Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 3, 1985

УДК 539.383

ОБЩАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТАТИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Бабич С. Ю., Гузь А. Н.

Рассматривается общая пространственная статическая контактная задача для упругого полупространства с начальными напряжениями. Строятся точные решения при произвольной структуре упругого потенциала, являющегося дважды непрерывно дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина. Исследование проводится в общей форме для сжимаемых и несжимаемых тел.

Вопросы связанные с контактными задачами для тел с начальными напряжениями при частных формах упругого потенциала, рассматривались в [1—4]. В работах [5, 6] с позиций линеаризованной теории распространения упругих волн [7] рассмотрены задачи о вибрации жесткого штампа на поверхности начально напряженного полупространства и цилиндра. Контактные задачи для тел с начальными напряжениями в рамках [7] линеаризованной теории исследовались [8, 9] при произвольной структуре упругого потенциала в общем виде для теории больших (конечных) начальных деформаций и различных вариантов теории малых начальных деформаций. Дана [8, 9] постановка контактных задач для упругих тел с начальными напряжениями и рассмотрены контактные задачи кручения. Ряд контактных задач для упругой полуплоскости с начальными напряжениями рассмотрен [10—12] с использованием комплексных потенциалов плоских статических линеаризованных задач [13, 14]. Исследования выполнены в общей форме для сжимаемых и несжимаемых тел. Введены [15—18] комплексные потенциалы плоских динамических задач и на их основании решена плоская динамическая контактная задача для предварительно напряженной полуплоскости [19, 20], когда исходная задача допускает преобразование к стационарной задаче в подвижной системе координат. Введенные комплексные потенциалы при отсутствии начальных напряжений переходят в случае неравных корней определяющего уравнения в комплексные потенциалы С. Г. Лехницкого [21] для ортотропного линейного упругого тела и в случае равных корней — в комплексные потенциалы Колосова—Мусхелишвили [22] для изотропного линейного упругого тела.

1. Основные соотношения. Рассмотрим бесконечное упругое изотропное или трансверсально-изотропное тело с однородным начальным напряженно-деформированным состоянием, определяемым выражениями

$$S_{11}{}^{\circ} = S_{22}{}^{\circ} \neq 0, \quad S_{33}{}^{\circ} = 0 \tag{1.1}$$

В начальном деформированном состоянии введем декартову систему координат y_1, y_2, y_3 и произвольную цилиндрическую систему координат с осью Oy_3, обозначая через N и S нормаль и касательную к цилиндрической поверхности. Как и в [23], для цилиндрической системы координат введем новые переменные $z_i = n_i^{-1/2} y_i$. Для случаев, рассмотренных в [23], доказано, что $\operatorname{Im} n_i = 0$ и $\operatorname{Re} n_i > 0$.

Рассмотрим два случая представления решений пространственных статических задач для упругих тел с начальными напряжениями.

Равные корни. Перемещения в произвольной цилиндрической системе координат представим в виде (см. формулу (5.4) [23])

$$u_N = \frac{\partial}{\partial N}(\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^2}{\partial N\, \partial z_1}\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial S}\varphi_3 \tag{1.2}$$

$$u_S = \frac{\partial}{\partial S}(\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^2}{\partial S\,\partial z_1}\varphi_2 + \frac{\partial}{\partial N}\varphi_3$$

$$u_3 = m_1 n_1^{-1/2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi_1 + z_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\varphi_2\right) + (m_2 - 1)\, n_1^{-1/2}\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi_2$$

Для составляющих вектора напряжений, компоненты которого отнесены к размерам тела в начальном деформированном состоянии при $y_3 = \mathrm{const}$, имеем [23]

$$Q_{33}{}^* = c_{44}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\left[(1+m_1)\, l_1 \varphi_1 + (1+m_2)\, l_2 \varphi_2\right] + (1+m_1)\, l_1 z_1 \frac{\partial^3}{\partial z_1^3}\varphi_2\right\}$$
$$Q_{3N}^* = c_{44}\left\{n_1^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial N\,\partial z_1}\left[(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2\right] + n_1^{-1/2}(1+m_1)\, z_1 \frac{\partial^3}{\partial N\,\partial z_1^2}\varphi_2 - n_3^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial S\,\partial z_3}\varphi_3\right\},$$
$$Q_{3S}^* = c_{44}\left\{n_1^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial S\,\partial z_1}\left[(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2\right] + n_1^{-1/2}(1+m_1)\, z_1 \frac{\partial^3}{\partial S\,\partial z_1^2}\varphi_2 + n_3^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial N\,\partial z_3}\varphi_3\right\} \tag{1.3}$$

