

УДК 539.3 : 534.1

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Маслов В. П., Мосолов П. П.¹

Исследуемое уравнение

$$(0.1) \quad u_{tt} = (u_x - a |u_x|)_x, \quad a = \text{const}$$

при $|a| < 1$ описывает одномерные продольные движения разномодульной упругой среды [1, 2]. При $a = 1$ оно описывает аналогичные движения упругосыпучей среды, т. е. среды, имеющей конечный (положительный) модуль при сжатии и не оказывающей сопротивления растягивающим усилиям. Для определенности рассматривается случай $0 \leq a \leq 1$.

Для случая $0 < a < 1$ проводится классификация видов разрывов решения (ударные волны, сигнотоны, полусигнотоны, простые разрывы) и вводится понятие локального решения, описывающего простейшие качественные структуры разрывных решений (таких структур 189). Склейка локальных решений позволяет находить глобальное решение. Исследуются процессы возникновения разрывов решения и их бифуркации.

Для уравнения (0.1) при $a = 1$ аналогичным образом строится общая теория решений. При этом кроме перечисленных видов разрывов возникает новый тип — разрыв сплошности (откол). Рассматриваются конкретные задачи отражения волны от свободного края и от жесткой стенки, в которых проявляются разнообразные существенно нелинейные эффекты.

Уравнение (0.1) является частным случаем уравнения

$$(0.2) \quad u_{tt} - (\varphi(u_x))_x = 0$$

исследованию которого посвящено много работ [3]. Относительно уравнения (0.2) известен ряд фактов, отличающих его от линейных гиперболических уравнений второго порядка. Например, задача Коши для (0.2) с бесконечно дифференцируемыми начальными функциями и $\varphi(\lambda), \varphi'(\lambda) > 0$ может не иметь в целом, т. е. при всех $t > 0$, решения с непрерывными производными первого и второго порядков [4]. Обобщенное решение задачи Коши для (0.2) существует в целом [5], однако оно, вообще говоря, не единственно. Эти же факты имеют место и для уравнения (0.1). В случае уравнения (0.1) можно провести более глубокий анализ решений по сравнению с уравнениями (0.2) общего вида и, в частности, подробно исследовать различные варианты возникновения разрывов решения уравнения (0.1) и их бифуркаций.

Исследование уравнения (0.1) представляет интерес как в связи с общей теорией нелинейных гиперболических уравнений, так и в связи с тем, что к уравнению (0.1) приводят задачи теории разномодульных упругих тел, упругопластических сред [6], фазовых переходов [7], задачи геофизики [8].

Представляет интерес исследование уравнения

$$(0.3) \quad u_{tt} = (u_x - |u_x|)_x + A, \quad A = \text{const}$$

которое описывает движение частиц упругосыпучей среды в поле силы тяжести. Оказывается, что решения уравнения (0.3) кроме разрывов, присущих решениям уравнения (0.1), могут иметь еще один новый тип разрыва — разрыв сплошности (откол). Для уравнения (0.3) решается несколько конкретных задач с прозрачной физической интерпретацией, показывающих существенное отличие в решениях по сравнению с аналогичной линейной постановкой задачи. Эти решения показывают также многообразие качественных эффектов, описываемых уравнением (0.3).

¹ Мосолов Петр Петрович (1938—1985), автор двух монографий, а также ряда основополагающих результатов в области нелинейного функционального анализа, неклассических вариационных методов в механике сплошных сред, математической теории пластичности; в качестве рецензента принимал большое участие в издании журнала ПММ.

Заметим, что по аналогии с уравнением (0.1) можно построить общую теорию решений уравнения

$$(0.4) \quad u_{tt} = (u_x - a |u_x|)_x + A, \quad |a| < 1, \quad A = \text{const}$$

Решения уравнения (0.3) являются пределами решений уравнения (0.4) при $a \rightarrow 1$, $a < 1$. Однако уравнение (0.4) сложнее уравнения (0.3). Поэтому естественно, как это и будет сделано в п. 6, построить общую теорию непосредственно решений уравнения (0.3). Более того, решения уравнения (0.3) можно рассматривать как асимптотику решений уравнения (0.4) при $a \sim 1$.

