

УДК 539.319

## ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НАГРЕВАЕМОГО ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Бойко М. С.

Решается обобщенная динамическая задача термоупругости для полупространства, нагреваемого лазерным излучением. Получены выражения для смещений в релеевской волне. Исследуется асимптотика решения в бесконечно удаленной точке. Показано, что величина смещений на фронтах волн существенно зависит от значения скорости распространения тепла.

**1. Постановка задачи.** Пусть на круговую область плоской границы упругого полупространства, положение каждой точки которого определяется координатами  $\rho, z, \theta_1$  цилиндрической системы координат, в момент времени  $\tau = 0$  падает поток лучистой энергии с объемной плотностью мощности излучения

$$(1.1) \quad q_v(\rho, \tau) = q_1(\rho) H(\tau), \quad q_1(\rho) = \begin{cases} q_0, & 0 \leq \rho \leq R_0 \\ 0, & \rho > R_0 \end{cases}$$

( $H(\tau)$  — функция Хевисайда). Требуется определить величину упругих напряжений и смещений в полупространстве при поглощении лучистой энергии. Изменение температурного поля, обусловленное деформацией, не учитывается.

Решение поставленной задачи сводится к решению системы уравнений [1]

$$(1.2) \quad \left(\Delta - c_1^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) \Phi = mt, \quad \left(\Delta - c_2^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) \Psi = 0, \quad \left(\Delta - \frac{l}{a} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) t = 0$$

$$l = 1 + t_r \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad m = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_t$$

Здесь  $\Phi, \Psi$  — потенциалы смещений,  $t$  — температура,  $c_1, c_2$  — скорости продольных и поперечных волн,  $t_r$  — время релаксации теплового потока,  $a$  — коэффициент температуропроводности,  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе,  $\alpha_t$  — коэффициент теплового расширения,  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Решения системы должны удовлетворять следующим граничным условиям и начальным данным:

$$(1.3) \quad \sigma_{zz} = \sigma_{\rho z} = 0, \quad -\lambda_q \frac{\partial t}{\partial z} = \eta l q_v$$

$$(1.4) \quad \Phi = \Psi = t = \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 0$$

( $\sigma_{ij}$  — тензор термоупругих напряжений,  $\eta$  — поглощательная способность,  $\lambda_q$  — коэффициент теплопроводности).

**2. Построение решения.** Решение задачи будем строить методом контурных интегралов [2]. Представим искомое решение в виде преобразования

$$(2.1) \quad \Phi = \int_0^{\infty} \bar{A}_0(k, z) k J_0(k\rho) dk, \quad \Psi = \int_0^{\infty} \bar{A}_1(k, z) k J_1(k\rho) dk,$$

$$t = \int_0^{\infty} \bar{A}_2(k, z) k J_0(k\rho) dk, \quad \bar{A}_j(k, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} A_j(p, k, z) e^{p\tau} dp,$$

$$j = 0, 1, 2$$

Неизвестные функции  $A_j$  определяются путем подстановки соотношений (2.1) в (1.2)—(1.4) с последующим решением обыкновенных дифференциальных уравнений аналогично тому, как это сделано в [2]. Запишем окончательные выражения для  $A_j$

$$(2.2) \quad A_0 = T_1 e^{-\beta_1 z} + T_2 e^{-dz}, \quad A_1 = T_3 e^{-\beta_2 z}, \quad A_2 = \frac{B_1}{pkd} e^{-dz}$$

$$T_1 = \frac{T_2}{T_0} [(k^2 + \beta_2^2)^2 - 4k^2 \beta_2 d], \quad T_2 = \frac{bc_1^2}{kp^2 d} \varphi_1(p) J_1(kR_0)$$

$$T_3 = \frac{2T_2}{T_0} (k^2 + \beta_2^2) (\beta_1 - d) k, \quad T_0 = 4k^2 \beta_1 \beta_2 - (k^2 + \beta_2^2)^2$$

$$a_0 = \frac{c_1^2}{a}, \quad a_1 = \frac{c_1^2}{c_q^2} - 1, \quad \beta_l^2 = k^2 + \frac{p^2}{c_l^2}, \quad l = 1, 2;$$

$$d^2 = k^2 + \frac{p}{a} + \frac{p^2}{c_q^2}$$

$$\varphi_1(p) = \frac{1}{a_0 + a_1 p} \left( 1 + \frac{ap^2}{c_q^2} \right)$$

( $c_q$  — скорость распространения тепла). Ветви радикалов в (2.2) фиксированы условием  $\arg \beta_1 = \arg \beta_2 = \arg d = 0$  при  $p > 0$ .