Неравные корни. Перемещения в произвольной цилиндрической системе координат запишем в виде (см. формулу (4.7) [23])

$$u_N = \frac{\partial}{\partial N}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{\partial}{\partial S}\varphi_3, \quad u_S = \frac{\partial}{\partial S}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\partial}{\partial N}\varphi_3$$
$$u_3 = n_1^{-1/2} m_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\varphi_1 + n_2^{-1/2} m_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\varphi_2 \tag{1.4}$$

Для составляющих вектора напряжений при $y_3 = \mathrm{const}$ ($z_i = \mathrm{const}$) имеем [23]

$$Q_{33}{}^* = c_{44}\left[(1+m_1)\, l_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\varphi_1 + (1+m_2)\, l_2 \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\varphi_2\right]$$
$$Q_{3N}^* = c_{44}\left[n_1^{-1/2}(1+m_1)\frac{\partial^2}{\partial N\,\partial z_1}\varphi_1 + n_2^{-1/2}(1+m_2)\frac{\partial^2}{\partial N\,\partial z_2}\varphi_2 - n_3^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial S\,\partial z_3}\varphi_3\right]$$
$$Q_{3S}^* = c_{44}\left[n_1^{-1/2}(1+m_1)\frac{\partial^2}{\partial S\,\partial z_1}\varphi_1 + n_2^{-1/2}(1+m_2)\times \frac{\partial^2}{\partial S\,\partial z_2}\varphi_2 + n_3^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial N\,\partial z_3}\varphi_3\right] \tag{1.5}$$

Функции φ_i ($i = 1, 2, 3$) в формулах (1.2)—(1.5) определяются выражениями, приведенными в [23]. Величины c_{44}, n_i m_i, l_i ($i=1, 2$) определяются через упругий потенциал и начальное напряженное деформированное состояние соответственно для сжимаемых и несжимаемых тел выражениями, приведенными в [23].

2. Контактная задача для произвольной области контакта. Рассмотрим основные результаты исследования для предварительно напряженного упругого полупространства ($y_3 < 0$) при действии на него без трения штампа, форма которого определяется функцией $u(y_1, y_2)$. Обозначим через S^* область контакта при $y_3 = 0$, через $q(y_1, y_2)$ — интенсивность нормального давления, действующего вне области контакта.

Граничные условия задачи при $y_3 = 0$ ($z_i = 0$) имеют вид

$$u_3 = -u(y_1, y_2), \quad Q_{3N}{}^* = 0, \quad Q_{3S}{}^* = 0, \quad \forall\, (y_1, y_2) \in S^*$$
$$Q_{33}{}^* = -q(y_1, y_2), \quad Q_{3N}{}^* = 0, \quad Q_{3S}{}^* = 0, \quad \forall\, (y_1, y_2) \notin S^* \tag{2.1}$$

Здесь $u = u_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_0$, где $\alpha_i = \text{const}$ и определяются из условия равновесия штампа.

$$P_3 = \iint\limits_{S^*} P\, dS^*, \quad M_j = \iint\limits_{S^*} y_j P\, dS^*, \quad j = 1, 2, \quad P = -Q_{33}^*|_{y_3} = 0$$

Исследование проведем в общей форме для сжимаемых и несжимаемых тел при произвольной структуре упругого потенциала.