Уравнения вида (0.1), (0.3) имеют важное методологическое значение, поскольку, с одной стороны, они допускают достаточно детальное математическое исследование большого числа неавтономных задач, а с другой — имеют естественную физическую интерпретацию. Математическое исследование этих уравнений содержательно и далеко не исчерпывается настоящей работой.

1. Обобщенное решение уравнения (0.2). Кусочно-гладкие решения. Условия Гюгонио. Условие невозрастания механической энергии. Обобщенным решением уравнения (0.2) в области Ω называется функция $u(x, t)$, такая, что функции u_t , $\varphi(u_x)$ локально суммируемы и

$$(1.1) \quad \int_{\Omega} (u_t h_t - \varphi(u_x) h_x) dx dt = 0, \quad \forall h(x, t) \in C_0^\infty(\Omega)$$

Определение (1.1) обобщенного решения соответствует принципу Гамильтона — Остроградского [9]. В дальнейшем Ω имеет вид $p < x < q$, $0 \leq t \leq T < \infty$, где p, q могут быть $-\infty, \infty$ соответственно.

Рассмотрим в Ω конечное число гладких кривых

$$\Gamma_i = \{x, t: x = x_i(t), 0 \leq t \leq T\}, \quad i = 1, \dots, N$$

пересекающихся одна с другой не более чем в конечном числе точек. Функция $u(x, t)$ называется кусочно-гладкой в Ω , если она непрерывна в Ω , имеет вне линий Γ_i равномерно ограниченные производные u_x, u_t , равномерно непрерывные в любой односвязной открытой подобласти Ω' , не пересекающейся с Γ_i , $i = 1, \dots, N$, и граница которой может иметь непустое пересечение лишь с одной из Γ_i . Кроме того, предполагается, что в области $\Omega \setminus \Gamma$, $\Gamma = \cup \Gamma_i$ существуют локально суммируемые функции u_{tt} , $\varphi(u_x)_x$.

Из (1.1) интегрированием по частям устанавливается

Теорема 1. Кусочно-гладкая функция является обобщенным решением уравнения (0.2) тогда и только тогда, когда в Ω почти всюду выполняется уравнение (0.2) и на Γ_i справедливы равенства

$$(1.2) \quad [(x_i'(t)) u_x - \varphi(u_x)]_{x_i(t)} = 0, \quad [u]_{x_i(t)} = 0 \\ ([f]_{x(t)} = f(x(t) + 0, t) - f(x(t) - 0, t) = f^+ - f^-)$$

Равенства (1.2) называются условиями Гюгонио. Известно [3], что в классе кусочно-гладких функций решение задачи Коши для уравнения (0.2), вообще говоря, неединственно. В связи с этим наложение дополнительного ограничения, соответствующее требованию локального невозрастания механической энергии в среде и имеющее вид

$$(1.3) \quad \int_{\gamma} \left(\frac{u_t^2}{2} + \Phi(u_x) \right) dx + \varphi(u_x) u_t dt \geq 0, \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi' = \varphi$$

где γ — контур в Ω , трансверсальный к Γ_i , ориентированный движением против часовой стрелки (ось t направлена вверх, ось x — вправо).

Поясним неравенство (1.3). Рассмотрим уравнение движения вязкоупругой среды, соответствующее уравнению (0.2)

$$u_{tt}^\mu - \varphi(u_x^\mu)_x - \mu \psi(u_x^\mu)_{xt} = 0, \quad \psi'(\lambda) \geq 0$$

Решения $u^\mu(x, t)$ предполагаются достаточно гладкими функциями. Из формулы Грина для решения $u^\mu(x, t)$ следует равенство (D — область, ограниченная контуром γ)

$$(1.4) \quad \int_{\gamma} \left(\frac{(u_t^\mu)^2}{2} + \Phi(u_x^\mu) \right) dx + (\varphi(u_x^\mu) + \mu\psi(u_x^\mu)_t) u_t^\mu dt = \\ = \iint_D \mu\psi'(u_x^\mu) (u_{xt}^\mu)^2 dx dt$$

При $\mu \rightarrow 0$ решение $u^\mu(x, t)$ стремится к решению $u(x, t)$ уравнения (0.2), у которого могут быть разрывы первого рода у первых производных, т. е. u_x^μ, u_t^μ ограничены, а u_{xt}^μ имеет вид δ -образного семейства функций на линии разрыва решения уравнения (0.2). Поэтому, поскольку контур γ трансверсален к Γ_i , то

$$\int_{\gamma} \mu\psi(u_x^\mu)_t u_t^\mu dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0$$

Переходя к пределу при $\mu \rightarrow 0$ в равенстве (1.4), получаем неравенство (1.3).

