Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 3, 1985

УДК 539.376

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРЕПИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКИ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СТАРЕЮЩЕЙ СРЕДЕ

Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Колмановский В. Б.

Изучается устойчивость длинной упругой трубы в вязкоупругой среде. Установлены условия устойчивости, формулируемые в терминах характеристик трубы и среды. Подобные задачи представляют интерес при изучении устойчивости подземных сооружений [1—3]. Задача об устойчивости трубы в случае, когда среда — упругая, рассматривалась в [4]. Работа примыкает к исследованиям [5, 6].

1. Постановка задачи. Пусть в горной породе на глубине H от дневной поверхности проведена выработка круглого поперечного сечения радиуса R. Порода считается однородной изотропной вязкоупругой средой, заполняющей полупространство. Выработка закреплена, т. е. в нее вставлен упругий цилиндр, который спаян с материалом окружающих выработку пород. Крепь считается однородной упругой средой. Вдали от концов выработки в породе и крепи реализуется плоская деформация. Согласно [7], при $H/R > 50$ задачу об определении напряженно-деформированного состояния крепи можно упростить и рассматривать крепь как упругую трубу, подкрепляющую цилиндрическое отверстие в вязкоупругом пространстве, которое вдали от отверстия сжато равномерными усилиями $p_1 = \gamma H$, $p_2 = \nu (1 - \nu)^{-1}\gamma H$, где γ — удельный вес, а ν — коэффициент Пуассона породы.

Пусть вязкоупругая среда занимает все трехмерное пространство. Обозначим через x_1, x_2, x_3 координаты точек среды в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Из среды вырезан цилиндр $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$, радиус которого без ограничения общности можно принять равным единице. В получившееся отверстие вставлена круглая упругая труба, внешний радиус которой равен единице. В момент времени $t = 0$ на бесконечности к вязкоупругой среде приложены сжимающие усилия постоянной интенсивности p_1 вдоль оси Ox_1 и p_2 вдоль оси Ox_2, а к внутренней поверхности трубы — усилия интенсивности g, направленные перпендикулярно оси трубы. Введем цилиндрическую систему координат $Or\vartheta x_3$, ось Ox_3 которой совпадает с осью трубы, а полярный угол ϑ отсчитывается от оси Ox_1. Усилия, приложенные к внутренней поверхности трубы, статически эквивалентны нулю, т. е. (g_1, g_2 — радиальная и тангенциальная составляющие вектора g)

$$\langle g_2\rangle = 0, \langle g_1 \sin\vartheta + g_2 \cos\vartheta\rangle = 0, \quad \langle g_1 \cos\vartheta - g_2 \sin\vartheta\rangle = 0$$

$$\left(\langle f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta\right)$$

Обозначим через $u = (u_1, u_2, u_3)$ вектор перемещений среды, а через $w = (w_1, w_2, w_3)$ — вектор перемещений срединной поверхности трубы в системе координат $Or\vartheta x_3$. Под действием усилий p, g как в трубе, так и в среде реализуется плоское деформированное состояние, т. е.

$$u_3 = w_3 = 0, \quad u_i = u_i\,(t, r, \vartheta), \quad w_i = w_i\,(t, \vartheta) \quad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

В соответствии с классическим определением устойчивости динамических систем по Ляпунову трубу назовем устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$, что из неравенств

$$\sup_\vartheta (|g_1(\vartheta)| + |g_2(\vartheta)|) < \delta_1, \quad |p_1 - p_2| < \delta_2$$

следует для всех $t \geqslant 0$, $-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ оценка

$$\sup_{t,\vartheta} (|w_1(t, \vartheta)| + |w_2(t, \vartheta)|) < \varepsilon$$

2. Напряженно-деформированное состояние трубы. Приведем уравнение для прогибов трубы при следующих предположениях. Труба представляет собой упругую цилиндрическую оболочку бесконечной длины и постоянной толщины h, которая много меньше ее внешнего радиуса, т. е. $h \ll 1$. Перемещения срединной поверхности трубы малы по сравнению с ее толщиной. Компоненты ε_{jl} тензора деформаций связаны с компонентами σ_{jl} тензора напряжений трубы в цилиндрической системе координат уравнениями

$$\varepsilon_{jl} = E_0^{-1} [(1 + \nu_0) \sigma_{jl} - \nu_0 \sigma \delta_{jl}] \quad (j, l = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

$$\sigma_{jl} = E_0 (1 + \nu_0)^{-1} [\varepsilon_{jl} + \nu_0 (1 - 2\nu_0)^{-1} \varepsilon \delta_{jl}]$$

Здесь E_0 — модуль упругой деформации, ν_0 — коэффициент Пуассона трубы, $\sigma = \sigma_{jj}$, $\varepsilon = \varepsilon_{jj}$ (по одинаковым индексам производится суммирование), δ_{jl} — символы Кронекера и положено $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{rr}$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{r\vartheta}$ и т. д. Проводимые ниже преобразования справедливы с точностью до величин $o(h)$.

