

УДК (530.145 + 550.34) : 534

## ТЕОРИЯ БЫСТРЫХ ТЕКТОНИЧЕСКИХ ВОЛН

Николаевский В. Н., Рамазанов Т. К.

Предлагается двумерная модель распространения волн тектонических напряжений, являющихся триггером землетрясений в сейсмоактивных регионах и обуславливаемых изгибом-сжатием литосферной плиты на астеносферном поверхностном потоке в пренебрежении инерционными силами. Литосфера моделируется тонкой упругой плитой, астеносфера — потоком высоковязкой несжимаемой жидкости. Их взаимодействие осуществляется благодаря наличию вертикального смещения и действию вязких касательных усилий на контакте литосфера — астеносфера. Для получения системы линейных уравнений вводятся продольные и поперечные потенциалы. Периодические волны малой интенсивности оказываются стоячими, хотя и диффузно расширяющимися, если только нет твердотельного страгивания литосферы по астеносфере. Если же подвижка литосферы по мантии Земли существует, то возможны уединенные волны, черпающие свою энергию из стационарного астеносферного потока.

Рассматриваемые тектонические волны [1, 2] с характерными периодами в 2, 3, 6, 11 лет и скоростями распространения в 10—100 км/год — чрезвычайно медленные по сравнению с сейсмическими волнами, но достаточно быстрые во временном масштабе обычных тектонических процессов, составляющем миллионы лет. О реальности существования таких волн можно судить, например, по недавно обнаруженному [3] изменению (с циклом в 11 лет и амплитудой порядка 0,1 ГПа) тектонических напряжений в субдуктируемых литосферных плитах. Характерные модуль сдвига  $G$  литосферы и вязкость  $\mu$  астеносферы оцениваются, соответственно, числами  $5 \cdot 10^{10}$  Па и  $10^{20}$  Па·с;  $10^{10}$  Па и  $10^{18}$  Па·с, поэтому время релаксации  $\mu/G$  процессов в литосфере имеет нужный порядок от 1 до 30 лет только для комплекса «литосфера + астеносфера». Это наводит на мысль строить адекватную модель процесса по аналогии с поверхностными волнами на движущейся пленке жидкости [4], заменив, однако, капиллярный слой упругой пластиной. Простой предварительный анализ [2] одномерного процесса подтвердил адекватность такого подхода. Вместе с тем реальные процессы происходят вдоль двумерных литосферных плит, что требует построения двумерной теории, а также более тщательного учета действующих на литосферную плиту усилий.

1. При построении теории будем иметь в виду, что мощности литосферы  $2h$  и астеносферы  $2H$  порядка 100 км, скорости стационарного течения в астеносфере  $v^0 \sim 10$  см/год, а скорости подъема литосферы  $\eta^0 \sim 10 \div 100$  см/год, измеряемые, впрочем, для реальной, т. е. неидеально упругой системы.

Рассмотрим деформации тонкой упругой плиты ( $k = 1$ ), плавающей на слое вязкой несжимаемой жидкости ( $k = 2$ ) (фигура). В уравнениях баланса импульса будем пренебрегать инерционными силами, но учтем силу тяжести

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_{lm}^{(k)}}{\partial x_m} = -\rho_k g_l \delta_{l3}, \quad l, m = 1, 2, 3$$

где  $\sigma_{lm}^{(k)}$  — тензоры напряжений,  $\rho_k$  — плотность,  $g_3 = g$  — ускорение силы тяжести,  $\delta_{lm}$  — единичный тензор, причем оси  $x_1, x_2$  лежат в горизонтальной плоскости, а ось  $x_3$  направлена в глубину. Суммирование производится по индексу  $m$ . Осреднение уравнения (1.1) по поперечной толщине слоев:  $x_3^{(k1)} \leq x_3 \leq x_3^{(k2)}$  связывает суммарные напряжения  $N_{ij}^{(k)}$  в попе-

$$(1.2) \quad \frac{\partial N_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = \sigma_{i3}^{(k)}(x_3^{(k1)}) - \sigma_{i3}^{(k)}(x_3^{(k2)}) + \rho_k g_i \delta_{i3} (x_3^{(k1)} - x_3^{(k2)})$$