Теорема 2. Пусть $u(x, t)$ — кусочно-гладкая функция, удовлетворяющая условиям Гюгонио на линии $x = x(t)$, $t_1 < t < t_2$, причем $x'(t) \neq 0$, $[u_x]_{x(t)} \neq 0$. Тогда из (1.3) следует, что при $t_1 < t < t_2$

$$(1.5) \quad \text{sign} [u_x]_{x(t)} \text{sign} x'(t) = \text{sign} \left(\varphi \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) - \frac{1}{2} (\varphi(\lambda_1) + \varphi(\lambda_2)) \right)$$

где λ_1 (λ_2) находится в окрестности точки u_x^+ (u_x^-).

В дальнейшем для определенности ограничимся случаем $0 < a < 1$.

Из теоремы 2 следует, что если $u(x, t)$ — кусочно-гладкое решение (0.1) и $u_x^+ u_x^- < 0$, то в случае локального по x максимума (минимума) в $x(t)$ имеем $x'(t) < 0$ ($x'(t) > 0$). Для уравнения (0.2) условия (1.5) совпадают с условиями устойчивости разрывов [10].

2. Классификация разрывов кусочно-гладкого решения уравнения (0.1). Скорости распространения разрывов. Интегрируемость условий Гюгонио. Пусть $u(x, t)$ — кусочно-гладкое решение уравнения (0.1). Гладкую линию $x = x(t)$ назовем линией разрыва, если на этой линии u_x имеет скачок или при переходе через нее u_x меняет знак. Имеется четыре вида разрывов решения (обозначим их $\alpha, \beta, \gamma, \delta$), которые определяются следующим образом: α (ударная волна): $u_x^+ u_x^- < 0$; β (сигнотон): $u_x^+ = u_x^- = 0$, u_x меняет знак при переходе через линию $x = x(t)$; γ (полусигнотон): $u_x^+ u_x^- = 0$, $u_x^+ \neq u_x^-$, u_x меняет знак при переходе через линию $x = x(t)$; δ (простой разрыв): $u_x^+ \neq u_x^-$, u_x сохраняет знак при переходе через $x = x(t)$.

Пусть u — кусочно-гладкое решение уравнения (0.1) и $x = x(t)$ — линия разрыва для u . Тогда u допускает представление

$$(2.1) \quad u(x, t) = p_1(x + bt) + q_1(x - bt), \quad u_x \leq 0 \\ u(x, t) = p_2(x + ct) + q_2(x - ct), \quad u_x \geq 0$$

Здесь и ниже использованы обозначения $b = \sqrt{1+a}$, $c = \sqrt{1-a}$. Условия Гюгонио (1.2) в этом случае имеют вид

$$(2.2) \quad (p_1'(x(t) + bt) + q_1'(x(t) - bt)) ((x'(t))^2 - b^2) = \\ = (p_2'(x(t) + ct) + q_2'(x(t) - ct)) ((x'(t))^2 - c^2) \\ p_1(x(t) + bt) + q_1(x(t) - bt) = p_2(x(t) + ct) + q_2(x(t) - ct)$$

Из первого равенства в (2.2) в случае, когда $x = x(t)$ — фронт ударной волны, имеем

$$(2.3) \quad \frac{p_1'(x(t) + bt) + q_1'(x(t) - bt)}{p_2'(x(t) + ct) + q_2'(x(t) - ct)} = \frac{(x'(t))^2 - c^2}{(x'(t))^2 - b^2} < 0$$

Неравенство (2.3) показывает, что в случае ударной волны для скорости ее движения выполняются неравенства

$$(2.4) \quad b > |x'(t)| > c$$

Пусть $x = x(t)$ — фронт сигнотона. Из (2.1) следует, что

$$(2.5) \quad \begin{aligned} bp_1'(x(t) + bt) &= -bq_1'(x(t) - bt) = \\ &= -cq_2'(x(t) - ct) = cp_2'(x(t) + ct) \end{aligned}$$

Можно показать, что если существуют u_{xx}^{\pm} , то $u_{xx}^+ u_{xx}^- > 0$.