Элемент трубы единичной высоты и толщины h будем интерпретировать как тонкий упругий кривой стержень [8]. Ввиду (1.1) этот элемент находится в плоском деформированном состоянии, т. е. $\varepsilon_{j3} = 0$ при $j = 1, 2, 3$. Кроме того, считается, что для элемента трубы справедливы гипотезы Кирхгофа ([9], с. 54), в соответствии с которыми $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = 0$. Отсюда и из ([10], с. 26), вытекает, что

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^\circ + (1 - \rho)(\varkappa - \varepsilon_{22}^\circ); \quad \varkappa = -w_{1,02} + w_{2,01}, \quad \varepsilon_{22}^\circ = w_{2,01} + w_1 \tag{2.2}$$

Здесь ρ — радиус кривизны, $\varkappa$ — дополнительное искривление элемента трубы, ε_{22}° — угол поворота элемента трубы по отношению к его первоначальному положению. Используется обозначение производных $u_{,jl} = \partial^{j+l} u / \partial r^j \partial \vartheta^l$.

Наконец, предполагается, что $\varepsilon_{22}^\circ = o(h)$. Отсюда и из последнего соотношения в (2.2) следует, что

$$w_1 = -w_{2,01} \tag{2.3}$$

Радиус кривизны стержня ρ связан с приращением кривизны $\varkappa$ соотношением $\varkappa = \rho^{-1} - 1$, т. е. при малых искривлениях продольной оси $\rho \approx 1 - \varkappa$.

В соответствии с гипотезой Кирхгофа $\sigma_{11} = 0$. Значит, в силу (2.1) справедливо равенство $\varepsilon_{11} = -\nu_0 (1 - \nu_0)^{-1} \varepsilon_{22}$. Отсюда и из (2.1) следует, что

$$\sigma_{22} = E_0 (1 - \nu_0^2)^{-1} \varepsilon_{22} \tag{2.4}$$

Пусть N — нормальное усилие, Q — перерезывающая сила и M —

изгибающий момент, действующие на элемент трубы, т. е.

$$N=\int_{1-h}^{1}\sigma_{22}\,dr,\quad Q=\int_{1-h}^{1}\sigma_{12}\,dr$$

$$M=\int_{1-h}^{1}\sigma_{22}\left(1+\frac{h}{2}-r\right)dr$$

Подставляя сюда вместо σ_{22} выражения (2.4), (2.2), с учетом (2.3) получаем (D — цилиндрическая жесткость трубы)

(2.5) $$N = E_0h\,(1-\nu_0^2)^{-1}\,\varepsilon_{22}^{\circ},\quad M = D\varkappa$$
$$(D = E_0h^3\,[12\,(1-\nu_0^2)]^{-1})$$

Уравнения равновесия элемента трубы имеют вид ([11], с. 421)

(2.6) $$\frac{\partial N}{\partial\vartheta}-\frac{Q}{\rho}+q_2=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial\vartheta}+\frac{N}{\rho}+q_1=0,\quad \frac{\partial M}{\partial\vartheta}+Q=0$$

Интенсивность суммарных усилий, приложенных к элементу трубы и направленных вдоль осей r, ϑ, обозначена через q_1, q_2.

Исключая из уравнений равновесия (2.6) величины N и Q, получаем уравнение для изгибающего момента, из которого с учетом второго соотношения (2.5) заключаем, что

(2.7) $$D\,(\varkappa_{,03}+\varkappa_{,01}) = q_{1,01}-(q_1\varkappa)_{,01}-q_2$$

Поскольку толщина трубы мала, перемещения точек продольной оси стержня совпадают с перемещениями среды на границе с трубой

(2.8) $$u_1 = w_1,\quad u_2 = w_2,\quad r = 1,\quad -\pi\leqslant\vartheta\leqslant\pi.$$

Прогиб трубы определяется последними двумя уравнениями (2.2), уравнениями (2.7) и граничными условиями, состоящими в периодичности по ϑ с периодом 2π рассматриваемых функций и их производных. Для замыкания этих уравнений необходимо найти зависимость усилий q_1 и q_2 от прогиба. Это сделано ниже на основании анализа напряженно-деформированного состояния среды.

