + c_2 + \varphi(x)) = \text{sign} f(x)$$

Свойство аффинности множества распределений $E(x)$, построенных по (4.2), (4.3), можно проверить непосредственно.

Возможность удовлетворить условию (4.3) зависит от заданных распределений w, m . Если прогиб $w(x)$ реализуется при некотором распределении $E(x) > 0$, то условие (4.3) выполняется хотя бы для одной пары значений c_1, c_2 . Если же условие (4.3) допускает произвол в выборе параметров c_1, c_2 , то его можно использовать для снижения уровня напряжений

$$(4.4) \quad \|\sigma\| = \max_{x \in [0, l]} \max_{(y, z) \in A} |\varphi(x, y, z)| \rightarrow \min_{c_1, c_2}$$

$$(\sigma = (c_1x + c_2 + \varphi(x)) \Phi \text{ при } f \neq 0; \sigma = 0 \text{ при } f = 0; \Phi = (zw'' - \alpha T)/f)$$

В выпуклости задачи (4.3), (4.4) можно убедиться непосредственно проверкой.

Ниже приводится аналитическое решение этой задачи при следующих исходных данных:

$$(4.5) \quad q(x) = q = \text{const}; \quad T(x, z) = \theta(x) \cdot z; \quad W(x) = W_0 = \text{const}$$

где $W(x)$ — момент сопротивления балки в сечении x . При постоянной распределенной внешней нагрузке изгибающий момент M распределен по параболическому закону, поэтому исходные данные для функции $f = ME^{-1}$ должны соответствовать одному из следующих случаев:

$$(4.6) \quad f(x) > 0, x \in]0, x_0[; f(x) < 0, x \in]x_0, l[; x_0 \in]0, l[$$

$$(4.7) \quad f(x) < 0, x \in]0, x_0[; f(x) > 0, x \in]x_0, l[; x_0 \in]0, l[$$

$$(4.8) \quad f(x) \geq 0, x \in [0, l]$$

$$(4.9) \quad f(x) \leq 0, x \in [0, l]$$

$$(4.10) \quad f(x) > 0, x \in]0, x_1[; f(x) < 0, x \in]x_1, x_2[; f(x) > 0, x \in]x_2, l[; \\ 0 < x_1 < x_2 < l$$

$$(4.11) \quad f(x) < 0, x \in [0, l], x \neq x_0, f(x_0) = 0, x_0 \in [0, l]$$

Подставляя (4.5) в (4.4), получаем задачу

$$(4.12) \quad \|\sigma\| = W_0^{-1} \max_{x \in [0, l]} |r(c_1, c_2, x)| \rightarrow \min_{c_1, c_2}$$

$$r = c_1x + c_2 + 1/2qx^2; \quad \text{sign} r(c_1, c_2, x) = \text{sign} f(x), x \in [0, l]$$

После решения этой задачи будут найдены неопределенные постоянные c_1, c_2 , фигурирующие в выражении (4.2) для оптимального распределения модуля Юнга в балке

$$(4.13) \quad E(x) = (Iw'' - m)^{-1}r, \quad r = c_1x + c_2 + 1/2qx^2$$

Как будет видно ниже, ход решения задачи (4.12) зависит от того, какому из условий (4.6) — (4.11) подчинена функция f . В случае (4.6) задача (4.12) подстановкой $c_1 = -tx_0^{-1} - 1/2x_0q, c_2 = t$ приводится к виду

$$\|\sigma\| = W_0^{-1} \max_{x \in [0, l]} |S(x, t)| \rightarrow \min_{t \geq 1/2qx_0l}$$

$$S(x, t) = (x - x_0)(1/2qx - tx_0^{-1})$$

Заметим, что если фиксировать $x \in]0, x_0[$, то $S(x, t) > 0$ и возрастает по t . Если фиксировать $x \in]x_0, l[$, то $S(x, t) < 0$ и убывает по t . Поэтому глобальный оптимум достигается при $t = 1/2qx_0l$, а оптимальное распределение модуля Юнга (4.13) имеет вид (4.13) при $r = 1/2q(x - x_0)(x - l)$.

Случай (4.7) сводится к рассмотренному изменением направления и начала отсчета оси Ox .