Выражения для составляющих упругих смещений запишутся в виде

$$(2.3) \quad u_\rho = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [kT_1 e^{-\beta_1 z} + kT_2 e^{-dz} - \beta_2 T_3 e^{-\beta_2 z}] e^{p\tau} dp \right\} \times$$

$$\times k J_1(kR_0) J_1(k\rho) dk$$

$$u_z = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [kT_3 e^{-\beta_2 z} - \right.$$

$$\left. - T_1 \beta_1 e^{-\beta_1 z} - dT_2 e^{-dz}] e^{p\tau} dp \right\} k J_1(kR_0) J_0(k\rho) dk$$

Из анализа выражений (2.2) следует, что  $A_j(p, k, z)$  — аналитические функции комплексного переменного  $p$  в области ( $G: \operatorname{Re} p > -a_0 a_1^{-1}$ ) при  $c_q > c_1$  и в области ( $G: \operatorname{Re} p > 0$ ) при  $c_q \leq c_1$ . Аналитическое продолжение  $A_j(p, k, z)$  на левую полуплоскость — многозначная функция, имеющая точки разветвления

$$p_{1,2} = \pm i k c_1, \quad p_{3,4} = \pm i k c_2, \quad p_{5,9} = -\frac{c_q^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{c_q^4}{4a^2} - k^2 c_q^2}$$

и простые полюса

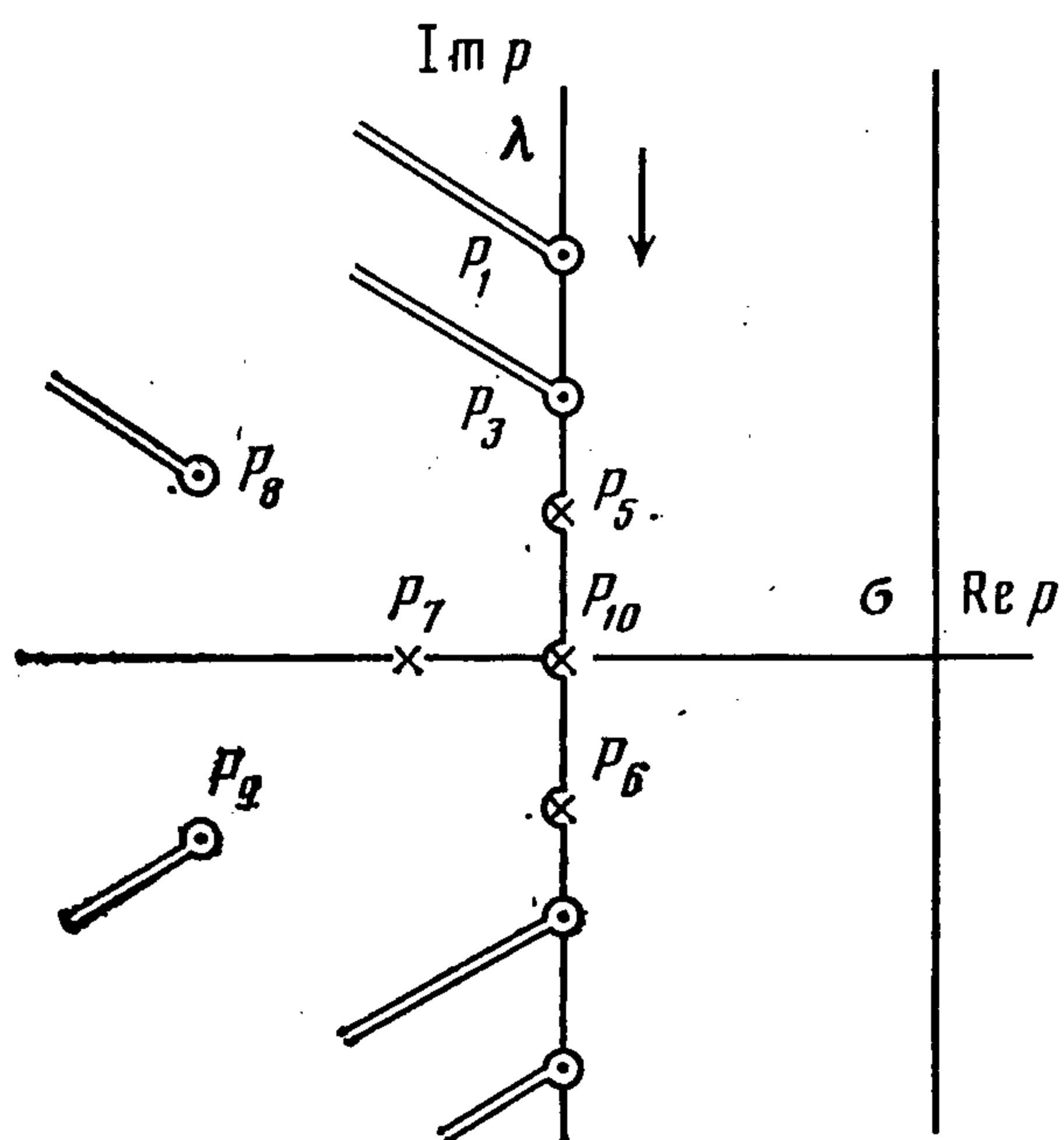
$$p_{5,6} = \pm i k c_R, \quad p_7 = -a_0/a_1, \quad p_{10} = 0$$

