

УДК 539.83

## О ПРОЦЕССЕ РАЗГРУЗКИ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Кузьменко В. И.

Исследуется процесс разгрузки в теле, находящемся под действием штампа. Предполагается, что разгрузка происходит во всех точках тела. Площадка контакта между телом и штампом может изменяться в процессе разгрузки, поэтому задача о разгрузке при контактном взаимодействии нелинейна. Предлагается обобщение теоремы о разгрузке [1] на случай контактных задач. Получен вариационный принцип в перемещениях разгрузки, исследуются вопросы существования и единственности решения задачи о разгрузке. Рассматривается процесс разгрузки в упругопластическом полупространстве, на которое действует круговой в плане штамп. Изучается изменение площадки контакта и контактных напряжений в процессе разгрузки; получена форма остаточного отпечатка. Указанная задача была исследована с использованием решения Л. А. Галина [2] о действии на упругое полупространство кругового штампа и нагрузки, приложенной вне штампа. Рассматриваются также численные методы решения контактных задач при разгрузке; приводится пример численного решения задачи плоской деформации о сжатии полосы двумя штампами и последующей разгрузке.

**1. Постановка задачи.** Исследуется процесс разгрузки в теле, занимающем область  $\Omega$  трехмерного пространства, ограниченную кусочно-гладкой поверхностью  $\Gamma$ . Деформации и перемещения считаются малыми. Свяжем с процессом деформирования монотонно возрастающий параметр  $t$ ,  $t \in [0, T]$ , который будем называть временем. Под  $u_i(x, t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x, t)$ ,  $\sigma_{ij}(x, t)$  понимаем компоненты векторов перемещений, тензоров деформаций и напряжений в точке  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в момент времени  $t$ . Поверхность  $\Gamma$  может состоять из трех частей:  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_c$ . На части  $\Gamma_u$  заданы перемещения  $U_i(x, t)$ , на части  $\Gamma_\sigma$  — усилия  $S_i(x, t)$ . В точках поверхности  $\Gamma_c$  на тело действует жесткий штамп, форму и положение которого в момент времени  $t$  будем описывать расстоянием  $\Phi(x)$  от точки  $x$  до поверхности штампа, измеренному вдоль направления нормали  $\nu(x)$ . Площадка контакта заранее не задана и может изменяться в процессе деформирования. Предполагается, что трение на контактной поверхности отсутствует. Обозначим через  $u_\nu$ ,  $u_\tau$ ,  $\sigma_\nu$ ,  $\sigma_\tau$  нормальные и касательные компоненты векторов перемещений и напряжений на  $\Gamma_c$ . Тогда взаимодействие штампа и тела  $\Omega$  описывается следующими условиями [3, 4]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_\nu(x, t) &\leq 0, \quad \sigma_\tau(x, t) = 0 \\ u_\nu(x, t) &\leq \Phi(x, t), \quad \Phi(x, 0) \geq 0 \\ \sigma_\nu(x, t)[u_\nu(x, t) - \Phi(x, t)] &= 0, \quad \forall x \in \Gamma_c, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Пусть функции  $U_i(x, t)$ ,  $S_i(x, t)$ ,  $\Phi(x, t)$  таковы, что, начиная с момента времени  $t^*$ , во всех точках тела  $\Omega$  происходит разгрузка. Предполагается, что при  $t \leq t^*$  решение задачи получено в рамках некоторой определенной теории пластичности, а в момент времени  $t^*$  использовано связанное с этой теорией условие начала разгрузки. Введем приращения перемещений, деформаций и напряжений разгрузки  $\Delta u_i$ ,  $\Delta \varepsilon_{ij}$ ,  $\Delta \sigma_{ij}$  в

соответствии с соотношениями

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u_i(x, t) &= u_i(x, t^*) + \Delta u_i(x, t) \\ \varepsilon_{ij}(x, t) &= \varepsilon_{ij}(x, t^*) + \Delta \varepsilon_{ij}(x, t) \\ \sigma_{ij}(x, t) &= \sigma_{ij}(x, t^*) + \Delta \sigma_{ij}(x, t) \end{aligned}$$

Аналогично определяются приращения  $\Delta U_i(x, t)$ ,  $\Delta S_i(x, t)$ ,  $\Delta \Phi(x, t)$ . Считаем, что при разгрузке приращения компонент тензоров напряжений и деформаций связаны линейными соотношениями

$$(1.3) \quad \Delta \sigma_{ij} = A_{ijkl}^*(x) \Delta \varepsilon_{kl}$$

Упругие постоянные  $A_{ijkl}^*(x)$  зависят, вообще говоря, от истории деформирования до момента времени  $t^*$ .