3. Уравнения состояния среды. Обозначим через $\sigma_{jl}\,(t, r, \vartheta)$ и $\varepsilon_{jl}\,(t, r, \vartheta)$ компоненты тензоров напряжений и деформаций среды в системе координат $Or\vartheta x_3$. Примем, что среднее напряжение $\sigma = \sigma_{jj}/3$ и средняя объемная деформация $\varepsilon = \varepsilon_{jj}/3$ связаны соотношением

(3.1) $$\varepsilon = (1-2\nu)\,\sigma/E$$

где E — модуль упругомгновенной деформации, ν — коэффициент Пуассона среды.

Девиаторы e_{jl}, s_{jl} тензоров деформаций и напряжений среды удовлетворяют соотношениям

(3.2) $$e_{jl}=E^{-1}(1+\nu)(I+K)s_{jl},\quad e_{jl}=\varepsilon_{jl}-\varepsilon\delta_{jl}$$
$$s_{jl}=E\,(1+\nu)^{-1}(I-R)\,e_{jl},\quad s_{jl}=\sigma_{jl}-\sigma\delta_{jl}$$
$$\left(Ks_{jl}=\int_0^t k(t,\ \tau)\,s_{jl}(\tau)\,d\tau,\quad Re_{jl}=\int_0^t r(t,\ \tau)\,e_{jl}(\tau)\,d\tau\right)$$

Здесь I — единичный оператор, K — оператор ползучести, R — оператор релаксации.

Предполагается, что ядро релаксации $r\,(t, \tau)\geqslant 0$ и существуют такие непрерывные функции $l_0\,(t, \tau)$, $l_1\,(t, \tau)$ и постоянная $\beta\in(0, 1)$, что

(3.3) $$r(t, \tau) = l_0\,(t, \tau)\,(t-\tau)^{-\beta}+l_1\,(t, \tau),\quad 0\leqslant\tau\leqslant t$$
$$|r|=\sup_t\int_0^t r\,(t,\ \tau)\,d\tau<1$$

Преобразуем уравнения состояния (3.1), (3.2). В силу (3.2) получим (λ и μ — параметры Ламе)

$$\sigma_{jl} = (3\lambda I + 2\mu R)\, \varepsilon\delta_{jl} + 2\mu\, (I - R)\, \varepsilon_{jl} \tag{3.4}$$
$$\lambda = E\nu\, [(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}, \quad \mu = E\,[2(1+\nu)]^{-1}$$

Деформация среды — плоская, т. е. $\varepsilon_{j3} = 0$. Отсюда и из (3.4) следует, что $\sigma_{33} = (3\lambda I + 2\mu R)\, \varepsilon$. Поэтому среднее напряжение

$$\sigma = [\sigma_{11} + \sigma_{22} + (3\lambda I + 2\mu R)\, \varepsilon]/3 \tag{3.5}$$

Подставим в (3.5) вместо σ его выражение через ε из (3.4) и учтем выражения для λ и μ. Получим]

$$\sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \lambda\nu^{-1}\, (3I - (1-2\nu)\, R)\, \varepsilon \tag{3.6}$$
$$\varepsilon = (3\lambda)^{-1}\, \nu\, (I + K_1)\, \sigma_0$$

Оператор K_1 определен формулой $I + K_1 = (I - (1-2\nu)\, R/3)^{-1}$.