Выразим u_{xx}^{\pm} из равенств (2.5)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} (p_1''(x(t) + bt) + q_1''(x(t) - bt))(x'(t) + b) &= \\ = 2bq_1''(x(t) - bt); \\ 2b(x'(t) - b)q_1''(x(t) - bt) &= (p_2''(x(t) + ct) + \\ + q_2''(x(t) - ct))(x'(t))^2 - c^2 \end{aligned}$$

Из (2.6) следует, что

$$(2.7) \quad \frac{p_1''(x(t) + bt) + q_1''(x(t) - bt)}{p_2''(x(t) + ct) + q_2''(x(t) - ct)} = \frac{(x'(t))^2 - c^2}{(x'(t))^2 - b^2} > 0$$

Соотношение (2.7) характеризует скачок вторых производных на фронте сигнотона, подобно тому, как (2.3) характеризует скачок первых производных на фронте ударной волны. Из (2.7) следует, что

$$(2.8) \quad |x'(t)| > b \text{ или } |x'(t)| < c$$

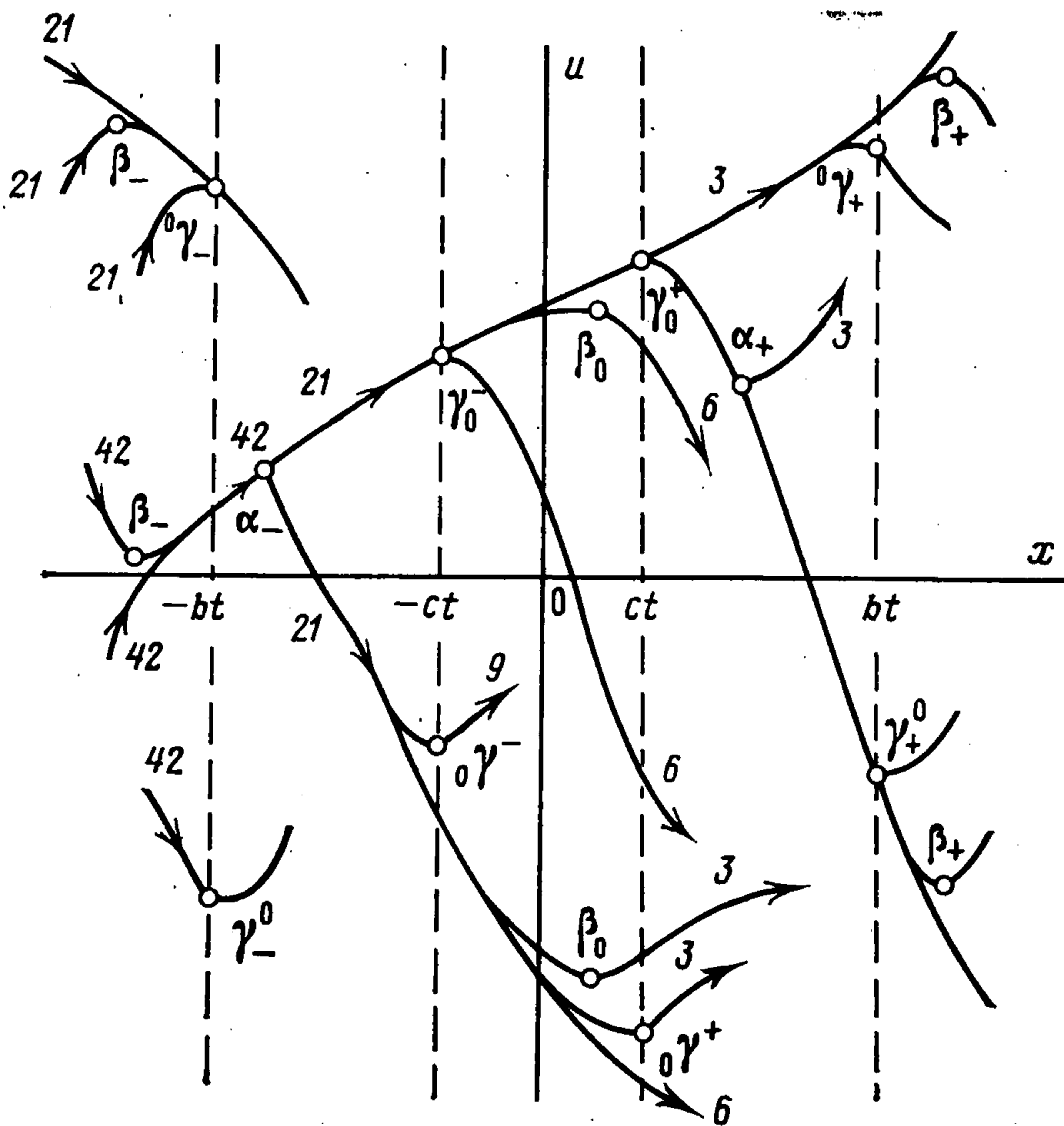
Для полусигнотона из первого равенства в (2.2) находим, что если отличная от нуля односторонняя производная положительна, то $|x'(t)| = c$, если же она отрицательна, то $|x'(t)| = b$. В случае простых разрывов $|x'(t)| = c$, если односторонние производные на разрыве неотрицательны и $|x'(t)| = b$, если они неположительны. Из (2.4), (2.8) следует, что скорости ударных волн и сигнотонов расположены в непересекающихся областях.