Таким образом, задача определения напряженно-деформированного состояния при разгрузке состоит в построении функций  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ , удовлетворяющих уравнениям равновесия, соотношениям Коши и соотношениям (1.2), (1.3), а также граничным условиям на  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_\sigma$  и условиям (1.1) на контактной поверхности.

**2. Теорема о разгрузке при контактном взаимодействии.** Решение краевых задач о разгрузке при  $\Gamma_c = \emptyset$  основано на теореме А. А. Ильюшина [1], в соответствии с которой напряженно-деформированное состояние в произвольный момент разгрузки определяется соотношениями (1.2), а приращения  $\Delta u_i$ ,  $\Delta \varepsilon_{ij}$ ,  $\Delta \sigma_{ij}$  являются решением краевой задачи теории упругости для области  $\Omega$  при заданных на  $\Gamma_u$  перемещениях  $\Delta U_i(x, t)$  и заданных на  $\Gamma_\sigma$  усилиях  $\Delta S_i(x, t)$ . Очевидно, что формальная замена входящих в условия (1.1) величин их приращениями может привести к нарушению этих условий, поэтому теорема о разгрузке не может быть непосредственно перенесена на задачи контактного взаимодействия. Такой вывод объясняется нелинейным характером контактных задач с неопределенными площадками контакта, даже если используются линейные соотношения связи напряжений и деформаций.

Обобщим теорему о разгрузке на контактные задачи таким образом, чтобы сохранить соотношения (1.2). С этой целью сформулируем следующие специальные условия для приращений на поверхности  $\Gamma_c$ :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \Delta \sigma_\nu(x, t) &\leq -\sigma_\nu(x, t^*), \quad \Delta \sigma_\tau(x, t) = 0 \\ \Delta u_\nu(x, t) &\leq -u_\nu(x, t^*) + \Phi(x, t) \\ [\Delta \sigma_\nu(x, t) + \sigma_\nu(x, t^*)][\Delta u_\nu(x, t) + u_\nu(x, t^*) - \Phi(x, t)] &= \\ &= 0, \quad \forall x \in \Gamma_c, \quad \forall t \in [t^*, T] \end{aligned}$$

Можно убедиться, что если  $\Delta u_i$ ,  $\Delta \sigma_{ij}$  удовлетворяют условиям (2.1), то  $u_i$ ,  $\sigma_{ij}$ , определенные согласно (1.2), удовлетворяют условиям (1.1). Таким образом, получаем следующую теорему о разгрузке при контактном взаимодействии.

*Теорема 1.* Для определения напряженно-деформированного состояния в процессе разгрузки при контактном взаимодействии тела и штампа достаточно решить задачу теории упругости для области  $\Omega$  относительно  $\Delta u_i$ ,  $\Delta \varepsilon_{ij}$ ,  $\Delta \sigma_{ij}$ , заменив в краевых условиях  $U_i$ ,  $S_i$  на  $\Delta U_i$ ,  $\Delta S_i$  и приняв на контактной поверхности условия (2.1). Компоненты вектора перемещений и тензоров деформаций и напряжений определяются соотношениями (1.2).

*Следствие.* Если при действии на границу упругопластического полупространства штамп перемещается поступательно в направлении нормали

к границе, а контактные напряжения в момент начала разгрузки ограничены, то начало разгрузки сопровождается отставанием контактирующих поверхностей в точках контура площадки контакта.

Действительно, пусть в течение сколь угодно малого промежутка времени  $\Delta t$ , следующего за  $t^*$ , площадка контакта не уменьшилась. Тогда из теоремы 1 следует, что приращения контактных напряжений  $\Delta\sigma_v$  будут равны взятым с обратным знаком контактным напряжениям при вдавливании в упругое полупространство на глубину  $\Delta\Phi$  штампа с плоским основанием (площадка контакта не изменилась) или вогнутым основанием (площадка контакта увеличилась за время  $\Delta t$ ): В обоих случаях при сколь угодно малом  $\Delta\Phi$  контактные напряжения на кромках штампов будут неограниченными, что приводит ввиду ограниченности  $\sigma_v(x, t^*)$  к нарушению условия  $\sigma_v(x, t^*) + \Delta\sigma_v(x, t) \leq 0$ .