Будем рассматривать на верхнем листе многолистной римановой поверхности ту ветвь многозначной функции  $A_j(p, k, z)$ , которая является аналитическим продолжением этой функции, первоначально заданной в области  $G$ . Каждый из листов римановой поверхности представляет собой плоскость  $p$  с разрезами, проведенными так, как это показано на фиг. 1.

Следуя [3], представим все поле смещений в виде

$$U = U_0 + U_R + U_\lambda$$

где  $U_0$  описывает статическую часть задачи и определяется вкладом полюса  $p_{10} = 0$ ,  $U_R$  описывает релеевскую волну и определяется вкладом



Фиг. 1

полюсов  $p_{5,6} = \pm ikc_R$ , являющихся решением уравнения  $T_0 = 0$ ,  $U_\lambda$  описывает объемные волны и определяется как результат интегрирования по контуру  $\lambda$ , показанному на фиг. 1.  $U_0$  из дальнейшего рассмотрения исключаем, так как исследуется лишь динамическая часть задачи.

3. Определение поля смещения в релеевской волне. Если при деформации исходного контура интегрирования в контур  $\lambda$  происходит пересечение полюсов  $p_{5,6}$ , то необходимо учитывать вклад этих полюсов, который определяет волну Релея. Опреде-

ляя вычеты в этих полюсах, имеем

$$(3.1) \quad U_{\rho R} = \frac{bc_1^2 c_2^2}{c_R^3 c_0} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty \left\{ \frac{4\eta_1}{ix} - \frac{1 + \eta_1^2}{id_1} \right\} e^{-\mu_1 x} + \right. \\ \left. + \eta_1 (1 + \eta_1^2) \left( \frac{\eta_1}{ix} - \frac{\eta_2}{id_1} \right) e^{-\mu_2 x} \right\} \varphi_1(ix) J_1\left(\frac{xR_0}{c_R}\right) J_1\left(\frac{x\rho}{c_R}\right) dx \right] \\ U_{zR} = \frac{bc_2^2}{4c_R^3 c_0} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty \left\{ \left( \frac{4\eta_2}{ix} - \frac{\eta_1^2 + 1}{id} \right) e^{-\mu_1 x} \eta_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 + \eta_1^2) \left( \frac{1}{ix} - \frac{\eta_1}{id} \right) e^{-\mu_2 x} \right\} \varphi_1(ix) J_1\left(\frac{xR_0}{c_R}\right) J_0\left(\frac{x\rho}{c_R}\right) dx \right] \\ d_1 = \sqrt{x(ia_3 + a_2 x)}, \quad a_2 = \frac{c_R^2}{c_q^2} - 1, \quad a_3 = \frac{c_R^2}{a} \\ \eta_k^2 = \frac{c_k^2 - c_R^2}{c_k^2}, \quad \mu_k = \frac{z\eta_k}{c_R} + i\tau, \quad k = 1, 2 \\ c_0 = \frac{\eta_2^2 - \gamma^2 \eta_1^2}{\eta_1 \eta_2} - \eta_1 - 1, \quad \gamma = \frac{c_2}{c_1}$$