Как и в [23], для равных корней ($n_1 = n_2$) введем новые потенциалы соотношениями

(2.2) $$\varphi_1 = (1 + m_1)^{-1} f(y_1, y_2, z_1), \quad \varphi_2 = -(1 + m_2)^{-1} f(y_1, y_2, z_1)$$
$$\varphi_3 = 0$$

Из (1.2), (1.3) с учетом (2.2) после ряда преобразований получаем (см. формулу (5.10) [23])

(2.3) $$Q_{33}^* = c_{44}\left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}(l_1 - l_2) - l_1 \frac{1 + m_1}{1 + m_2} z_1 \frac{\partial^3}{\partial z_1^3}\right] f$$
$$Q_{3L}^* = -\frac{c_{44} n_1^{-1/2}(1 + m_1) z_1}{1 + m_2} \frac{\partial^3}{\partial L\, \partial z_1^2} f, \quad L = N, S$$
$$u_3 = \frac{n_1^{-1/2}}{1 + m_1}\left[\frac{1 + 2m_1 - m_2}{1 + m_2} \frac{\partial}{\partial z_1} f - m_1 z_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} f\right]$$

Функция $f = f(y_1, y_2, z_1)$ является решением уравнения

(2.4) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = 0$$

Для неравных корней ($n_1 \neq n_2$) определяющего уравнения введем потенциалы такими соотношениями [23]:

(2.5) $$\varphi_1 = \frac{\sqrt{n_1}}{1 + m_1} f(y_1, y_2, z_1), \quad \varphi_2 = -\frac{\sqrt{n_2}}{1 + m_2} f(y_1, y_2, z_2), \quad \varphi_3 = 0$$

Из (1.4), (1.5) с учетом (2.5) имеем (см. формулу (4.17), из [23])

(2.6) $$u_3 = \frac{m_1}{1 + m_1} \frac{\partial}{\partial z_1} f(y_1, y_2, z_1) - \frac{m_2}{1 + m_2} \frac{\partial}{\partial z_2} f(y_1, y_2, z_2)$$
$$Q_{33}^* = c_{44}\left[\sqrt{n_1} l_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} f(y_1, y_2, z_1) - \sqrt{n_2} l_2 \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} f(y_1, y_2, z_2)\right]$$
$$Q_{3L}^* = c_{44} \frac{\partial}{\partial L}\left[\frac{\partial}{\partial z_1} f(y_1, y_2, z_1) - \frac{\partial}{\partial z_2} f(y_1, y_2, z_2)\right], \quad L = N, S$$

где функция f является решением одного из уравнений

(2.7) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_j^2} = 0, \quad j = 1, 2$$

Рассмотрим соотношения (2.2)—(2.7) при $y_3 = 0$. В этом случае для определения функции f вместо уравнений (2.4) и (2.7) можем записать одно уравнение

(2.8) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right) f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

Подставляя (2.3) и (2.6) в (2.1), получаем для потенциала f при $y_3 = 0$ такие граничные условия:

(2.9) $$A \frac{\partial f}{\partial y_3} = -u(y_1, y_2), \quad \forall (y_1, y_2) \in S^*$$
$$B \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} = -q(y_1, y_2), \quad \forall (y_1, y_2) \notin S^*$$

Здесь

(2.10) $$A = \frac{1 + 2m_1 - m_2}{\sqrt{n_1}(1 + m_1)(1 + m_2)}, \quad B = c_{44}(l_1 - l_2) \quad \text{(случай (2.3))}$$

(2.11) $$A = \frac{m_1 - m_2}{(1 + m_1)(1 + m_2)}, \quad B = c_{44}\left(\sqrt{n_1} l_1 - \sqrt{n_2} l_2\right) \quad \text{(случай (2.6))}$$

Введем новый гармонический потенциал

(2.12) $$A\partial f/\partial y_3 = V$$

Тогда из (2.9) и (2.12) для гармонического потенциала V при $y_3 = 0$ получаем граничные условия

(2.13) $$V = -u(y_1, y_2), \quad \forall (y_1, y_2) \in S^*,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y_3} = -\frac{A}{B} q(y_1, y_2), \quad \forall (y_1, y_2) \notin S^*$$

Из (2.13) и, например, (1.2) [24] следует, что смешанная задача для потенциала (2.13), к которой приводится контактная задача в случае упругого полупространства с начальными напряжениями, по структуре совпадает со смешанной задачей, к которой приводится контактная задача для полупространства без начальных напряжений, если провести замену (λ, μ — постоянные Ламе)

(2.14) $$\frac{A}{B} \sim \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)}$$

Таким образом, контактную задачу для упругого полупространства с начальными напряжениями можно считать решенной в том случае, когда для соответствующей области контакта решена контактная задача классической линейной теории упругости. В связи с этим можно воспользоваться известными потенциалами ([24—27] и др.) для контактных задач классической теории упругости в случае полупространства. С учетом замены (2.14) и представлений решений (2.3) и (2.6) можно определить напряженно-деформированное состояние полупространства с начальными напряжениями. Если интересоваться только давлением под штампом $P = -Q_{33}^* |_{y_3=0}$ и смещением полупространства $u_3 |_{y_3=0}$, то можно доказать несколько общих утверждений.