Уточним указанную классификацию разрывов. Обозначим α_+ (α_-) ударную волну, у которой $x' > 0$ ($x' < 0$), β_+ (β_-) — сигнотон, у которого $x' > b$ ($x' < -b$), β_0 — сигнотон, у которого $|x'| < c$. Сигнотоны β_+ , β_- будем называть быстрыми, сигнотон β_0 — медленным. Аналогично γ_+ (γ_-) — полусигнотон, скорость которого b ($-b$), γ^+ (γ^-) — полусигнотон, скорость которого c ($-c$). В обозначение полусигнотона в случае необходимости будем включать индекс нуль, указывающий, с какой стороны от его фронта производная равна нулю. Именно, $\gamma_0^{\pm} \gamma_{\pm}^0$ — медленные и быстрые полусигнотоны, у которых справа от фронта производная равна нулю, ${}_0\gamma^{\pm}$, ${}^0\gamma_{\pm}$ — медленные и быстрые полусигнотоны, у которых слева от фронта производная обращается в нуль.

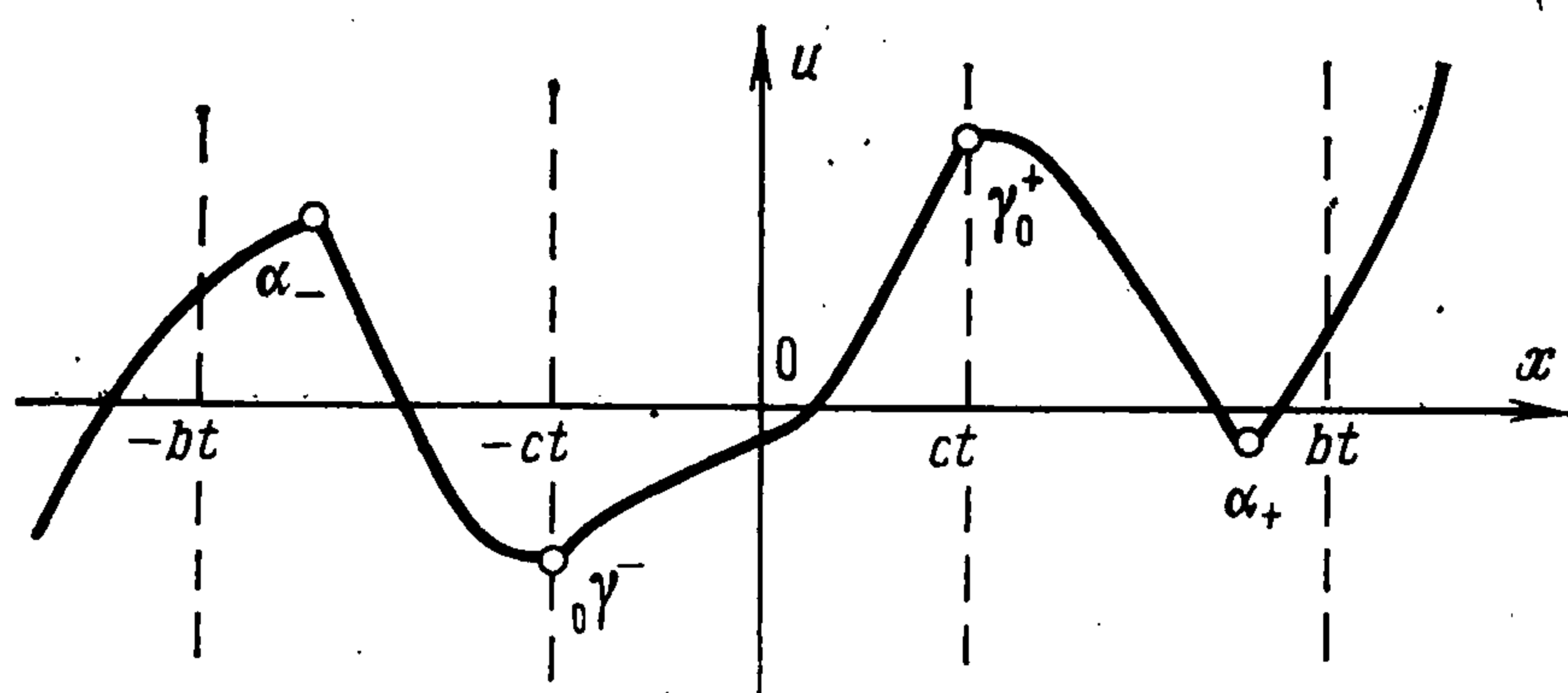
Заметим, что условия (2.2) можно записать в виде

$$(2.9) \quad \begin{aligned} 2bp_1(x(t) + bt) &= (b + c)p_2(x(t) + ct) + \\ &+ (b - c)q_2(x(t) - ct) \\ 2bq_1(x(t) - bt) &= (b - c)p_2(x(t) - ct) + \\ &+ (b + c)q_2(x(t) - ct) \end{aligned}$$

Переход от (2.2) к (2.9) и означает интегрируемость условий Гюгонио. В дальнейшем условия Гюгонио будут использоваться в виде (2.9).



Фиг. 1



Фиг. 2

чивые диаграммы, содержащие и полусигнотоны. Примером служит диаграмма $\alpha_-, \gamma_0^-, \gamma_0^+, \alpha_+$. График $u(x, t)$ при фиксированном t с такой диаграммой изображен на фиг. 2. Всего имеются 52 различные устойчивые диаграммы.