Отметим, что при достаточно большой глубине начального погружения возникающие остаточные напряжения могут вызвать повторные пластические деформации, например при вдавливании шара в полупространство [5]. В таких случаях теорема 1 применима только до возникновения повторных пластических деформаций. Поскольку следствие теоремы 1 относится к моменту начала разгрузки, то отмеченное обстоятельство не ограничивает применимость этого следствия.

**3. Вариационная формулировка задачи о разгрузке.** Используем пространство С. Л. Соболева  $H \equiv [W_2^1(\Omega)]^3$  вектор-функций  $v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$ , определенных в области  $\Omega$  и суммируемых с квадратом в  $\Omega$  вместе с первыми частными производными. Под скалярным произведением в  $H$  понимаем

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} (u_i v_i + u_{i,j} v_{i,j}) d\Omega$$

Введем множество  $V^*(t) \subset H$  кинематически возможных приращений перемещений  $\Delta v \in H$ , в которое включим приращения, удовлетворяющие граничным условиям на  $\Gamma_u$  и кинематическим условиям из (2.1) на  $\Gamma_c$

$$V^*(t) = \{ \Delta v \in H \mid \Delta v_i(x, t) = \Delta U_i(x, t), \forall x \in \Gamma_u \\ \Delta v_v(x, t) \leq -u_v(x, t^*) + \Phi(x, t), \forall x \in \Gamma_c \}$$

Обозначим через  $\Delta\zeta_{ij}$  приращения деформаций, соответствующие  $\Delta v$  согласно соотношениям Коши. Аналогично [4] с использованием теоремы Остроградского — Гаусса получаем следующее интегральное равенство:

$$\int_{\Omega} \Delta\sigma_{ij} (\Delta\zeta_{ij} - \Delta\varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \Delta S_i (\Delta v_i - \Delta u_i) d\Gamma - \\ - \int_{\Gamma_c} \Delta\sigma_v (\Delta v_v - \Delta u_v) d\Gamma = 0, \quad \forall \Delta v \in V^*(t), \quad \forall t \in [t^*, T]$$

Обозначим  $\sigma_v^* = \sigma_v(x, t^*)$ ,  $u_v^* = u_v(x, t^*)$  и преобразуем подынтегральное выражение в последнем слагаемом

$$\Delta\sigma_v (\Delta v_v - \Delta u_v) = \sigma_v (v_v - u_v^* - u_v + u_v^*) - \sigma_v^* (\Delta v_v - \Delta u_v) = \\ = \sigma_v (v_v - u_v) - \sigma_v^* (\Delta v_v - \Delta u_v)$$

Из условий (1.1) следует, что  $\sigma_v (v_v - u_v) \leq 0$ ,  $\forall v_v = u_v^* + \Delta v_v$ ,  $\Delta v_v \in V^*(t)$ . Тогда, используя соотношения (1.3), получаем следующее вариационное неравенство:

$$(3.1) \quad \int_{\Omega} A_{ijkl}^* \Delta\varepsilon_{kl} (\Delta\zeta_{ij} - \Delta\varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \Delta S_i (\Delta v_i - \Delta u_i) d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_c} \sigma_v^* (\Delta v_v - \Delta u_v) d\Gamma \geq 0, \quad \forall \Delta v \in V^*(t), \quad \forall t \in [t^*, T]$$

Если квадратичная форма  $A_{ijkl}^* \Delta \varepsilon_{ij} \Delta \varepsilon_{kl}$  положительна, то вариационное неравенство (3.1) эквивалентно следующей экстремальной задаче [6]:

$$(3.2) \quad \inf_{\Delta v \in V^*(t)} \left\{ J(\Delta v) = \frac{1}{2} B(\Delta v, \Delta v) - F(\Delta v) + F^*(\Delta v) \right\}$$

$$B(\Delta v, \Delta v) = \int_{\Omega} A_{ijkl}^* \Delta \zeta_{ij} \Delta \zeta_{kl} d\Omega$$

$$F(\Delta v) = \int_{\Gamma_{\sigma}} \Delta S_i \Delta v_i d\Gamma, \quad F^*(\Delta v) = \int_{\Gamma_c} \sigma_v^* \Delta v_v d\Gamma$$

Применяя известные приемы [6], можно показать, что решение вариационного неравенства (3.1) (или экстремальной задачи (3.2)) является обобщенным решением задачи в исходной постановке.