В случае (4.8) параметры c_1, c_2 выбираются так, чтобы график параболы $r = r(x)$ лежал выше отрезка $[0, l]$ оси Ox . Это может быть достигнуто, если вся парабола лежит выше оси Ox , либо если точки пересечения параболы с осью лежат левее отрезка $[0, l]$, либо если эти точки лежат правее отрезка $[0, l]$. Перечисленные требования выполняются на множестве N , образованном объединением следующих трех множеств:

$$N = \left\{ c_2 > \frac{1}{2q} c_1^2 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2q} c_1^2 > c_2 > 0; c_1 > 0 \right\} \cup \\ \cup \left\{ \frac{c_1^2}{2q} > c_2 > -c_1l - \frac{1}{2}ql^2; c_1 < -ql \right\}$$

Это множество (см. фигуру) ограничено снизу линией, составленной из прямой 1: $c_2 = -c_1 l - 1/2 q l^2$ на отрезке $c_1 \in]-\infty, -q l[$, параболы 2: $c_2 = 1/2 q c_1^2$ на отрезке $c_1 \in]-q l, 0[$ и оси $O c_1$ на полупрямой $c_1 \in [0, \infty[$. Максимальный модуль напряжений реализуется на одном из концов балки

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &= W_0^{-1} \max_{x \in [0, l]} |r(c_1, c_2, x)| = W_0^{-1} \max \{|r(c_1, c_2, 0)|, |r(c_1, c_2, l)|\} = \\ &= W_0^{-1} \max \{c_2, c_2 + (c_1 + 1/2 q l) l\} \end{aligned}$$

На фигуре построено множество L параметров c_1, c_2 , при которых $\|\sigma\| \leq 1/8 W_0^{-1} q l^2$; множество L ограничено сверху ломаной, составленной из прямой 3 $c_2 = 1/8 q l^2$ для $c_1 \in]-\infty, -1/2 q l[$ и прямой 4: $c_2 = 1/8 q l^2 - (c_1 + 1/2 q l) l$, $c_1 \in]-1/2 q l, \infty[$. Видно, что множества N и L имеют одну общую точку $c_1^* = -1/2 q l$, $c_2^* = 1/8 q l^2$, которая и определяет оптимальное распределение модуля Юнга для случая (4.8) в виде (4.13) при $r = 1/2 q (x - 1/2 l)^2$.

Рассматривая случай (4.9), можно показать, что каждая парабола $r = c_1 x + c_2 + 1/2 q x^2$, принимающая неположительные значения на отрезке $[0, l]$, имеет график, располагающийся не выше графика параболы $1/2 q x (x - l)$, проходящего через точки $(0, 0)$; $(l, 0)$. Поэтому $c_1^* = -1/2 q l$, $c_2^* = 0$ — оптимальные значения, а закон распределения модуля Юнга для случая (4.9) соответствует (4.13) при $r = 1/2 q x (x - l)$.

Наконец, условия (4.10), (4.11) однозначно определяют значения параметров c_1, c_2 , т. е. в каждом из этих случаев задание распределения прогибов не оставляет произвола для снижения уровня напряжений. Распределения модуля Юнга имеют вид (4.13) при $r = 1/2 q (x - x_1)(x - x_2)$, $r = 1/2 q (x - x_0)^2$ соответственно.

Результаты, полученные в пп. 1, 2, могут быть проиллюстрированы в рассматриваемом примере. При этом необходимо иметь в виду, что изгибающий момент M — обобщенное напряжение, а изменение кривизны κ — обобщенная деформация.