Рассмотрим частный случай точечного источника, получающийся из (3.1) посредством предельного перехода

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} U_{\rho R} = U_{\rho R}^\circ, \quad \lim_{R_0 \rightarrow 0} U_{zR} = U_{zR}^\circ$$

При этом ( $W$  — мощность источника оптического излучения)

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} bR_0 = b_1 = \frac{\eta W m}{\lambda_q}$$

Получить выражения для составляющих смещений в замкнутом виде не представляется возможным. Поэтому цель дальнейшего исследования — получение приближений для  $U_{\rho R}^\circ$  и  $U_{zR}^\circ$ . Рассмотрим интеграл

$$(3.2) \quad \Phi(\lambda_2) = \int_0^\infty t^\nu e^{-\lambda_2 t} J_1(\lambda_1 t) f(t) dt$$

Лемма. Пусть

$$f(t) \in C^\infty([0; \infty]); \quad \operatorname{Re} \lambda_2 > 0, \quad \nu > -2$$

Тогда при  $|\lambda_2| \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое разложение

$$(3.3) \quad \Phi(\lambda_2) = \sum \frac{f^n(0)}{n!} \frac{\lambda_1}{2} \Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right) \frac{1}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{\nu_1}} \times \\ \times F\left(\nu_1, \frac{2-n-\nu}{2}, 2, \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\right), \quad \nu_1 = \frac{2+n+\nu}{2}$$

( $F(a, b, c, z)$  — гипергеометрическая функция,  $\Gamma(z)$  — гамма-функция).

*Доказательство.* Возьмем  $t = t_0$ , такое, что  $t_0 < 1$ .

Тогда

$$\left| \int_{t_0}^{\infty} t^{\nu+n} e^{-\lambda_2 t} J_1(\lambda_1 t) dt \right| < \int_{t_0}^{\infty} |t^{\nu+n} e^{-\lambda_2 t}| dt < \int_{t_0}^{\infty} t^{\nu+n} e^{-\operatorname{Re}(\lambda_2 t)} dt = F_1(\lambda_2)$$

Последний интеграл в силу леммы 1.1 [4] при  $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$  имеет оценку

$$F_1(\lambda_2) < c \exp[\operatorname{Re}(\lambda_2 t_0)]$$

Рассмотрим интеграл

$$\Phi_n(\lambda_2) = \int_0^{t_0} t^{n+\nu} e^{-\lambda_2 t} J_1(\lambda_1 t) dt$$

Представим  $\Phi_n(\lambda_2)$  в виде разности интегралов по полуоси  $[0, \infty)$  и  $[t_0, \infty)$ . Тогда первый интеграл находится из таблиц интегралов [5], в то время как для второго справедлива оценка, полученная выше. Разлагая на отрезке  $[0, t_0]$  функцию  $f(t)$  в равномерно сходящийся ряд Маклорена и почленно интегрируя полученное выражение, приходим к формуле (3.3).

Интегралы, входящие в (3.1) подстановкой  $t = a_0^{-1}x$  приводятся к виду (3.2). При этом  $\lambda_2 = a_0 \mu_k$ ,  $k = 1, 2$ . Следует отметить, что для большинства материалов величина  $a_0 = c_1^2 a_0^{-1}$  имеет порядок  $10^{12}$ , а величина  $\operatorname{Re} \lambda_2 \sim 10^8 z$ , что позволяет использовать асимптотическое разложение (3.3) с удовлетворительной для практики точностью при любых, даже очень малых, величинах  $z$ . Ограничиваясь главным членом разложения, запишем выражения для смещений.

$$U_{pR}^{\circ} = b_2 \operatorname{Re} [Q_1 + P_1 + \eta_1(\eta_1^2 + 1)Q_2 + \eta_1 \eta_2 P_2]$$

$$U_{zR}^{\circ} = b_2 \operatorname{Re} \left[ \eta_2 Q_1 - \eta_1 P_1 - \frac{\eta_1^2 + 1}{\eta_1} Q_2 - \eta_1 P_2 \right]$$