**4. Существование и единственность решения.** Исходя из вариационной постановки задачи, обратим внимание на то, что функционал  $J(\Delta v)$  — квадратичный и может рассматриваться как функционал полной энергии для некоторой задачи линейной теории упругости с заданными на  $\Gamma_c$  дополнительными усилиями  $-\sigma_v^*$ . Кроме того, множество  $V^*(t)$  — выпуклое и замкнутое для всех  $t \in [t^*, T]$ . В таком случае при исследовании существования и единственности решения достаточно воспользоваться соответствующими общими теоремами [7]. Аналогично [4] введем вспомогательное множество  $V_0^*(t)$ , которое получается путем сдвига всех элементов множества  $V^*(t)$  на фиксированный элемент  $u_0 \in V^*(t)$ , удовлетворяющий условиям

$$\Delta u_{0i}(x, t) = \Delta U_i(x, t), \quad \forall x \in \Gamma_u$$

$$\Delta u_{0v}(x, t) = -u_{0v}(x, t^*) + \Phi(x, t), \quad \forall x \in \Gamma_c$$

Введем также подпространство  $R \subset H$  перемещений тела  $\Omega$  как жесткого целого. Тогда как частный случай теоремы о существовании и единственности решения для линейных односторонних задач [7] справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть функции  $\sigma_v^*(x)$ ,  $A_{ijkl}^*(x)$  удовлетворяют условиям

$$\sigma_v^* \in H^{-1/2}(\Gamma_c), \quad A_{ijkl}^* \in L^{\infty}(\Omega)$$

$$A_{ijkl}^* \Delta \varepsilon_{ij} \Delta \varepsilon_{kl} \leq \alpha \Delta \varepsilon_{ij} \Delta \varepsilon_{ij}, \quad \alpha > 0$$

а заданные функции  $U_i$ ,  $S_i$ ,  $\Phi$  подчинены требованиям

$$U_i \in H^{1/2}(\Gamma_u), \quad S_i \in H^{-1/2}(\Gamma_{\sigma}), \quad \Phi \in H^{1/2}(\Gamma_c), \quad \forall t \in [t^*, T]$$

и для всех  $\Delta r \in R \cap V_0^*(t)$  имеет место неравенство

$$(4.1) \quad F(\Delta r) - F^*(\Delta r) \leq 0, \quad \forall t \in [t^*, T]$$

причем знак равенства может быть только для таких  $\Delta r \in R \cap V_0^*(t)$ , для которых  $-\Delta r \in R \cap V_0^*(t)$ . Тогда существует решение  $\Delta u \in H$ ,  $\forall t \in [t^*, T]$  задачи о процессе разгрузки при контактном взаимодействии тела и штампа, единственное с точностью до приращений перемещений  $\Delta r \in R$ , таких, что  $F(\Delta r) - F^*(\Delta r) = 0$ .

Отметим, что условия (4.1) необходимы только при  $\Gamma_u = \emptyset$ .

**5. О взаимодействии кругового штампа с полупространством в процессе разгрузки.** Пусть в упругопластическое полупространство  $x_3 \leq 0$  на глубину  $\Phi^*$  погружается круговой в плане штамп с плоским основанием радиуса  $c$ , а затем глубина погружения монотонно уменьшается. Предполагается, что трение между поверхностями тела и штампа отсут-

ствуется. Распределение контактного давления  $p^*(x_1, x_2)$  в момент времени  $t^*$  считается известным. Принимая, что упругопластическое деформирование до  $t = t^*$  не изменило упругих констант — модуля упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ , — определим размеры площадки контакта и распределение контактных напряжений в зависимости от положения штампа при разгрузке. Найдем также профиль остаточного отпечатка.

Задача о вдавливании кругового в плане штампа в жесткопластическое полупространство исследовалась в [8, 9] с использованием условия полной пластичности. Численное решение соответствующей задачи для упруго идеально пластической среды предложено в [10].

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , расположив начало координат в центре круга начального контакта. Направление оси  $Oz$  совпадает с направлением оси  $Ox_3$ . Пусть к некоторому моменту разгрузки глубина погружения штампа уменьшилась на  $\Delta\Phi$  по сравнению с  $\Phi^*$ . Согласно теореме 1, распределение давления  $p(r)$  при глубине погружения  $\Phi^* - \Delta\Phi$  может быть представлено в виде