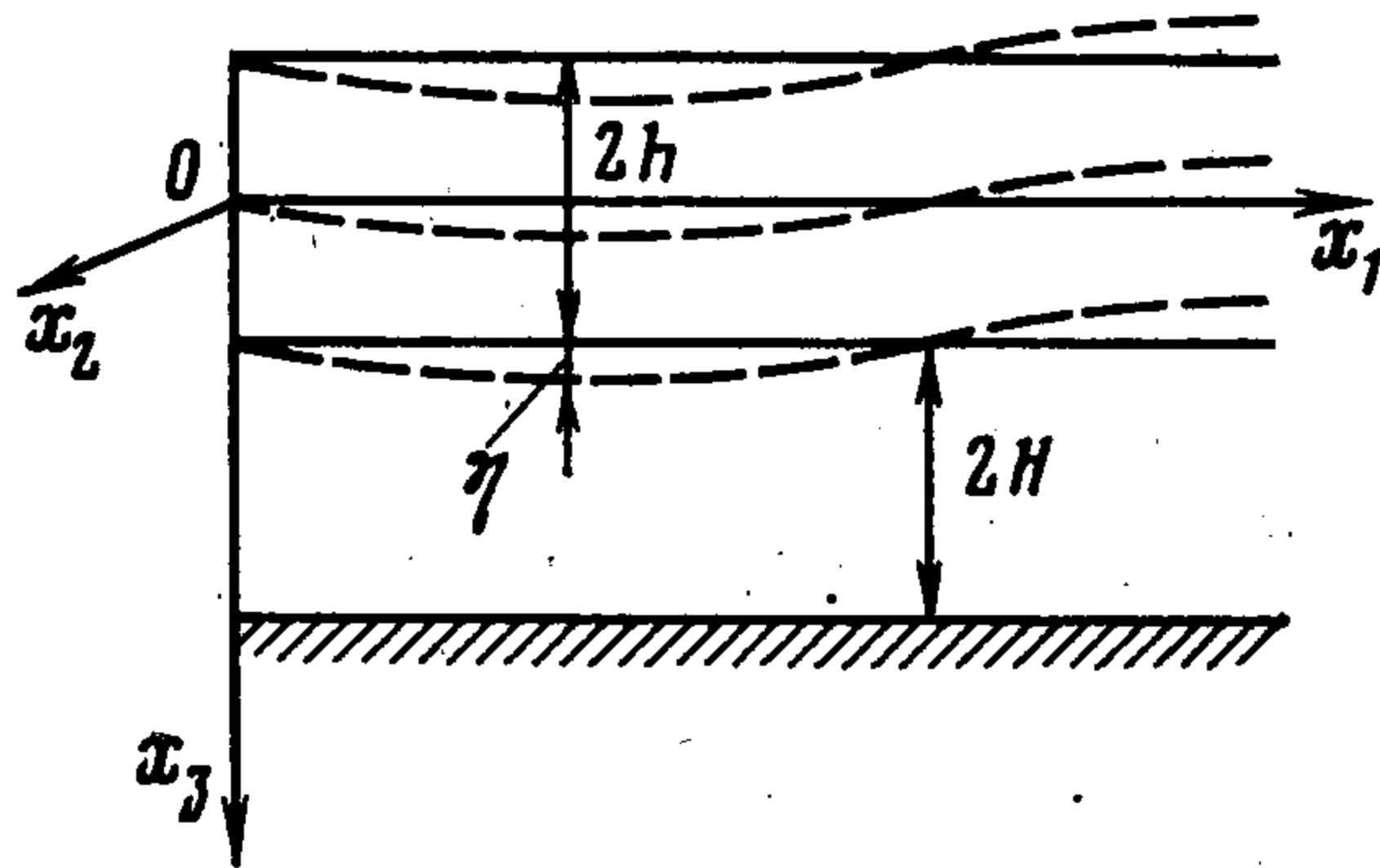
$$(N_{ij}^{(k)} = \int_{x_3^{(k1)}}^{x_3^{(k2)}} \sigma_{ij}^{(k)} dx_3)$$

Здесь  $\eta$  — прогиб срединной плоскости пластины,  $\eta \ll h \sim H \ll \lambda/2$ ,  $x_3^{(11)} = -h + \eta$ ,  $x_3^{(12)} = x_3^{(21)} = h + \eta$ ,  $x_3^{(22)} = h + 2H$ ,  $\lambda$  — длина волны  $i, j = 1, 2$ .