Из (3.6) следует равенство

$$-\sigma_0 + 3\lambda\nu^{-1}\varepsilon = E\,(1+\nu)^{-1}\, R\varepsilon$$

Заменяя в левой его части ε в соответствии с (3.6), получаем выражение для $R\varepsilon$, подставляя которое в (3.4) окончательно имеем

$$(I - R)\, \varepsilon_{jl} = E^{-1}\,(1+\nu)\, [\sigma_{jl} - (\nu I + (1+\nu)\, K_1)\, \sigma_0\delta_{jl}] \tag{3.7}$$

Далее считаем, что удлинения, сдвиги и углы поворота материала среды малы и ими можно пренебречь в уравнениях равновесия, имеющих вид

$$\sigma_{11,\,10} + \frac{\sigma_{12,\,01}}{r} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} = 0, \qquad \sigma_{12,\,10} + \frac{\sigma_{22,\,01}}{r} + \frac{2\sigma_{12}}{r} = 0 \tag{3.8}$$

и уравнениях совместности деформаций

$$\begin{aligned} &W(\varepsilon) = 0; \quad W = \cos^2\vartheta\,\varepsilon_{22,\,20} + \sin^2\vartheta\,(r^{-1}\varepsilon_{22,\,10} + r^{-2}\varepsilon_{22,\,02}) - \\ &- 2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r}(r^{-1}\varepsilon_{22,\,01}) + \sin^2\vartheta\,\varepsilon_{11,\,20} + \\ &+ \cos^2\vartheta\,(r^{-1}\varepsilon_{11,\,10} + r^{-2}\varepsilon_{11,\,02}) + 2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r}(r^{-1}\varepsilon_{11,\,01}) + \\ &+ 2\sin\vartheta\cos\vartheta\,(r^{-1}\varepsilon_{12,\,10} + r^{-2}\varepsilon_{12,\,02} - \varepsilon_{12,\,20}) - \\ &- 2\,(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\,\frac{\partial}{\partial r}(r^{-1}\varepsilon_{12,\,01}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Подставим в (3.9) выражения для деформаций (3.7). Получим уравнение, выражающее условие совместности напряжений

$$(1+\nu)\,\Delta\sigma_0 = (I + R_2)\, W(\sigma), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \tag{3.10}$$

В (3.10) введен оператор R_2 по формуле $I + R_2 = (I - K_2)^{-1}$, $K_2 = (1+\nu)(1-\nu)^{-1} K_1$.

Напряжения σ_{jl} выражаются через функцию Эри $F = F\,(t, r, \vartheta)$ при помощи равенств

$$\sigma_{11} = r^{-1}F_{,\,10} + r^{-2}F_{,\,02}, \quad \sigma_{22} = F_{,\,20}, \quad \sigma_{12} = -(r^{-1}F_{,\,01})_{,\,10} \tag{3.11}$$

Отметим, что для напряжений, определяемых (3.11), уравнения равновесия (3.8) выполнены.

Подставляя (3.11) в (3.10), получаем

$$\Delta^2 F = 0 \tag{3.12}$$

Граничные условия для уравнения (3.12) в точках контакта трубы и среды имеют вид (2.8), а на бесконечности

$$2\sigma_{11} = -(p_1 + p_2) - (p_1 - p_2)\cos 2\vartheta \tag{3.13}$$

$$2\sigma_{22} = -(p_1 + p_2) + (p_1 - p_2)\cos 2\vartheta$$
$$2\sigma_{12} = (p_1 - p_2)\sin 2\vartheta, \quad r = \infty$$

Далее считается, что при рассмотрении связи между деформациями и перемещениями среды можно пренебречь квадратами удлинений, сдвигов и углов поворота, т. е.

(3.14) $$\varepsilon_{11} = u_{1,10}, \quad \varepsilon_{22} = r^{-1}(u_{2,01} + u_1)$$
$$2\varepsilon_{12} = u_{2,10} + r^{-1}(u_{1,01} - u_2)$$

Положим $F = F_0 + F_1$. Здесь F_0 удовлетворяет уравнению (3.12), граничным условиям (3.13) и нулевым граничным условиям (2.8); функция F_1 удовлетворяет (3.12), граничному условию (2.8) и нулевым граничным условиям (3.13). Обозначим через $\sigma_{jl}{}^k$ напряжения, определяемые формулами (3.11), при $F = F_k$, $k = 0, 1$. Ясно, что

(3.15) $$q_1 = g_1 - \sigma_{11}(t, 1, \vartheta), \quad q_2 = g_2 + \sigma_{12}(t, 1, \vartheta)$$

Поэтому для определения q_j достаточно найти F_j, ибо $\sigma_{jl} = \sigma_{jl}{}^\circ + \sigma_{jl}{}^1$.