$$p(r) = p^*(r) - \Delta p(r), \quad r \leq c$$

где  $\Delta p(r) = -\Delta\sigma_{zz}(r, \varphi, 0)$  — нормальные напряжения на поверхности  $z = 0$ , соответствующие решению задачи теории упругости для полупространства при следующих граничных условиях:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} -\Delta\sigma_{zz}(r, \varphi, 0) &= \Delta p(r) \leq p^*(r) \\ \Delta\sigma_{rz}(r, \varphi, 0) &= \Delta\sigma_{z\varphi}(r, \varphi, 0) = 0, \quad -\Delta u_z(r, \varphi, 0) \geq \Delta\Phi \\ [\Delta p(r) - p^*(r)][\Delta u_z(r, \varphi, 0) + \Delta\Phi] &= 0, \quad \forall r \leq c \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad \Delta\sigma_{zz}(r, \varphi, 0) = \Delta\sigma_{rz}(r, \varphi, 0) = \Delta\sigma_{z\varphi}(r, \varphi, 0) = 0, \quad \forall r > c$$

Считая, что контактные напряжения в начале и в процессе разгрузки ограничены, применим следствие теоремы 1 к каждому моменту разгрузки и получим, что площадка контакта при разгрузке — круг с монотонно уменьшающимся радиусом  $a \leq c$ . Тогда условия (5.1) можно заменить условиями в виде равенств

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \Delta p(r) &= p^*(r), \quad a \leq r \leq c \\ -\Delta u_z(r, \varphi, 0) &= \Delta\Phi, \quad r \leq a \\ \Delta\sigma_{rz}(r, \varphi, 0) &= \Delta\sigma_{z\varphi}(r, \varphi, 0) = 0, \quad r \leq c \end{aligned}$$

Условия (5.2) и (5.3) соответствуют задаче теории упругости о действии на границу полупространства кругового штампа с плоским основанием радиуса  $a$  и осесимметричной нагрузки, распределенной на кольце  $a \leq r \leq c$ . Такая задача — частный случай задачи Л. А. Галина [2] о действии кругового в плане штампа и нормальной нагрузки, распределенной вне штампа. Используя решение Л. А. Галина, получаем, что величина  $\Delta p(r)$  может быть представлена в виде

$$(5.4) \quad \Delta p(r) = \Delta p_1(r) + \Delta p_2(r)$$

где  $\Delta p_1(r)$  — давление под круговым штампом с основанием радиуса  $a$  при вдавливании на глубину  $\Delta\Phi$ , равное

$$(5.5) \quad \Delta p_1(r) = \frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \Delta\Phi$$

и  $\Delta p_2(r)$  — дополнительное давление, возникающее под штампом радиуса  $a$  от действия нагрузки  $p^*(r)$ , распределенной по кольцу  $a \leq r \leq c$

$\leq c$ , и равное

$$(5.6) \quad \Delta p_2(r) = -\frac{1}{\pi^2} \int_a^c \int_0^{2\pi} \frac{p^*(\rho)}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \vartheta} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{a^2 - r^2}} \rho d\rho d\vartheta$$

Радиус площадки контакта  $a$  определяется из условия непрерывности давления на контуре площадки контакта:  $p(a) = 0$ . Определение остаточного отпечатка сводится к определению перемещений точек круга  $r \leq c$ , возникающих от действия нормальной нагрузки  $p^*(r)$ , распределенной по этому кругу. Используя решение Буссинеска, получаем профиль остаточного отпечатка

$$(5.7) \quad w(r) = -\Phi^* + \frac{1-\nu}{\pi E} \int_a^c \int_0^{2\pi} \frac{p^*(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \vartheta}} \rho d\rho d\vartheta$$

Таким образом, получено в квадратурах распределение контактных напряжений в процессе разгрузки и форма остаточного отпечатка при любом распределении давления  $p^*(r)$  в момент начала разгрузки. Изложенный подход может быть использован также в случае действия круговых в плане штампов с неплоским основанием.

В случае  $p^*(r) = p^* = \text{const}$  удается получить простые выражения для радиуса площадки контакта, контактных напряжений и профиля остаточного отпечатка. Отметим, что распределение давления  $p^*(r)$  по схеме жесткопластического тела отличается от постоянного не более чем на 17% [8, 9].