Поля горизонтальных скоростей в жидком слое будем искать в виде

$$(1.3) \quad v_i = \left( w_i^\circ + \frac{\partial U_i}{\partial t} \right) \left( 1 + \frac{h - x_3}{2H} \right) - \left( v_i^\circ + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) \left( 1 + \frac{h - x_3}{2H} \right) \frac{h - x_3}{2H}$$

где  $U_i(x_j, h + \eta, t)$  — нестационарное горизонтальное смещение литосферы в плоскости контакта с астеносферой,  $\partial \varphi_i / \partial t$  — нестационарная напорная составляющая скорости, обусловленная подъемом (опусканием) литосферной плиты. Стационарные ( $t \geq 0$ ) скорости литосферы  $w_i^\circ$  и астеносферы  $v_i^\circ$  удовлетворяют уравнению неразрывности  $\partial w_i^\circ / \partial x_i = 0$ ,  $\partial v_i^\circ / \partial x_i = 0$  в двумерной плоскости, а по абсолютной величине имеют тот же порядок, что и нестационарные скорости:  $v^\circ \sim w^\circ \sim \partial U / \partial t \sim \partial \varphi / \partial t$ .



Интегрирование уравнения неразрывности  $\partial v_i / \partial x_i = 0$  поперек жидкого слоя связывает средние скорости  $\langle v_i \rangle$  со значениями  $v_3$  на горизонтальных границах

$$(1.4) \quad \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{2H} [v_3(h + 2H) - v_3(h + \eta)] = 0,$$

$$\langle v_i \rangle = \frac{1}{2H} \int_{h+\eta}^{h+2H} v_i dx_3$$

Подстановкой выражения (1.3) в (1.4) с учетом равенств  $v_3(h + \eta) \approx \partial \eta / \partial t$ ,  $v_3(h + 2H) = 0$  приводим (1.4) к уравнению

$$(1.5) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = H \frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x_i} + \frac{H}{3} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial x_i}$$

для вертикального смещения  $\eta$  на контакте астеносферы с литосферой в пренебрежении членами второго и высших порядков малости.

Жидкость предполагается ньютоновской, т. е.

$$(1.6) \quad \sigma_{lm}^{(2)} = -p \delta_{lm} + \mu \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \right)$$

где  $p$  — давление. В силу представлений (1.3) получаем отсюда выражения для контактных напряжений, а также для осредненных (по мощности астеносферного слоя) напряжений

$$(1.7) \quad \sigma_{33}^{(2)}(x_j, h + \eta, t) = -p - 2\mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x_i}$$

$$\sigma_{i3}^{(2)}(x_j, h + \eta, t) = \mu \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x_i} + \frac{1}{2H} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \frac{\partial U_i}{\partial t} + v_i^\circ - w_i^\circ \right) \right]$$

$$\sigma_{i3}^{(2)}(x_j, h + 2H, t) = -\frac{\mu}{2H} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial t} + v_i^\circ + w_i^\circ \right)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)}(x_j, h + \eta, t) = & -p\delta_{ij} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial w_i^\circ}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j^\circ}{\partial x_i} \right) \right] \\ \frac{N_{ij}^{(2)}}{H} = & -2 \langle p \rangle \delta_{ij} + \mu \left\{ \frac{\partial w_i^\circ}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j^\circ}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial v_i^\circ}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^\circ}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} \\ \langle p \rangle = & \frac{1}{2H} \int_{h+\eta}^{h+2H} p dx_3 \end{aligned}$$

Подставляя выражения (1.7) в (1.2) и исключая вертикальное смещение при помощи уравнения (1.5), приведем осредненные уравнения течения в астеносфере к простому виду

$$(1.8) \quad v_i^\circ + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - H^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \left( U_i + \frac{1}{3} \varphi_i \right) = - \frac{2H^2}{\mu} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i}$$

где  $\nabla^2$  — двумерный оператор Лапласа.