Введем энергетическое скалярное произведение, аналогичное (1.3)

$$(4.14) \quad [M, M^{(1)}]_{\beta} = \int_0^l M M^{(1)} \beta I^{-1} dx, \quad \beta = E^{-1}$$

Пространству Ψ (1.8) самоуравновешенных напряжений здесь соответствует пространство изгибающих моментов, удовлетворяющих однородным уравнениям равновесия $M'' = 0$

$$(4.15) \quad \Psi = \{M \mid M = c_1 x + c_2, c_1 \in R, c_2 \in R\}$$

Соотношения Дюгамеля — Неймана (1.4) принимают вид

$$(4.16) \quad M = \beta^{-1} I (\kappa - \kappa^*), \quad \kappa^* = m I^{-1}, \quad \kappa = w''$$

Выразив отсюда w'' , после интегрирования и подстановки граничных условий $w(l) = w'(l) = 0$ получаем систему уравнений

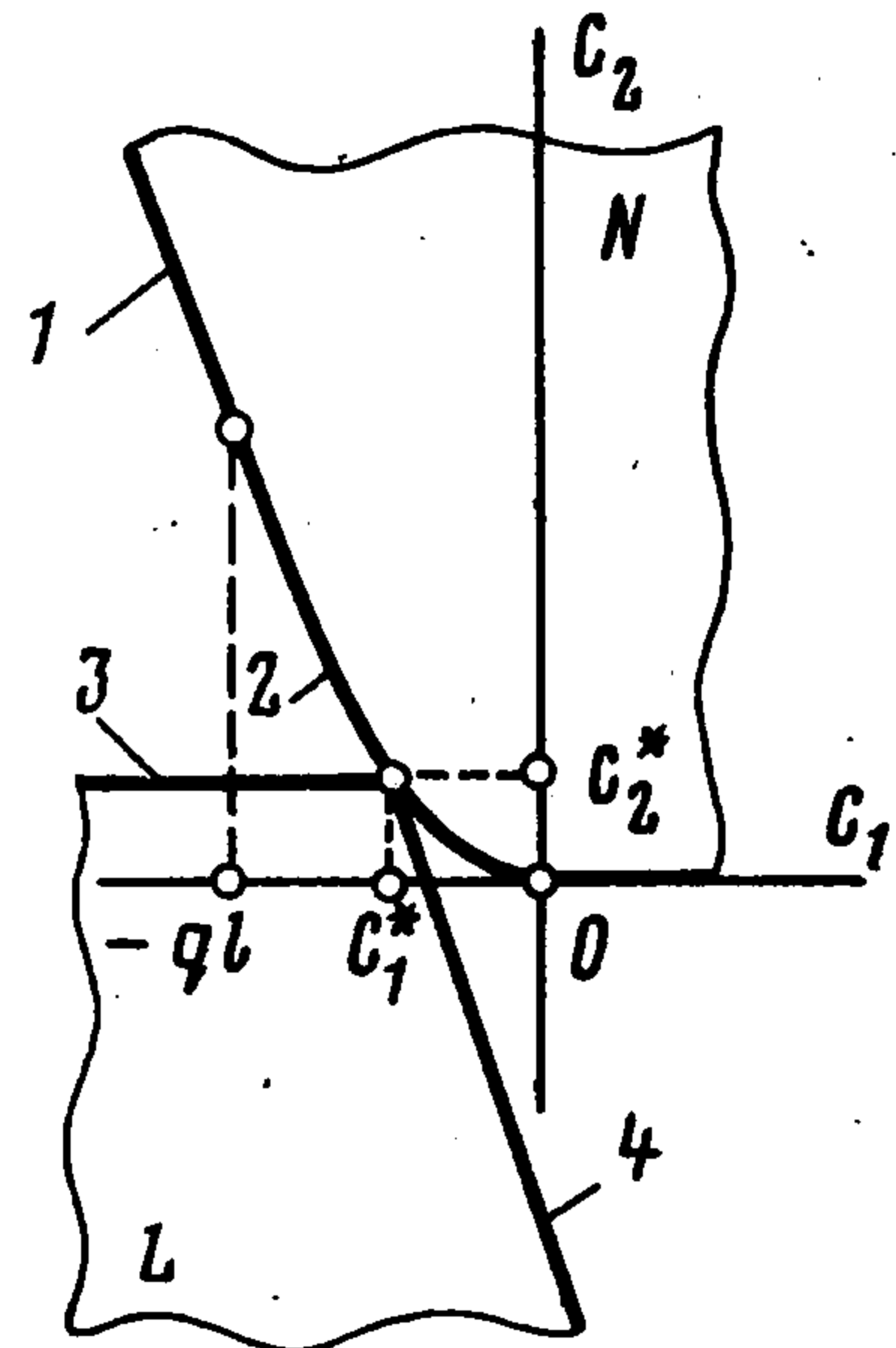
$$(4.17) \quad [M, x]_{\beta} = a_1, \quad [M, 1]_{\beta} = a_2, \quad M = c_1 x + c_2 + \Phi, \quad a_k = - \int_0^l x^{2-k} m I^{-1} dx$$