При  $p^*(r) = \text{const}$  из (5.6) получаем

$$\Delta p_2(r) = \frac{2p^*}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2 - r^2}} - \frac{2p^*}{\pi} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2 - r^2}}$$

Условие непрерывности давления на контуре площадки контакта  $p^* - \Delta p(a) = 0$  будет удовлетворяться, если радиус площадки контакта выбрать следующим образом:

$$(5.8) \quad a = \left\{ c^2 - \left[ \frac{E}{2p^*(1-\nu^2)} \Delta\Phi \right]^2 \right\}^{1/2}$$

Формула (5.8) имеет смысл при  $\Delta\Phi \leq 2p^*c(1-\nu^2)/E$ ; при  $\Delta\Phi = 2p^*c(1-\nu^2)/E$  происходит полный отрыв штампа от полупространства. Взяв радиус площадки контакта согласно (5.8), получаем распределение контактного давления в произвольный момент процесса разгрузки

$$p(r) = \begin{cases} p^* - \frac{2p^*}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2 - r^2}}, & r \leq a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

Профиль остаточного отпечатка при  $p^*(r) = \text{const}$  описывается функцией

$$w(r) = -\Phi^* + \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} p^* c E \left( \frac{r}{c} \right)$$

где  $E(\dots)$  — полный эллиптический интеграл второго рода.

6. Пример численного решения. На основе вариационной постановки (п. 4) разработана методика численного решения задач о разгрузке в условиях плоской деформации. Дискретизация экстремальной задачи (3.3) осуществлялась при помощи метода конечных элементов, а решение возникающей задачи нелинейного программирования производилось обобщенным методом последовательной верхней релаксации [11]. Разработан комплекс программ для исследования напряженно-деформированного состояния в процессе разгрузки при плоской деформации многослойного пакета.

Рассмотрим в качестве примера задачу о сжатии двумя штампами полосы, имеющей в сечении плоскостью  $Ox_1x_2$  прямоугольную форму  $-2h \leq x_1 \leq 2h$ ,  $-h \leq x_2 \leq h$ . Поверхности штампов описываются следующими уравнениями (ввиду симметрии уравнения приведены только для верхнего штампа):

$$(6.1) \quad \frac{x_2}{h} = 1 + \frac{\tau_s}{2G} \left( \frac{x_1}{h} \right)^2$$

$$(6.2) \quad \frac{x_2}{h} = 1 + \frac{\tau_s}{8G} \left( \frac{x_1}{h} \right)^2$$

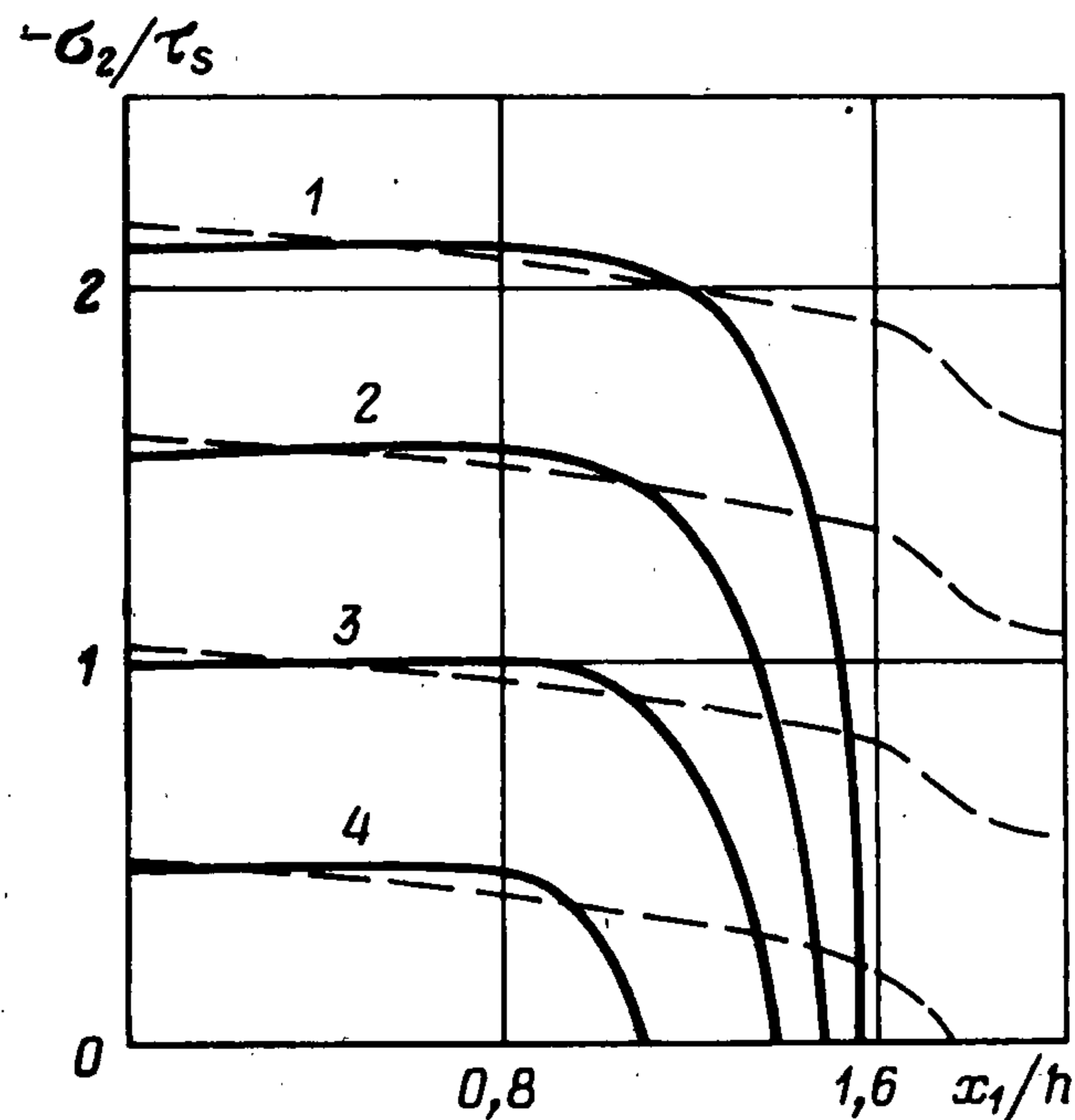
$$(6.3) \quad \frac{x_2}{h} = 1 + \frac{2\tau_s}{G} \left[ 1 - \frac{4}{(x_1/h)^2 + 4} \right]$$