2. Распределение смещений в литосфере будем задавать согласно гипотезе Кирхгофа — Лява [5]  $U_i = u_i - x_3 \partial \eta / \partial x_i$ , где  $u_i$  — смещения в срединной плоскости. Отсюда уравнение (1.5) принимает свой окончательный вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + hH \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta - H \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i} \left( u_i + \frac{1}{3} \varphi_i \right) = 0$$

Далее, упругие напряжения определяют согласно закону Гука [5]

$$(2.2) \quad \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{ij}^{(1)} = (1-\nu) e_{ij} + \nu e \delta_{ij} - x_3 \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \nabla^2 \eta \delta_{ij} \right]$$

$$e = e_{jj}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

где  $e_{ij}$  — деформации срединной плоскости, связанные тем самым с суммарными напряжениями по литосфере

$$(2.3) \quad N_{ij} = \frac{2hE}{1-\nu^2} [(1-\nu) e_{ij} + \nu e \delta_{ij}]$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга плиты,  $\nu$  — ее коэффициент Пуассона.

Для нахождения контактных напряжений, фигурирующих в уравнениях (1.3) горизонтального движения литосферы ( $k = 1$ ), следует воспользоваться условиями непрерывности усилий на контакте

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{13}^{(1)} &= \sigma_{13}^{(2)} + (\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{11}^{(2)}) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + (\sigma_{12}^{(1)} - \sigma_{12}^{(2)}) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \\ \sigma_{23}^{(1)} &= \sigma_{23}^{(2)} + (\sigma_{22}^{(1)} - \sigma_{22}^{(2)}) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + (\sigma_{12}^{(1)} - \sigma_{12}^{(2)}) \frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)} \end{aligned}$$

и аналогичными условиями на границе  $x_3 = -h + \eta$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{13}^{(1)} &= (\sigma_{11}^{(1)} - Q_{11}) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(1)} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \\ \sigma_{23}^{(1)} &= (\sigma_{22}^{(1)} - Q_{22}) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \sigma_{12}^{(1)} \frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = -Q \end{aligned}$$

где  $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$  — компоненты пригрузки. Подставляя (2.3)—(2.5) в (1.2) с учетом представлений (1.7), (2.2), после линеаризации получим

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \frac{2EhH}{(1+\nu)\mu} \left( \nabla^2 u_i + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \\ = - \left[ (h+2H) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i^\circ - w_i^\circ \right] \end{aligned}$$

где пренебрегается также произведениями типа  $[p(x_j, h + \eta, t)/(Eh)] \partial \eta / \partial x_i$ .

Для нахождения уравнения изгиба плиты воспользуемся известным приемом [6]. Подставим выражения (2.2) в первые два уравнения равновесия (1.1) при  $k = 1$

$$(2.7) \quad \frac{\partial \sigma_{i3}^{(1)}}{\partial x_3} = \frac{E x_3}{1 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 \eta + \frac{1}{2h} (\sigma_{i3}^{(1)}(h + \eta) - \sigma_{i3}^{(1)}(-h + \eta)).$$

Интегрирование (2.7) при переменном верхнем пределе по  $x_3$  позволяет выразить сами напряжения  $\sigma_{i3}^{(1)}$  через вертикальное смещение и контактные напряжения. Подстановка результата в третье уравнение (1.1) и интегрирование последнего по  $x_3$  от  $-h + \eta$  до  $h + \eta$  приводит к уравнению изгиба

$$(2.8) \quad D \nabla^4 \eta = 2\rho_1 g h + \sigma_{33}^{(1)}(h + \eta) - \sigma_{33}^{(1)}(-h + \eta) + \\ + h \frac{\partial}{\partial x_i} [\sigma_{3i}^{(1)}(h + \eta) + \sigma_{3i}^{(1)}(-h + \eta)], \quad D = \frac{2}{3} \frac{E h^3}{1 - \nu^2}$$

Далее, согласно условиям (2.4), (2.5) и представлениям (1.2), (1.7), (2.2), (2.3), можно в уравнение (2.8) ввести как непосредственно вязкие, так и суммарные горизонтальные усилия. После некоторых преобразований, пренебрегая квадратами возмущений переменных в уравнении (2.8), получим

$$(2.9) \quad p_* \equiv p(x_j, h + \eta, t) = 2\rho_1 g h + Q - D \nabla^4 \eta + \\ + \mu h \left( 3 + \frac{h}{2H} \right) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta + N_{ij}^0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} + h \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (p_* - Q_{ii}) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right] - \\ - \mu \left( 2 + \frac{h}{2H} \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_i} + \frac{\mu h}{2H} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial x_i}$$

где  $N_{ij}^0/(2h)$  соответствует первоначальному напряженному состоянию плиты.