4. Построение F_0. Ищем F_0 в виде

(4.1) $$F_0 = (c_1 r^2 + c_2)\ln r + c_3 r^2 + c_4 + (c_5 r^4 + c_6 r^2 + c_7 + c_8 r^{-2})\cos 2\vartheta$$

где функции времени $c_j(t)$ подлежат определению. Подставим (4.1) в (3.11). Тогда в силу граничных условий (3.13) и ограниченности $\sigma_{jl}{}^\circ$ при $r \geqslant 1$ получим

(4.2) $$c_1 = c_5 = 0, \quad c_3 = -(p_1 + p_2)/4, \quad c_6 = (p_1 - p_2)/4$$

Отсюда, из (4.1) и (3.11) следует

(4.3) $$\sigma_{11}{}^\circ = -(p_1 + p_2)/2 + c_2 r^{-2} - [(p_1 - p_2)/2 + 4c_7 r^{-2} + 6c_8 r^{-4}]\cos 2\vartheta$$
$$\sigma_{22}{}^\circ = -(p_1 + p_2)/2 - c_2 r^{-2} + [(p_1 - p_2)/2 + 6c_8 r^{-4}]\cos 2\vartheta$$
$$\sigma_{12}{}^\circ = -2[(p_1 - p_2)/4 + c_7 r^{-2} + 3c_8 r^{-4}]\sin 2\vartheta$$

Для определения остальных функций $c_j(t)$ используем нулевые граничные условия (2.8). Выразим вначале $\varkappa$ через деформацию. Ввиду (3.14) будет $u_1 = r\varepsilon_{22} - u_{2,01}$. Дифференцируя это равенство по r и используя (3.14), получим

$$\varepsilon_{11} = \partial(r\varepsilon_{22})/\partial r - u_{2,11}, \quad u_{2,10} = 2\varepsilon_{12} - r^{-1}(u_{1,01} - u_2)$$

Продифференцируем второе из этих соотношений по ϑ и сложим с первым. Получим в силу второго уравнения (2.2)

(4.4) $$\varkappa = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22,10} - 2\varepsilon_{12,01} - \varepsilon_{11}, \quad r = 1$$

Поскольку в рассматриваемом случае граничные условия (2.8) — нулевые, то $\varkappa = 0$ при $r = 1$, т. е. с учетом (4.4) получим

(4.5) $$\varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{22,10} - 2\varepsilon_{12,01} - \varepsilon_{11} = 0, \quad r = 1$$

Определим теперь деформации, соответствующие напряжениям (4.3), по формулам (3.7) и подставим их в (4.5). Получим выражения для c_2, c_7, c_8. В силу (4.3) при $r = 1$ имеем

(4.6) $$\sigma_{11}{}^\circ = -[A(t)(p_1 + p_2) + B(t)(p_1 - p_2)\cos 2\vartheta]$$
$$\sigma_{12}{}^\circ = [2B(t) + {}^3/_2](p_1 - p_2)$$
$$A(t) = 1 - [3\nu I + (1 - 2\nu)R][3I - (1 - 2\nu)R]^{-1}\cdot 1$$
$$2B(t) = -1 + {}^1/_2[3I + 4(4\nu I - (1 - 2\nu)R)]^{-1}\cdot 1$$

Из (4.6) видно, что при $p_1 = p_2$ и $g = 0$ в трубе имеется только нормальное усилие N, уравновешивающее внешнее давление.

5. Определение компонент σ_{jl}^1. Из формулы для комплексного представления напряжений ([12], с. 136) следует, что

$$\sigma_{11}^1 - i\sigma_{12}^1 = \varphi' + \overline{\varphi}' - e^{2i\vartheta}(\bar{z}\varphi'' + \psi'), \quad |z| \geqslant 1 \tag{5.1}$$

Здесь $\varphi(t, z)$, $\psi(t, z)$ — функции времени $t \geqslant 0$ и комплексного переменного $z = re^{i\vartheta}$; штрих означает производную по z, черта сверху — комплексное сопряжение. Функции φ и ψ аналитические по z при каждом фиксированном t. Далее, модифицируя вывод формулы Колосова ([12], с. 327), получаем, что на окружности $\Gamma = \{z, \ |z| = 1\}$ справедливо равенство

$$\varkappa_1 (I - K_3)\varphi - z\overline{\varphi}' - \overline{\psi} = g \tag{5.2}$$

Здесь

$$g(t, z) = E(1 + \nu)^{-1}(I - R)(u_1 + iu_2)e^{i\vartheta} \tag{5.3}$$

$$\varkappa_1 = 3 - 4\nu = (\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)^{-1}, \ K_3 = 4(1 + \nu)(3 - 4\nu)^{-1}K_1$$

Введем оператор R_3 по формуле $(I + R_3) = (I - K_3)^{-1}$.