где  $G$  — модуль упругости при кручении,  $\tau_s$  — предел упругости при кручении. В результате монотонного возрастания нагрузки штампы сближаются до расстояния  $2h - 2\Phi^*$ ,  $\Phi^* = 1,5 \tau_s h / G$ , а затем производится освобождение штампов от нагрузки, приводящее к разгрузке в полосе. Предполагается, что при активном нагружении и при разгрузке штампы смещаются поступательно в направлении оси  $Ox_2$ .

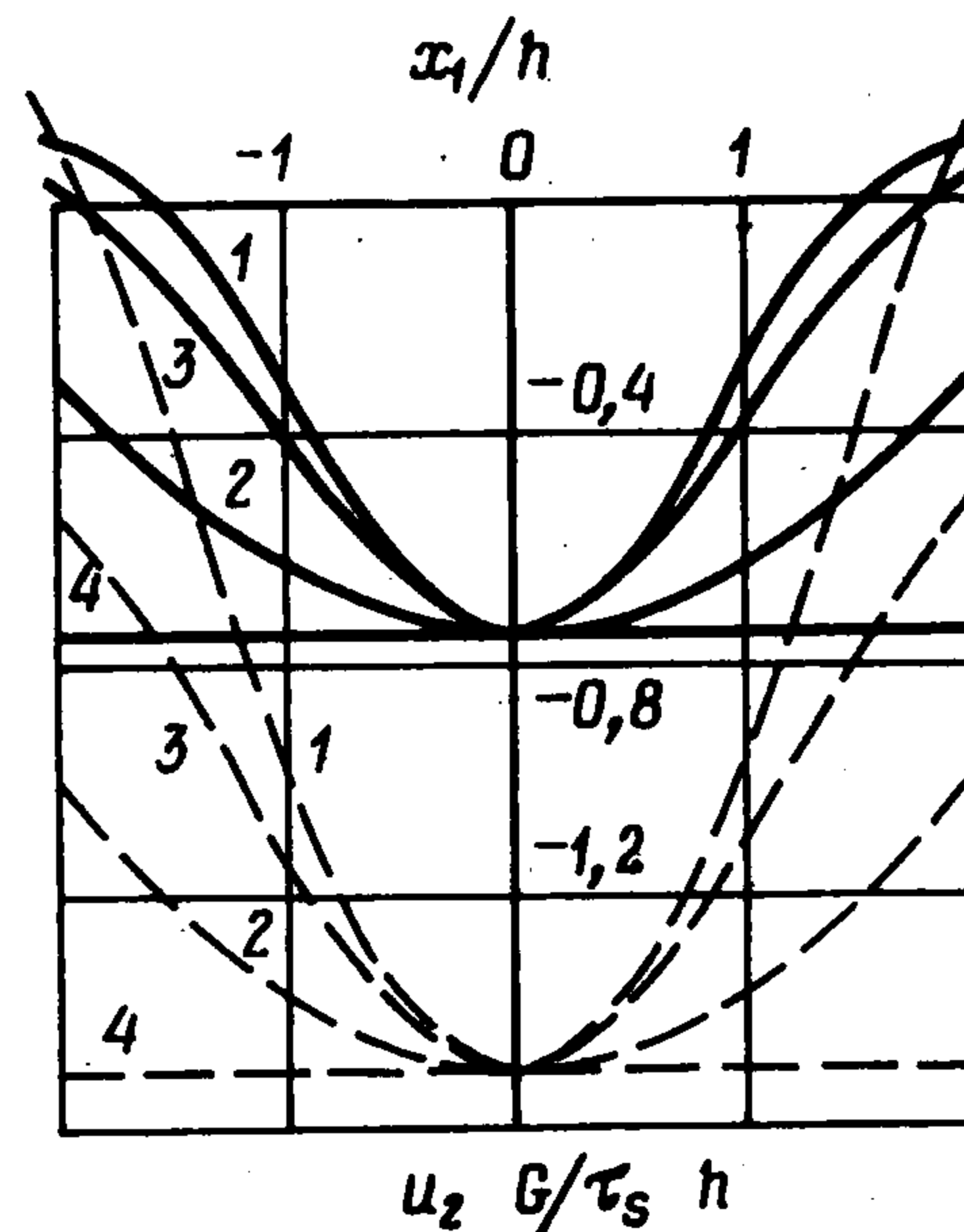
При исследовании процесса активного нагружения использовалась теория малых упругопластических деформаций; принималась схема линейного упрочнения с отношением упругого и касательного модулей, равным 0,05. Коэффициент Пуассона равнялся 0,3. Численное решение задачи при активном нагружении выполнялось с использованием методики, изложенной в [12].