Интегрируем третье уравнение (1.1) и уравнение неразрывности по переменной  $x_3$  при  $k = 2$

$$(2.10) \quad p - p_* - \rho_2 g (x_3 - h - \eta) = \mu \int_{h+\eta}^{x_3} \nabla^2 v_3 dx_3 + \mu \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \Big|_{h+\eta} \right)$$

$$(2.11) \quad v_3 - \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \int_{h+\eta}^{x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_3$$

Подставляя (2.11) в (2.10) с учетом (1.3) и интегрируя результат по мощности жидкого слоя, получим следующую связь между контактным и средним давлением:

$$(2.12) \quad p_* = \langle p \rangle - \rho_2 g \left( H - \frac{3}{2} \eta \right) + \frac{\mu}{2H} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mu \left( h - \frac{7}{10} H \right) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta - \\ - \frac{\mu h H^2}{5} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 \eta - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_i} + \frac{\mu H^2}{5} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Уравнение изгиба (2.9) на основании (2.12) преобразуется к виду

$$(2.13) \quad \langle p \rangle = q - \frac{3}{2} \rho_2 g \eta - \frac{\mu}{2H} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mu \left( 2h + \frac{7}{10} H + \frac{h^2}{2H} \right) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta + \\ + \frac{\mu h H^2}{5} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 \eta - D \nabla^4 \eta - q_{ij} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} - \mu \left( 1 + \frac{h}{2H} \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_i} - \\ - \frac{\mu H^2}{5} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\mu h}{2H} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial x_i}$$

$$(q = 2\rho_1 g h + \rho_2 g H + Q, \quad -q_{ij} = N_{ij}^0 + h(2\rho_1 g h + Q) \delta_{ij} - Q_{ij})$$

Таким образом получена замкнутая система уравнений (1.8), (2.1) движения астеносферной жидкости и уравнений (2.6), (2.13) нестационар-

ного деформирования литосферной плиты для следующих шести искомым переменных:  $\eta$ ,  $u_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $\langle p \rangle$ .

3. Введем волновые потенциалы  $\Phi$  и  $\Psi$ , такие, что

$$(3.1) \quad u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}$$

Тогда указанные уравнения движения после исключения переменных  $u_i$ ,  $\langle p \rangle$  разделяются. Первое уравнение получается из (2.6) и соответствует нестационарному перераспределению ротационного потенциала

$$(3.2) \quad (1 - \nu) \kappa \nabla^4 \Psi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + \varepsilon_{zij} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial x_j} + \varepsilon_{zij} \left( \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} - \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} \right) = 0$$

$$\kappa = 2EhH / (\mu(1 - \nu^2))$$

где  $\varepsilon_{zij}$  — альтернирующий тензор. Применяя операцию вихря к уравнениям (1.8) и используя соотношение (3.2), получим

$$(3.3) \quad (1 - \nu) \kappa \left( \frac{H^2}{3} \nabla^6 \Psi - \nabla^4 \Psi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{4H^2}{3} \nabla^4 \Psi - \nabla^2 \Psi \right) + \varepsilon_{zij} \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} = 0$$

Отсюда видно, что сдвиговые возмущения могут не приводить к подъему срединной плоскости литосферы — подобного рода движения отделяются от изгиба. Если искать свободные колебания, соответствующие уравнению (3.3) (без учета стационарного сдвигового движения литосферы), в виде  $\Psi = \Psi_* \exp [i(k_j x_j - \omega t)]$ , то получим дисперсионное соотношение

$$(3.4) \quad \omega \frac{\mu}{G} = - \frac{4(3 + k^2 H^2) k^2 h H}{3 + 4k^2 H^2}, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

которое означает, что сдвиговая тектоническая волна не является бегущей: начальные возмущения затухают «на месте» без трансляционных смещений.