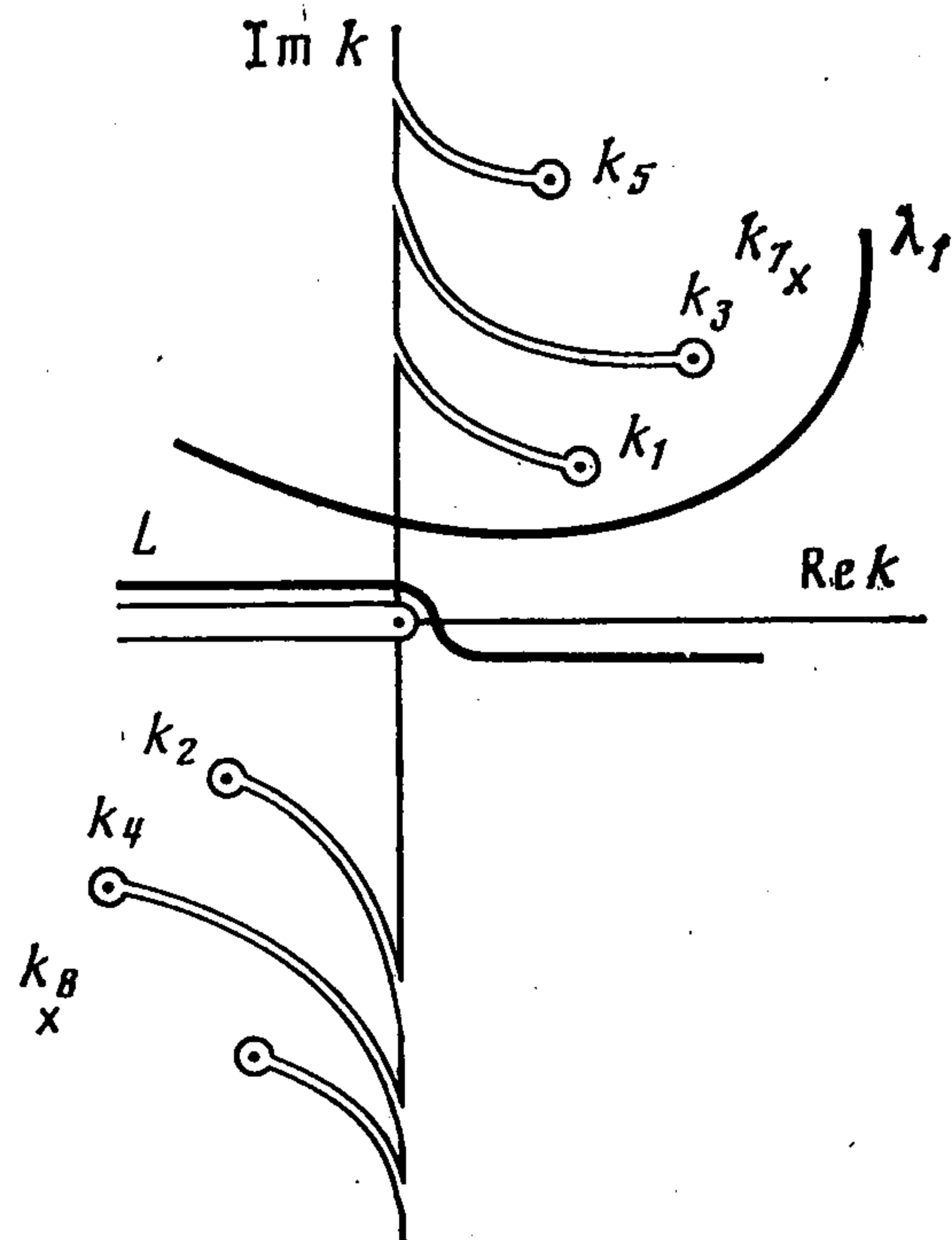
$$Q_k = 4c_R \eta_1 \frac{\sqrt{(\mu_k c_R)^2 + \rho^2} - \mu_k c_R}{\rho \sqrt{(\mu_k c_R)^2 + \rho^2}}$$

$$P_k = \frac{3}{16\rho} \sqrt{\frac{\pi}{a_3} c_R^3 (\eta_1^2 + 1) [(\mu_k c_R)^2 + \rho^2]^{-5/4}}$$

$$F\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 2, \frac{\rho^2}{(\mu_k c_R)^2 + \rho^2}\right), \quad k = 1, 2, \quad b_2 = \frac{b_1}{4a_0(\eta_1^2 + 1)c_0}$$