Из (5.1) и известных результатов ([12], с. 315—317) вытекает, что

$$\varphi(t, z) = -\frac{1}{2\pi i\varkappa_1}(I + R_3)\int_\Gamma \frac{g(t, s)\,ds}{s - z}, \quad |z| > 1 \tag{5.4}$$

$$\psi(t, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{g(t, s)}}{s - z}ds - \frac{1}{z}\varphi' + \psi(t, \infty)$$

$$\psi(t, \infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{g(t, s)}}{s}ds$$

Для конкретизации функций φ и ψ введем на Γ функцию

$$V(t, z) = -(w_{2,01} - iw_2)e^{i\vartheta}, \quad |z| = 1$$

Отметим, что $g = E(1 + \nu)^{-1}(I - R)V$ на основании (5.3).

Подставляя разложение функции $w_2(t, \vartheta)$ в ряд Фурье

$$w_2(t, \vartheta) = \frac{1}{2}a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(t)\cos n\vartheta + b_n(t)\sin n\vartheta] \tag{5.5}$$

в граничное условие (2.8), получаем, что на Γ

$$u_1 = a_1\sin\vartheta - b_1\cos\vartheta + \sum_{n=2}^{\infty} n(a_n\sin n\vartheta - b_n\cos n\vartheta) \tag{5.6}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\vartheta + b_1\sin\vartheta + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n\cos n\vartheta + b_n\sin n\vartheta)$$

Слагаемые в правой части каждого из соотношений (5.6) вне бесконечных сумм описывают смещение границы среды как жесткого целого: поворот против часовой стрелки вокруг оси Ox_3 на угол $a_0/2$, смещение по оси Ox_1 на расстояние $-b_1$ и смещение по оси Ox_2 на расстояние a_1.

В рассматриваемом случае граничные условия (3.13) нулевые, поэтому они не препятствуют жесткому смещению среды как целого, т. е. вся среда будет перемещаться так же, как и ее граница. Однако при рассмотрении деформаций среды перемещение ее как жесткого целого не представляет интереса, поэтому можно положить $a_0 = a_1 = b_1 = 0$. С учетом этих равенств получим

$$V(t, z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}[(n-1)c_n z^{n+1} + (n+1)c_n z^{-n+1}]$$

$$c_n(t) = b_n(t) + ia_n(t)$$

Отсюда, из теоремы о вычетах и соотношений (5.3), (5.4) следует, что

$$\varphi(t, z) = -S\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\bar{c}_n z^{-n+1} \tag{5.7}$$

$$\psi(t, z) = S_1\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\bar{c}_n z^{-n-1} - S\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)\bar{c}_n z^{-n-1} + \psi(t, \infty)$$

$$S = \mu\varkappa_1^{-1}(I + R_3)(I - R), \quad S_1 = \mu(I - R)$$

Подставим выражения (5.7) в (5.1) и отделим действительные и мнимые части. Окончательно получим, что на Γ (т. е. при $|z| = 1$)

$$\sigma_{11}^1(t, \vartheta) = \sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)(S+S_1)(b_n\cos n\vartheta - a_n\sin n\vartheta) \tag{5.8}$$

$$\sigma_{12}^1(t, \vartheta) = \sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)(S_1-S)(a_n\cos n\vartheta + b_n\sin n\vartheta)$$

Формулы (4.6), (5.8) определяют действие на трубу со стороны вязкоупругой среды касательного усилия интенсивности σ_{12} и нормального давления интенсивности $-\sigma_{11}$.

В уравнении (2.7) искомые усилия q_1 и q_2 таковы:

$$q_1 = g_1 - \sigma_{11}^\circ - \sigma_{11}^1, \quad q_2 = g_2 + \sigma_{12}^\circ + \sigma_{12}^1 \tag{5.9}$$

где σ_{11}° и σ_{11}^1 имеют вид (4.6), а σ_{11}^1 и σ_{12}^1 даются формулами (5.8).