Для потенциала  $\Phi$  продольных волн уравнения (2.1) и (2.6) дают

$$(3.5) \quad \kappa \nabla^4 \Phi - 2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi + (2h + H) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta + \frac{3}{2H} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

Если прогиб  $\eta$  равен нулю тождественно, уравнение (3.6) сводится к известному уравнению [1] тектонических волн простого горизонтального сжатия — растяжения литосферы

$$(3.6) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\mu(1 - \nu^2)}{EhH} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

В общем случае уравнение (3.5) должно быть дополнено уравнением (2.1), которое запишем теперь в виде

$$(3.7) \quad \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial x_i} = \frac{1}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta - \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi$$

а также следствием применения операции дивергенции к уравнению течения вязкой астеносферы (1.8). Последнее с учетом уравнений (3.7) запишем в виде

$$(3.8) \quad 3H \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi - H(3h - H) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta - 3 \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{2H^3}{\mu} \nabla^2 \langle p \rangle$$

которое совместно с уравнением (3.5) определяет эффективную систему двух уравнений для прогиба  $\eta$  и потенциала  $\Phi$ .

4. Рассмотрим пространственно-временные продольные тектонические возмущения типа  $\Phi = \Phi_* \exp [i(k_j x_j - \omega t)]$ ,  $\eta = \eta_* \exp [i(k_j x_j - \omega t)]$ .

Тогда уравнения (3.5) и (3.8) с учетом (2.13) сводим к однородной алгебраической системе

$$(4.1) \quad \begin{aligned} & 2Hk^2 (\kappa k^2 - 2i\omega) \Phi_* - i\omega [3 - 2H(2h + H)k^2] \eta_* = 0 \\ & i\omega Hk^2 [15 - 10H(H + 2h)k^2 + 2H^4k^4] \Phi_* + \{i\omega [15 - \\ & - 10H(3h - H)k^2 + H^2(20hH + 20h^2 + 7H^2)k^4 - \\ & - 2hH^5k^6] - 5(k^2/\mu)H^2Y\} \eta_* = 0 \\ & Y = 2DHk^4 - 2Hq_{ij}k_ik_j + 3H\rho_2g \end{aligned}$$

если  $q_{ij}$ ,  $v_j^\circ$ ,  $w_j^\circ$  — постоянные; суммирование производится по индексам  $i, j$ . Система (4.1) имеет нетривиальное решение, если выполнено следующее дисперсионное уравнение:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & (15 + 100H^2k^2 + 2H^4k^4 + 4H^6k^6) X^2 - \\ & - \frac{4hHk^2}{1 - v^2} \left[ 15 - 10(3h - H)Hk^2 + (20hH + 20h^2 + 7H^2)H^2k^4 - \right. \\ & \left. - 2hH^5k^6 + \frac{5(1 - v^2)HY}{hE} \right] X + 20hH^3k^4 \frac{Y}{(1 - v^2)E} = 0, \quad X = \frac{i\omega\mu}{E} \end{aligned}$$

Можно показать, что при реальных значениях параметров системы «литосфера + астеносфера» корни этого уравнения соответствуют стоячим длинным волнам  $\lambda \geq 2H$ , которые могут расширяться, но трансляционно не смещаются.

Действительно, при  $\lambda \geq 2H$ ,  $H \sim h$ ,  $E \sim 10^{10}$  Па,  $3\rho_2gH \sim 10^{10}$  Па,  $v^2 \sim 0,1$ ,  $q_{ij} \sim 2 \cdot 10^{13}$  Па·м имеем вещественные корни, причем  $X > 0$ , хотя при самом выводе результативных уравнений предполагалось, что  $\lambda \geq 2H$ .

Иной вариант анализа [7] показал, что при  $\lambda < 2H$  вывод об отсутствии трансляционного смещения остается справедливым. Возникновение бегущих волн объясняется действием либо большого начального горизонтального усилия  $N_{ij}^\circ$ , либо постоянных астеносферных потоков, вызываемых, по-видимому, сдвигом литосферы.