4. Асимптотика  $U_\lambda$  при  $R \rightarrow \infty$   $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ . Фиксируем ветви радикалов в (2.2) условием  $\operatorname{Re}(\beta_1, \beta_2, d) > 0$ . Это позволяет изменить порядок интегрирования в (2.3), если только путь интегрирования на плоскости комплексного переменного  $p$  совпадает с путем  $\lambda$  (фиг. 1), проходящим вдоль мнимой оси. Рассматривая исследуемые интегралы на плоскости комплексного переменного  $k$ , представим решение в другой форме, которая, например, для первого слагаемого в (2.1) примет вид

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left[ \int_L A_0(p, k, z) k H_0(k\rho) dk \right] e^{p\tau} dp$$



Фиг. 2

Путь интегрирования  $L$  на плоскости комплексного переменного  $k$  показан на фиг. 2. Особые точки, отмеченные на фиг. 2

$$k_{1,2} = \pm i \frac{p}{c_1}, \quad k_{3,4} = \pm i \frac{p}{c_2}$$

$$k_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{p}{a} + \frac{p^2}{c_q^2}}, \quad k_{7,8} = \pm i \frac{p}{c_R}$$

Для наглядности геометрических построений все особенности подынтегральных выражений смещены с действительной оси.

Деформируя исходный путь  $L$  в путь  $\lambda_1$ , совпадающий с перевальным, определяем асимптотику решения по методу перевала.

$$(4.1) \quad U_l = \frac{bc_1^2}{2\pi R} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left[ 4p^{-1}\gamma^2 \sin^2 \theta \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta} + \frac{(1 - 2\gamma^2 \sin^2 \theta)^2}{\sqrt{p[a_0 + (a_1 + \cos^2 \theta)p]}} \right] \frac{\operatorname{tg} \theta \Phi_1(p)}{T_l}, \quad J_1(i\gamma_1 p) e^{p\tau_1} dp$$

$$(4.2) \quad U_t = \frac{bc_2^2}{2\pi R} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos 2\theta}{p} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \theta}}{\sqrt{p[a_0\gamma^2 + (a_4 + \cos^2 \theta)p]}} \cos^2 \theta \Phi_1(p) J_1(\gamma_2 p) e^{p\tau_2} dp$$

Здесь:

$$U_l = \frac{U_{\rho l}}{\sin \theta} = \frac{U_{z l}}{\cos \theta}, \quad U_t = \frac{U_{\rho t}}{\cos \theta} = \frac{U_{z t}}{\sin \theta}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\rho}{z}$$

$$T_l = (1 - 2\gamma^2 \sin^2 \theta)^2 + 4\gamma^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta}$$

$$T_t = \cos^2 2\theta + 4 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \theta}$$

$$a_4 = \frac{C_2^2}{c_q^2}, \quad \gamma_j = \frac{R_0 \sin \theta}{c_j}, \quad \tau_j = \tau - \frac{R}{c_j}, \quad j = 1, 2$$

$U_{\rho l}, U_{z l}, U_{\rho t}, U_{z t}$  — соответствующие слагаемые поля смещений в (2.3), описывающие поля продольных и поперечных волн.