Из (2.3), (2.6), (2.10) — (2.12) при $y_3 = 0$ следуют выражения

(2.15) $$u_3 = V(y_1\ y_2,\ y_3), \quad \forall (y_1\ y_2) \notin S^*,$$
$$P = -\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial y_3} V(y_1, y_2, y_3), \quad \forall (y_1, y_2) \in S^*$$

В случае, когда вне штампа усилия не приложены, т. е. $q(y_1, y_2) = 0$, из (2.13) — (2.15) следует, что распределение давления под штампом для упругого полупространства с начальными напряжениями отличается от соответствующего распределения в классической теории упругости множителем, зависящим от начальных напряжений

(2.16) $$K = \frac{B}{A} \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)}$$

Аналогичные утверждения для упругой полуплоскости с начальными напряжениями получены в [10, 11].

Сформулированный выше результат дает возможность определить распределение напряженного состояния только под штампом по известному решению для упругого полупространства без начальных напряжений в случае произвольной области контакта. Задача определения напряженно-деформированного состояния во всем полупространстве сводится к отысканию гармонической функции $f(y_1, y_2, y_3)$ при дальнейшей ее подстановке в выражения для перемещений и напряжений. Изложенные выше результаты частично опубликованы в [28].

3. Осесимметричная контактная задача. В качестве примера сведения смешанной задачи с начальными напряжениями к классической смешанной задаче теории потенциала рассмотрим осесимметричную контактную задачу для предварительно напряженного полупространства. Ограничимся здесь случаем кратных корней ($n_1 = n_2$) определяющего уравнения. Этот случай имеет место, например, для сжимаемых тел с потенциалом гармонического типа и для несжимаемых тел с потенциалом Бартенева — Хазановича [23]. В рассматриваемом осесимметричном случае для определения перемещений через гармоническую функцию $f = f(r, z_1)$ в круговой цилиндрической системе координат r, θ, y_3 из (1.2), (2.2), (2.3) имеем выражения

$$u_r = \frac{m_2 - m_1}{(1+m_1)(1+m_2)} \frac{\partial f}{\partial r} - (1+m_2)^{-1} z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial r \, \partial z_1} \tag{3.1}$$

$$u_3 = \frac{n_1^{-1/2}}{1+m_1} \left[\frac{1+2m_1-m_2}{1+m_2} \frac{\partial f}{\partial z_1} - m_1 z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} \right]$$

Из (2.3) выводим выражения для составляющих вектора напряжений при $y_3 = \mathrm{const}$ ($z_i = \mathrm{const}$) в виде

$$Q_{3r}^* = -\frac{c_{44}(1+m_1) z_1}{\sqrt{n_1}(1+m_2)} \frac{\partial^3 f}{\partial r \, \partial z_1^2} \tag{3.2}$$

$$Q_{33}^* = c_{44} \left[(l_1 - l_2) \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{l_1 (1+m_1) z_1}{1+m_2} \frac{\partial^3}{\partial z_1^3} \right] f$$

Функция $f = f(r, z_1)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = 0$$

Пусть в упругое предварительно напряженное полупространство $z \leqslant 0$ вдавливается штамп, ограниченный поверхностью вращения. Предполагается, что между штампом и полупространством отсутствуют силы трения и на штамп действует заданная внешняя нагрузка P_3, направленная по оси симметрии.

Граничные условия задачи при $y_3 = 0$ имеют вид

$$u_3(r, 0) = -\varphi(r), \quad Q_{3r}^*(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < a \tag{3.3}$$

$$Q_{33}^*(r, 0) = 0, \quad Q_{3r}^*(r, 0) = 0, \quad r > a$$

где $\varphi(r) = \varphi_0(r) + \alpha_0$ ($\varphi_0(r)$ — функция, определяющая форму штампа, α_0 — поступательное перемещение штампа, a — радиус площадки контакта).