5. Возможность существования уединенных бегущих волн исследуем путем поиска решения, зависящего от координаты  $\xi = n_j x_j - ct$ , где  $c$  — модуль скорости  $c_i = cn_i$  этих волн. Замены операций дифференцирования:  $\partial/\partial t = -cd/d\xi$ ,  $\partial/\partial x_i = n_i d/d\xi$  позволяют преобразовать систему уравнений (1.8), (2.1), (2.6), (2.13) к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(5.1) \quad n_i \frac{d\varphi_i}{d\xi} = \frac{3}{H} (\eta - \eta_0) + 3h \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - 3n_i \frac{du_i}{d\xi}$$

$$(5.2) \quad \begin{aligned} c \frac{d\varphi_i}{d\xi} = c \frac{du_i}{d\xi} + \kappa \left[ (1 - v) \frac{d^2u_i}{d\xi^2} + (1 + v) n_i n_j \frac{d^2u_j}{d\xi^2} \right] - \\ - c(h + 2H) n_i \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + v_i^\circ - w_i^\circ \end{aligned}$$

$$(5.3) \quad \begin{aligned} v_i^\circ - c \frac{d\varphi_i}{d\xi} + cH^2 \frac{d^3}{d\xi^3} \left( u_i + \frac{1}{3} \varphi_i \right) - \\ - chH^2 n_i \frac{d^4\eta}{d\xi^4} = - \frac{2H^2}{\mu} n_i \frac{d\langle p \rangle}{d\xi} \end{aligned}$$

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \frac{d\langle p \rangle}{d\xi} = - \frac{3}{2} \rho_2g \frac{\partial\eta}{\partial\xi} - \frac{c\mu}{2H} \left( \frac{3h}{H} - 1 \right) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \\ - q_{ij} n_i n_j \frac{d^3\eta}{d\xi^3} - c\mu \left( 2h + \frac{7}{10} H + \frac{2}{H} h^2 \right) \frac{d^4\eta}{d\xi^4} - D \frac{d^5\eta}{d\xi^5} - \\ - \frac{c\mu H^2}{5} \frac{d^6\eta}{d\xi^6} + c\mu \left( 1 + \frac{2h}{H} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} \left( n_i \frac{du_i}{d\xi} \right) + \frac{c\mu H^2}{5} \frac{d^4}{d\xi^4} \left( n_i \frac{du_i}{d\xi} \right) \end{aligned}$$

где  $\eta = \eta_0$  при  $n_i d\varphi_i/d\xi = 3hd^2\eta/d\xi^2 - 3n_i du_i/d\xi$ . Уравнения (5.1), (5.2) после исключения переменной  $\varphi_i$  сводятся к следующему уравнению:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \frac{\kappa}{2} \frac{d}{d\xi} \left( n_i \frac{du_i}{d\xi} \right) + cn_i \frac{du_i}{d\xi} = \frac{c}{2} (2h + H) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{3c}{4H} (\eta - \eta_0) - \\ - \frac{n_i}{4H} (v_i^\circ - w_i^\circ) \end{aligned}$$

С другой стороны, из уравнения (5.3) исключим  $\varphi_i$  и  $\langle p \rangle$  при помощи (5.1), (5.4)

$$(5.6) \quad 3cn_i \frac{du_i}{d\xi} + 2cH(H + 2h) \frac{d^2}{d\xi^2} \left( n_i \frac{du_i}{d\xi} \right) + \frac{2cH^4}{5} \frac{d^4}{d\xi^4} \left( n_i \frac{du_i}{d\xi} \right) - \\ - \sum_{k=0}^6 a_k \frac{d^k \eta}{d\xi^k} + n_i v_i^\circ - \frac{3c}{H} (\eta - \eta_0) = 0 \\ a_0 = \frac{3c}{H}, \quad a_1 = \frac{3}{\mu} H^2 \rho_2 g, \quad a_2 = 2c(3h - H) \\ a_3 = \frac{2}{\mu} H^2 q_{ij} n_i n_j, \quad a_4 = cH \left( 4h^2 + 3hH + \frac{7}{5} H^2 \right) \\ a_5 = \frac{2}{\mu} H^2 D, \quad a_6 = \frac{2c}{5} hH^4$$

Решая уравнение (5.5) относительно  $n_i du_i/d\xi$  и подставляя результаты в (5.6), после некоторых преобразований получим

$$(5.7) \quad \left( 1 + \frac{\kappa}{2c} \frac{d}{d\xi} \right) \sum_{k=0}^6 a_k \frac{d^k \eta}{d\xi^k} - c \sum_{k=0}^6 b_k \frac{d^k \eta}{d\xi^k} + \frac{3c\eta_0}{4H} + \\ + \frac{1}{4} n_i (v_i^\circ + 3w_i^\circ) = 0 \\ b_0 = \frac{9}{4H}, \quad b_2 = 3(H + 2h) \\ b_4 = H[(H + 2h)^2 + \frac{3}{10} H^2], \quad b_1 = b_3 = b_5 = 0, \quad b_6 = \\ = \frac{1}{5} H^4 (H + 2h)$$