Наряду с проектом распределения податливости β и соответствующим изгибающим моментом M рассмотрим другой проект $(\beta + \gamma)$ с изгибающим моментом $M + \Delta M$. Используя систему (4.17), получаем

$$(4.18) \quad [\Delta M, x]_{\beta+\gamma} = [M, x]_{\gamma}, \quad [\Delta M, 1]_{\beta+\gamma} = [M, 1]_{\gamma} \\ (\Delta M = x \Delta c_1 + \Delta c_2)$$

При заданном изменении проекта γ из этой системы однозначно определяются $\Delta c_1, \Delta c_2$, поскольку ее дискриминант отличен от нуля по неравенству Коши — Шварца. Из системы (4.18) следует, что для равенства изгибающих моментов в проектах β и $\beta + \gamma$ балки необходимо и достаточно, чтобы

$$(4.19) \quad [M, M^{(1)}]_{\gamma} = 0, \quad \forall M^{(1)} \in \Psi \Leftrightarrow \Delta M = 0$$



Условие (4.19) с точностью до обозначений совпадает с формулой (2.14), раскрывает аффинную структуру проектов с одинаковыми полями напряжений и может быть использовано в задаче оптимизации прогиба балки при заданном напряженном состоянии.

Пусть проект распределения податливости β претерпевает бесконечно малое изменение $\delta\beta$, тогда изменение кривизны, вычисленное по (4.16), будет

$$\delta w'' = F^{-1}\delta(M\beta)$$

Поскольку $\delta M \in \Psi$ и в силу кинематических граничных условий $\delta w'' = 0 \Leftrightarrow \delta w = 0$, условие неизменности прогиба при малом изменении проекта имеет вид

$$(4.20) \quad \delta w = 0 \Leftrightarrow g \in \Psi; \quad g = \delta\beta \cdot \beta^{-1}M$$

В то же время для неизменности напряжений, как это следует из (4.19), необходимо и достаточно, чтобы относительное изменение податливости g было ортогонально Ψ , т. е.

$$(4.21) \quad \delta M = 0 \Leftrightarrow [g, M^{(1)}]_{\beta} = 0, \quad \forall M^{(1)} \in \Psi$$

Соотношения (4.20), (4.21) соответствуют результату п. 2 (см. (2.11)), согласно которому любое малое изменение проекта $\delta\beta$ можно представить в виде суммы изменения $\delta\beta'$, не меняющего смещений, и $\delta\beta''$, не меняющего напряжений. Этот результат может быть использован в новых задачах оптимального проектирования, учитывающих одновременно и снижение уровня напряжений и уменьшение уровня деформаций. Например, из него следует, что найдется такое малое изменение проекта, при котором снизится и уровень напряжений $\|\sigma(\beta)\|$, и уровень деформаций $\|\varepsilon(\beta)\|$. Это связано с тем, что градиенты функционалов $\|\sigma(\beta)\|$ и $\|\varepsilon(\beta)\|$ лежат во взаимно дополняющих подпространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.
2. Лауров Н. А., Лурье К. А., Черкаев А. В. Неоднородный стержень экстремальной жесткости кручения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, с. 86—92.
3. Петрова И. С., Рикардс Р. В. Оптимизация стержня с переменным модулем упругости.— Механика полимеров, 1974, № 2, с. 277—284.
4. Rammerstorfer F. On the optimal distribution of the Young's modulus of a vibrating, prestressed beam.— J. Sound and Vibr., 1974, v. 37, No. 1, p. 140—145.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
7. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 216 с.
8. Кунташев П. А., Немировский Ю. В. О решении в напряжениях задачи термоупругости неоднородных тел по методу возмущений.— ПММ, 1985, т. 49, вып. 2, с. 344—347.
9. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1974. 160 с.
10. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
11. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.

Красноярск

Поступила в редакцию
26.VI.1984