Обозначим через  $U_q$  ту часть поля смещений в (2.3), которая описывает упругую волну, распространяющуюся со скоростью распространения тепла  $c_q$ . Асимптотика  $U_q$  при  $R \rightarrow \infty$

$$U_q = b_2 c_1^2 \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{J_1(id_0 R_0 \sin \theta)}{p^2} e^{-d_0 R + p\tau} \Phi_1(p) dp, \quad d_0^2 = \frac{p}{a} + \frac{p^2}{c_q^2}$$

Для случая точечного источника имеем

$$U_l = \frac{b_1 c_1}{RT_l a_0} \left\{ \left[ 2a_1^{-1} \gamma^2 \sin \theta \sin 2\theta \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta} \times \right. \right.$$

$$\times \left( H(\tau_1) - \exp\left(-\frac{a_0}{a_1} \tau_1\right) \right) + (1 - 2\gamma^2 \sin^2 \theta)^2 \times$$

$$\left. \left. \times \frac{\cos \theta}{a_0 \sqrt{a_1 + \cos^2 \theta}} \Phi_1(\tau_1) - \frac{1}{a_1} \exp\left(-\frac{a_0}{a_1} \tau_1\right) \right] \right\}$$

$$U_t = \frac{b_1 c_2}{T_t a_0 R} \left[ \frac{\sin 4\theta}{4} H(\tau_2) - \frac{\sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \theta}}{2a_0 \sqrt{a_1 + \cos^2 \theta}} \sin 2\theta \Phi_2(\tau_2) \right]$$

$$U_q^1 = \frac{b_1 c_1}{Ra_0} \left[ \exp\left(-\frac{a_0}{a_1} \tau_3\right) + \Phi_3\left(\tau, \frac{R}{c_q}\right) \right], \quad c_q \leq c_1$$

$$U_q^1 = \frac{b_1 c_1}{Ra_0} \left[ \exp\left(-\frac{a_0}{a_1} \tau_4\right) + \Phi_3\left(\tau, \frac{R}{c_q}\right) \right], \quad c_q > c_1$$

Здесь:

$$\Phi_{1,2} = \int_0^{a_{5,6}} \frac{e^{-x\tau_{1,2}}}{\sqrt{x(a_{5,6} - x)}} \Phi_1(-x) dx$$

$$\Phi_2 \left( \tau, \frac{R}{c_q} \right) = \int_0^{a_7} \frac{\exp(-d_0 R - x\tau)}{\sqrt{x(a_7 - x)}} \varphi_1(-x) dx$$

$$a_5 = \frac{a_0}{a_1 + \cos^2 \theta}, \quad a_6 = \frac{a_0 \gamma^2}{a_4 + \cos^2 \theta}$$

$$a_7 = \frac{c_q^2}{a}, \quad \tau_3 = \tau + \frac{R}{c_q}, \quad \tau_4 = \tau - \frac{R}{c_q}$$

Представляет интерес исследование распространения разрывов упругого поля смещений. Разрывы поля смещений обязаны неравномерной сходимости интегралов (4.1)—(4.2) на бесконечном пределе. Обозначим через  $W_l$  и  $W_t$  величины скачков на фронтах продольных и поперечных волн, соответствующих упомянутым разрывам. Из (4.1), (4.2) имеем

$$W_l = \frac{b_1(a_1 + 1)c_1}{2T_l a_1 a_0 R} \left[ 4\gamma^3 \sin^2 \theta \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta} + \frac{(1 - 2\gamma^2 \sin^2 \theta)^2}{\sqrt{a_1 + \cos^2 \theta}} \right] \cos \theta$$

$$W_t = \frac{b_1(a_1 + 1)c_2}{2T_l a_1 a_0 R} \left[ \cos \theta - \sqrt{\frac{\gamma^2 - \sin^2 \theta}{a_1 + \cos^2 \theta}} \right] \sin 2\theta$$