Полученное уравнение допускает решение в виде уединенной бегущей волны в случае обращения в нуль неоднородных членов. Соответствующее условие приводит к такому выражению для скорости волны:

$$(5.8) \quad c_i = -\frac{H}{3\eta_0} (v_i^\circ + 3w_i^\circ)$$

Отсюда следует, что при  $v_i^\circ = 0$  вектор скорости уединенной тектонической волны коллинеарен вектору скорости  $w_i^\circ$  [стационарного перемещения литосферы относительно мезосферы, если прогиб  $\eta_0$  литосферы, вызываемый ею, отрицателен, если происходит ее изгиб к свободной поверхности. Если  $\eta_0 > 0$ , скорость  $c_i$  противоположна  $w_i$ . Уравнение (5.8) показывает, что  $c \sim 10 \div 100$  км/год для физически оправданных значений отношения  $(v_i^\circ + 3w_i^\circ)/\eta_0$ . Тем самым скорость  $c$  уединенной волны по порядку величины соответствует скорости  $D$ -волны, выявляемой по распределению локально сильнейших землетрясений, но ее направление отнюдь не является меридиональным, как это утверждалось в работе [8].

Решения уравнения (5.7) являются суммой экспоненциальных решений  $\eta_n = \eta_n^* \exp(k_n \xi)$ ,  $n = 1, 2, \dots, 7$ , где  $k_n$  — корни соответствующего характеристического уравнения. Для тех из них, чья величина оценивается условием  $k_n H < 1$ , уравнение (5.7) приближенно заменяется на следующее:

$$(5.9) \quad H \left( 5c - \frac{3\kappa \rho_2 g H}{2c\mu} \right) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - 3 \left( \frac{\kappa}{2H} + \frac{\rho_2 g}{\mu} H^2 \right) \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{3c}{4H} \eta = 0$$

Характеристическое уравнение (5.9) для значений  $c \sim 30$  км/год,  $\mu/E \sim 3$  года дает следующие корни:  $k_{1,2} \sim 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ ,  $\lambda_1 \sim \lambda_2 \sim 100$  км. Это означает, что эффективная ширина уединенной волны порядка 200 км. Общее правило оценки таково:  $\lambda \sim \mu c/E$ , откуда, в частности, следует, что с уменьшением вязкости астеносферы  $\mu$  или с увеличением жесткости  $G$  литосферы длина уединенной волны уменьшается, хотя скорость ее и остается неизменной.

В соответствии с развиваемой теорией уединенные тектонические волны не затухают из-за поступления энергии из астеносферного потока, компенсирующего вязкую диссипацию. Таким образом, система «литосферная плита + астеносферное течение» является «автоволновой» в широком смысле этого слова [9].

Авторы признательны И. А. Гарагашу за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Kasahara K.* Earthquake mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981. 248 p.— Рус. перев.: М.: Мир, 1985.
2. *Николаевский В. Н.* Механика геоматериалов и землетрясения.— В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. Т. 15. М.: ВИНТИ, 1983, с. 149—230.
3. *Маламуд А. С., Николаевский В. Н.* Количественная оценка тектонического цикла по мантийным землетрясениям Гиндукуша.— Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-матем., хим. и геол. н., 1984, № 1 (91), с. 60—64.
4. *Капица П. Л.* Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1, с. 3—28.
5. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. N. Y.: McGraw-Hill, 1959. 580 p.— Рус. перев.: М.: Наука, 1966. 635 с.
6. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
7. *Николаевский В. Н., Рамазанов Т. К.* О волнах взаимодействия литосферы с астеносферой.— В кн.: Гидрогеодинамические предвестники землетрясений. М.: Наука, 1984, с. 120—128.
8. *Губерман Ш. А.* D-волны и землетрясения.— В кн.: Вычислительная сейсмология. Теория и анализ сейсмологических наблюдений. М.: Наука, 1979, вып. 12, с. 158—188.
9. *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах.— Успехи физ. наук, 1979, т. 128, № 4, с. 625—666.

Москва

Поступила в редакцию  
28.III.1984