Решение задачи о разгрузке производилось в допущении, что разгрузка происходит во всех точках полосы и повторные пластические деформации не возникают. Это предположение было подтверждено в результате решения задачи.

Распределение контактных напряжений в процессе разгрузки для случаев сжатия штампами с уравнениями поверхностей (6.1) (сплошные кривые), (6.3) (штриховые кривые) представлено на фиг. 1. Кривые 1 — 4 соответствуют расстоянию между штампа-



Фиг. 1



Фиг. 2

ми  $2h - 2\Phi$ ,  $\Phi G / \tau_s h = 1,5; 1,3; 1,1; 0,9$ . Отметим, что эпюры контактных напряжений на достаточно большом интервале изменения  $x_1$  подобны, причем максимальное значение контактного давления — линейная функция сближения  $2\Delta\Phi$ .

На фиг. 2 приведены вертикальные перемещения  $u_2(x_1)$  поверхности  $x_2 = h$  в момент начала разгрузки (штриховые кривые) и в остаточном состоянии (сплошные кривые). Номера 1, 2, 3 соответствуют штампам с уравнениями поверхностей (6.1), (6.2), (6.3). На фиг. 2 для сравнения приведены также перемещения для случая сжатия полосы параллельными плитами (кривые 4). Подчеркнем, что форма остаточного отпечатка значительно отличается от формы штампа. Обратим внимание на то, что максимальная глубина отпечатка во всех случаях практически одинакова, хотя формы отпечатков существенно различаются. Этот результат позволяет заключить, что для достаточно пологих штампов максимальная глубина остаточного отпечатка не зависит от формы штампа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.— Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
3. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 329—337.
4. *Кузьменко В. И.* О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 893—901.
5. *Hills D. A.* Some aspects of post-yield contact problems.— Wear, 1983, v. 85, No. 1, p. 107—119.
6. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980, 383 с.
7. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
8. *Ишлинский А. Ю.* Осесимметричная задача пластичности и проба Бринелля.— ПММ, 1944, т. 8, вып. 3, с. 201—224.
9. *Shield R. T.* On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry.— Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1955, v. 233, No. 1193, p. 267—287.— Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1957, № 1, с. 102—122.
10. *Баничук Н. В., Картвелишвили В. М., Черноусько Ф. Л.* Численное решение осесимметричной задачи о вдавливании штампа в упругопластическую среду.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 1, с. 50—57.
11. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
12. *Власенко Ю. Е., Кузьменко В. И., Фень Г. А.* Контактная задача для упругопластического многослойного пакета с учетом отставания слоев.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 67—73.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
19.III.1984