При $y_3 = 0$ ($y_3 \equiv z_1 = 0$) с учетом выражений (3.1), (3.2) получаем граничные условия

$$\frac{\partial f}{\partial y_3} = -\frac{\varphi(r)}{A}, \quad A = \frac{1+2m_1-m_2}{(1+m_1)(1+m_2)\sqrt{n_1}}, \quad 0 \leqslant r < a \tag{3.4}$$

$$\partial^2 f / \partial y_3^2 = 0, \quad r > a$$

для определения функции $f = f(r, y_3)$, которая является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} = 0 \tag{3.5}$$

Смешанная задача для гармонического потенциала (3.4), (3.5), к которой приводится контактная задача для упругого полупространства с начальными напряжениями, полностью совпадает с соответствующей задачей в случае отсутствия начальных напряжений [29], если ввести замену

$$A = -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

Следуя [29, 30], из (3.4) получаем, что напряженно-деформированное состояние в полупространстве характеризуется следующей функцией:

$$f(\rho,\ y_3)=\int\limits_0^\infty p^{-1}C(p)\,J_0(p\rho)\exp\left(-\frac{p}{a}\,y_3\right)\mathrm{d}p \tag{3.6}$$

$$C(p)=-\frac{2}{\pi A}\left\{\cos(p)\int\limits_0^1 y(1-y^2)^{-1/2}\varphi(y)\,\mathrm{d}y+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^1 y(1-y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}y\int\limits_0^1\varphi(yx)\,px\sin(px)\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$(C(p)=C_1(p/a),\ r=a\rho,\ p=as,\ 0\leqslant\rho\leqslant 1)$$

На основании выражений (3.1), (3.2) и (3.6), учитывая при этом, что $z_i=y_3/\sqrt{n_i}$, $i=1,2$, можно определить распределение напряжений и перемещений в полупространстве.

Хотя смешанная задача для потенциала, к которой приводится контактная задача в случае упругого полупространства с начальными напряжениями (при указанной замене), совпадает с соответствующей смешанной задачей для полупространства без начальных напряжений, все же напряженно-деформированные состояния в полупространстве для указанных задач будут различными. Последнее связано с тем, что для данных задач различным образом представляются перемещения и напряжения через гармонические функции своих аргументов.

4. Пример. Определим влияние начальных напряжений на распределение давления под штампом, действующим на предварительно напряженное упругое полупространство. Обозначая давление под штампом, соответственно, для предварительно напряженного полупространства и в случае отсутствия начальных напряжений через P, P° согласно утверждению п. 2 имеем $P=P^\circ K$, где K определяется выражением (2.16).

В случае несжимаемого тела с потенциалом Бартенева—Хазановича для постоянных имеем [23]

$$c_{44}=2\mu\lambda_1^{-2}(\lambda_1^3+1)^{-1},\ \lambda_3=\lambda_1^{-2},\ n_1=n_2=\lambda_1^{-3},\ m_1=\lambda_1^{-3} \tag{4.1}$$
$$l_1=\lambda_1^3,\ m_2=1,\ l_2={}^1/_2(1-\lambda_1^3)$$

Для несжимаемого тела $\lambda\to\infty$, поэтому с учетом (2.16), (4.1) получаем

$$K=\frac{3\lambda_1^3-1}{2\lambda_1^3\sqrt{\lambda_1}} \tag{4.2}$$

Для несжимаемого тела с потенциалом Трелоара (тело неогуковского типа) постоянные имеют вид [23]

$$c_{44}=2c_{10}\lambda_1^{-4},\ \lambda_3=\lambda_1^{-2},\ n_1=\lambda_1^{-6},\ n_2=1,\ m_1=\lambda_1^{-6}; \tag{4.3}$$
$$m_2=1,\ l_1=2\lambda_1^6(1+\lambda_1^6)^{-1},\ l_2={}^1/_2(1+\lambda_1^6)$$

Для несжимаемого тела с потенциалом Трелоара следует положить $\mu=2c_{10}$, $\lambda\to\infty$, поэтому из (2.16), (4.3) получаем

$$K=\frac{\lambda_1^9+\lambda_1^6+3\lambda_1^3-1}{2\lambda_1^4(1+\lambda_1^3)} \tag{4.4}$$

Ниже для некоторых значений λ_1 приведены соответствующие значения K для тела с потенциалом Трелоара и (в скобках) для тела с потенциалом Бартенева—Хазановича

λ_1	0,67 (0,69)	0,8	1	1,5	2
K	0 (0)	0,75 (0,55)	1 (1)	1,33 (1,12)	2,08 (1,02)

Видно, что влияние начальных напряжений в случае несжимаемых тел на распределение давления под штампом довольно существенное.