6. Условия устойчивости трубы. Установим условия устойчивости при дополнительном предположении

$$\sigma_{11}^\circ \geqslant \sigma_{11}^1 + g_1 \tag{6.1}$$

С учетом (6.1) уравнение для прогибов (2.7), (5.9) запишем в виде

$$D(w_{2,06} + 2w_{2,04} + w_{2,02}) + \partial[\sigma_{11}^\circ(w_{2,01} + w_{2,03})]/\partial\vartheta = \tag{6.2}$$
$$= q_{1,01} - q_2$$

Граничные условия для уравнения (6.2) состоят в равенстве значений функции w_2 и ее производных до пятого порядка включительно в точках $-\pi$ и π.

Фиксируем некоторое целое число $n \geqslant 2$. Умножим обе части уравнения (6.2) на $\cos n\vartheta$ и проинтегрируем по ϑ в пределах от $-\pi$ до π. Учитывая ортогональность системы функций $\sin n\vartheta$ и $\cos n\vartheta$ и разложения (5.5), (5.8), (5.9), получаем

$$\pi(n^2-1)J(t, n)a_n(t) = G(n) + \tag{6.3}$$
$$+ {}^1/_2 nB(t)\pi(p_1 - p_2)[a_{n+2}(n+2)((n+2)^2-1) -$$
$$- a_{n-2}(n-2)((n-2)^2-1)]$$

$$G(n) = \int_{-\pi}^{\pi}(g_2\cos n\vartheta + ng_1\sin n\vartheta)\,d\vartheta$$

$$J(t, n) = Dn^2(n^2-1) - A(t)(p_1+p_2)n^2 - (S_1 - S) + (S_1 + S)n$$

Ясно, что

$$|G(n)| \leqslant \sqrt{\pi}(n+1)|g| \tag{6.4}$$

$$|g| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} g_1^2\,d\vartheta\right)^{1/2} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} g_2^2\,d\vartheta\right)^{1/2}$$

Предположим далее, что $(I + R_3)(I - R) = I - R_5$, причем ядро $r_5(t, \tau)$ оператора R_5 удовлетворяет условиям вида (3.3). Введем обозначения

$$A_n(t) = \max_\tau |a_n(\tau)|, \quad B_n(t) = \max_\tau |b_n(\tau)|, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t$$

$$\lambda(n, r, r_5) = Dn^2(n^2 - 1) + \mu(1 - |r|)(n - 1) + \mu\varkappa_1^{-1}(1 - |r_5|)(n + 1)$$

$$\lambda_1(r, r_5) = \min_n n^{-2}\lambda(n, r, r_5), \quad n \geqslant 2$$

Ясно, что

$$\left|\int_0^t r(t, \tau)a_n(\tau)\,d\tau\right| \leqslant |r|A_n(t), \quad \left|\int_0^t r_5(t, \tau)a_n(\tau)\,d\tau\right| \leqslant |r_5|A_n(t)$$

Поэтому с учетом (6.3), (6.4) имеем

(6.5) $$\Lambda(n)A_n(t) \leqslant L(A_n)$$

$$\Lambda(n) = \lambda(n, r, r_5) - n^2A(t)(p_1 + p_2)$$

$$L(A_n) = [\sqrt{\pi}(n - 1)]^{-1}|g| + nB(t)|p_1 - p_2|[2(n^2 - 1)]^{-1}[\beta(n + 2)A_{n+2} + \beta(n - 2)A_{n-2}], \quad n \geqslant 2; \ \beta(n) = n(n^2 - 1)$$

Наложим теперь два ограничения на параметры задачи:

(6.6) $$(p_1 + p_2)A(t) < \lambda_1(r, r_5)$$

(6.7) $$|B(t)(p_1 - p_2)| \sup_n \beta(n + 2)[\Lambda^{-1}(n)\beta_1(n)\chi(n) + \Lambda^{-1}(n + 4)\beta_1(n + 4)] < 2, \ n \geqslant 0; \ \beta_1(n) = n(n^2 - 1)^{-1}$$

Здесь $\chi(n) = 0$ при $n = 0, 1$ и $\chi(n) = 1$ при $n \geqslant 2$.