Аналогично, разрывы поля смещений  $U_q^1$  описываются выражением

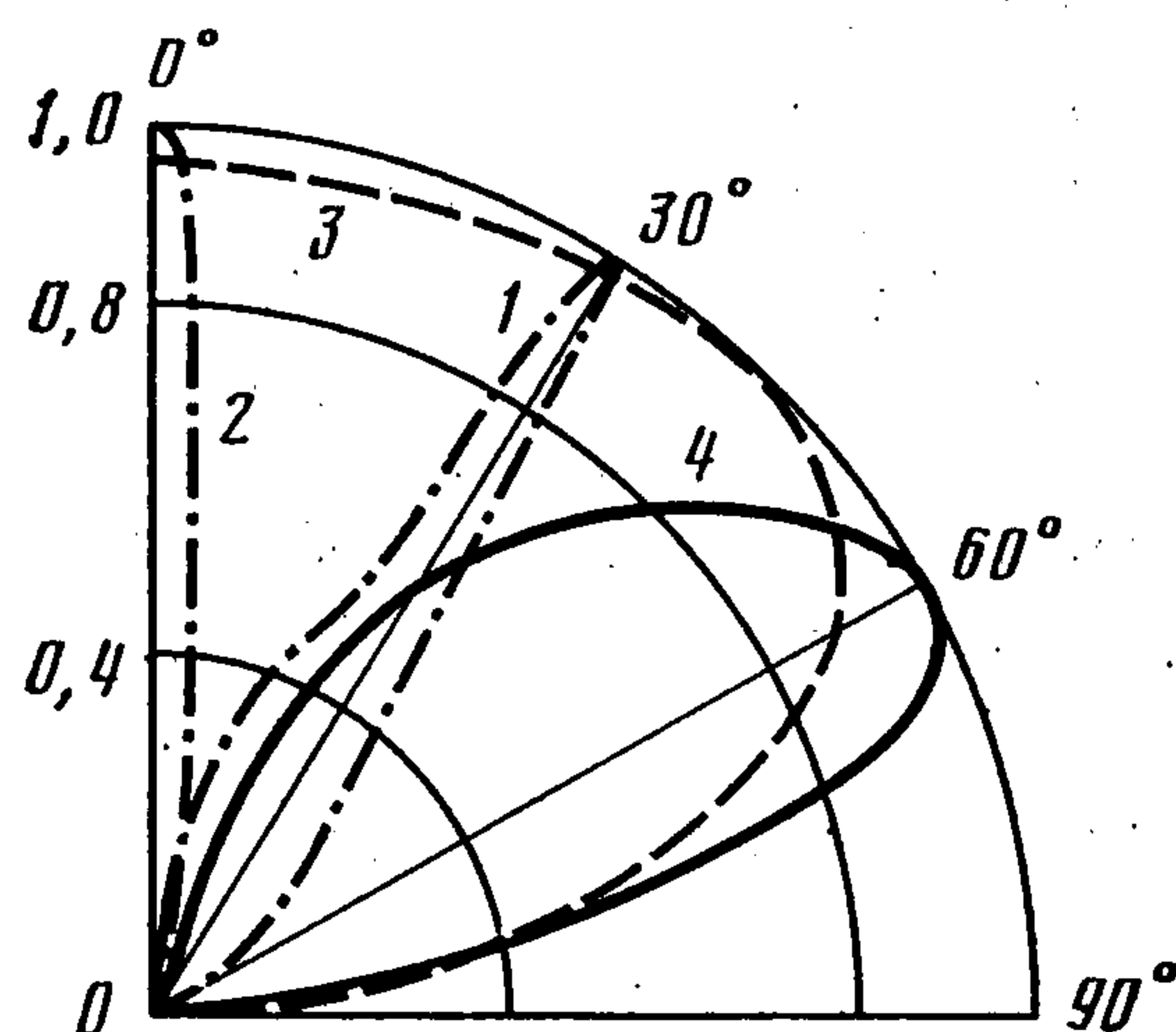
$$U_q^1 = \frac{b_1(a_1 + 1)c_1}{2a_1 a_0 R} \exp\left(-\frac{c_q^2}{a} R\right)$$

На фиг. 3 приведены результаты численного расчета нормированных функций направленности

$$F_1(\theta) = W_l / l \max$$

для различных значений величины  $\gamma_3 = \sqrt{a_1 + 1}$ . Кривые 1—4 соответствуют значениям  $\gamma_3 = 0,5; 0,01; 5; 10$ .

Таким образом, функция направленности  $F_1(\theta)$  существенно зависит от численного значения скорости распространения тепла  $c_q$ . Окончательно вопрос о величине  $c_q$  можно решить после экспериментального определения функции направленности.



Фиг. 3

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. Киев: Наук. думка, 1976. 310 с.
2. Петрашень Г. И., Молотов Л. А., Крауклис П. В. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики. Л.: Наука, 1982. 289 с.
3. Шемякин Е. И., Файншмидт В. Л. Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном поверхностной касательной силой.— Уч. зап. ЛГУ, 1954, № 177, с. 148—179.
4. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.