При $\lambda_1^*\approx 0{,}67$ (0,69) (это соответствует поверхностной неустойчивости полупространства) из (4.2) и (4.4) получаем $K=0$, т. е. давление под штампом равно нулю.

Аналогичное явление было обнаружено для контактных задач кручения [8] и плоских задач [10,11]. С физической точки зрения естественно, что при достижении начальным состоянием значений, которые соответствуют поверхностной неустойчивости, для малых смещений штампа (в рамках линеаризованной теории) почти не нужно прилагать усилий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппова Л. М.* Плоская контактная задача для предварительно напряженного упругого тела.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3, с. 143—146.
2. *Филиппова Л. М.* Пространственная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 1080—1084.
3. *Dhaliwal, Ranjit S., Singh B. M.* The axisymmetric Boussinesq problem of an initially stressed neo-Hookean half-space for a punch of arbitrary profile.— Internat. J. Engng Sci., 1978, v. 16, No. 6, p. 379—385.
4. *Dhaliwal R. S., Rajit S., Rokne J. G., Singh B. M.* Axisymmetric contact and crack problems for an initially stressed neo-Hookean elastic layer.— Internat. J. Engng Sci., 1980, v. 18, No. 1, p. 169—179.
5. *Калинчук В. В., Полякова И. Б.* О возбуждении предварительно напряженного цилиндра.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 2, с. 384—389.
6. *Калинчук В. В., Полякова И. Б.* О вибрации штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства.— Прикл. механика, 1982, т. 18, № 6, с. 22—27.
7. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 с.
8. *Гузь А. Н.* О контактных задачах для упругих сжимаемых тел с начальными напряжениями.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 6, с. 48—52.
9. *Гузь А. Н.* К теории контактных задач для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 7, с. 42—45.
10. *Гузь А. Н.* Контактные задачи теории упругости для полуплоскости с начальными напряжениями.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 8, с. 48—58.
11. *Гузь А. Н.* О комплексных потенциалах плоской линеаризированной задачи теории упругости.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 9, с. 83—97.
12. *Бабич С. Ю.* О контактных задачах для предварительно напряженной полуплоскости с учетом сил трения.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 12, с. 21—24.
13. *Гузь А. Н.* Комплексные потенциалы плоской линеаризированной задачи теории упругости (сжимаемые тела).— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 5, с. 72—83.
14. *Гузь А. Н.* Комплексные потенциалы плоской линеаризированной задачи теории упругости (несжимаемые тела).— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 6, с. 64—70.
15. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н.* Комплексные потенциалы плоской динамической задачи для сжимаемых упругих тел с начальными напряжениями.— Прикл. механика, 1981, т. 17, № 7, с. 75—83.
16. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н.* Комплексные потенциалы плоских динамических задач для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 11, с. 41—45.
17. *Гузь А. Н., Бабич С. Ю.* О плоских динамических задачах для упругих тел с начальными напряжениями.— Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 2, с. 313—316.
18. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н.* Плоские динамические задачи для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 263—271.
19. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н.* Динамические контактные задачи для полуплоскости с начальными напряжениями.— В кн.: Тез. докл. 2-й Всес. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела». Днепропетровск: Изд-е Днепропетр. ун-та, 1981, с. 121.
20. *Бабич С. Ю.* О динамических контактных задачах для полуплоскости с начальными напряжениями.— Прикл. механика, 1982, т. 18, № 2, с. 68—73.
21. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
22. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
23. *Гузь А. Н.* Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (пространственные статические задачи).— Прикл. механика, 1981, т. 17, № 6, с. 3—20.
24. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
25. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
26. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
27. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.
28. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н.* Пространственные контактные задачи для упругого полупространства с начальными напряжениями.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 9, с. 35—39.
29. *Harding J. W., Sneddon I. N.* The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1945, v. 41, No. 1, p. 16—26.
30. *Снеддон И. Н.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.

Киев Поступила в редакцию 18.V.1983