Ввиду (6.6) найдется такая постоянная $c > 0$, что

(6.8) $$\Lambda(n) \geqslant cn^4$$

Просуммируем теперь обе части (6.5) по n. С учетом (6.6) — (6.8) убеждаемся в существовании такой постоянной $c_1 > 0$, что

(6.9) $$\sum_{n=2}^{\infty} A_n(t) \leqslant c_1|g|$$

Аналогично оценивается и сумма функций $B_n(t)$

(6.10) $$\sum_{n=2}^{\infty} B_n(t) \leqslant c_1|g| + c_2|B(t)(p_1 - p_2)|$$

Таким образом

(6.11) $$|w_1(t, \vartheta)| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}[A_n(t) + B_n(t)]$$

Для оценки w_2 потребуем, чтобы

(6.12) $$|B(t)(p_1 - p_2)| \sup_n \beta_2(n + 2)[\Lambda^{-1}(n)\beta_1(n)\chi(n) + \Lambda^{-1}(n + 4)\beta_1(n + 4)] < 2, \ n \geqslant 0$$

$$\beta_2(n) = n^2 - 1$$

При выполнении условия (6.12) аналогично (6.9), (6.10) выводится, что

(6.13) $$\sum_{n=2}^{\infty} n(A_n + B_n) \leqslant c_1|g| + c_2|B(t)(p_1 - p_2)|$$

Значит

(6.14) $$|w_2(t, \vartheta)| = |w_{1,01}| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} n(A_n + B_n)$$

Тем самым ввиду (6.11), (6.14) установлена

Теорема 1. Пусть выполнены сформулированные выше предположения. Тогда труба устойчива при выполнении условий (6.6), (6.7), (6.12).

Условия устойчивости можно сформулировать в иных терминах в зависимости от предельного поведения ядер r и r_5.

Теорема 2. Пусть существуют такие функции $r^\circ(t, \tau)$ и $r_5^\circ(t, \tau)$, что

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{t\geqslant T} \int_T^t [\,|r(t, \tau) - r^\circ(t, \tau)| + |r_5(t, \tau) - r_5^\circ(t, \tau)|]\, d\tau = 0$$

$$|r^\circ| < 1, \quad |r_5^\circ| < 1$$

Тогда труба устойчива при выполнении условий (6.6), (6.7), (6.12), всюду в которых r° должно стоять вместо r, а r_5° вместо r_5.

Замечания. 1°. Пусть $p_1 = p_2 = p$. При этом требования (6.7), (6.12) выполнены. Тогда в условиях теоремы 1 труба устойчива при $p < [1 + A(t)]^{-1}\lambda_1(r, r_5)$, а в условиях теоремы 2 — при $p < [1 + A(t)]^{-1}\lambda_1(r^\circ, r_5^\circ)$ (функция $A(t)$ определена в (4.6)).

2°. Пусть $p_1 = p_2 = p$, а уравнения состояния среды имеют более простой вид

$$\sigma_{jl} = E(1+\nu)^{-1}(I - R)[\varepsilon_{jl} + 3\nu(1-2\nu)^{-1}\varepsilon\delta_{jl}]$$

Тогда упрощаются как формулировки, так и доказательства, всюду в которых надо положить $K_3 = R_3 = 0$. В частности, в этом случае

$$\sigma_{11}^\circ = -p[1 + \mu(\lambda+\mu)^{-1}r^{-2}], \quad \sigma_{12}^\circ = 0$$

$$\sigma_{22}^\circ = -p[1 - \mu(\lambda+\mu)^{-1}r^{-2}]$$

В условиях теоремы 1 труба устойчива при

(6.15) $$p < (\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}\lambda_1(r, 0)$$

а в условиях теоремы 2 величина r в (6.15) заменяется на r°.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок. Киев: Наук. думка, 1977. 204 с.
2. *Алимжанов М. Т.* Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород.— Алма-Ата: Наука, 1982. 270 с.
3. *Глушко В. Т.* Проявление горного давления в глубоких шахтах. Киев: Наук. думка, 1971. 196 с.
4. *Леонов М. Я., Панасюк В. В.* Устойчивость обсадных труб.— Изв. АН СССР. ОТН, 1954, № 5, с. 51—56.
5. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
6. *Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.* Устойчивость стержней из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 177—187.
7. *Савин Г. Н.* Механика деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1979. 466 с.
8. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.— Л.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
9. *Короткин Я. И., Локшин А. З., Сиверс Н. Л.* Изгиб и устойчивость пластин и круговых цилиндрических оболочек. Л.: Судпромгиз, 1955. 308 с.
10. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951. 344 с.
11. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.IV.1984