Кусочно-линейным локальным решениям уравнения (0.1), описывающим решение о распаде разрыва, соответствует лишь 10 диаграмм. Таким образом, в случае уравнения (0.1) решения задачи о распаде разрыва не описывают всего качественного многообразия решений этого уравнения.

Локальная задача Коши для уравнения (0.1) в полукрестности точки $(0, 0)$ состоит в отыскании локального решения $u(x, t)$ уравнения (0.1), удовлетворяющего начальным условиям

$$(3.1) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x)$$

Примеры теорем существования и единственности решения локальной задачи Коши приведены в [11].

4. Возникновение разрывов решения уравнения (0.1). Пусть $u(x, t)$ — решение уравнения (0.1) достаточно высокой гладкости в области $-\varepsilon < x < \varepsilon, -\varepsilon < t < 0$. Таким образом, u_x сохраняет знак в этой области. Предположим для определенности, что $u_x > 0, u_x(0, 0) = 0$, и следовательно, при $t < 0$ функция u удовлетворяет уравнению

$$(4.1) \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

Предположим, что у продолжения u для $t > 0$ как решения уравнения (4.1) u_x меняет знак при изменении x . Это означает, что у решения уравнения (0.1), совпадающего с u при $t < 0$, в точке $(0, 0)$ возникают разрывы.

Рассмотрим сначала типичный (общего положения) процесс возникновения разрывов ($u(x, t)$ — версальная деформация с параметром t [12]). При $t < 0$ решение $u(x, t)$ уравнения (0.1) имеет вид $u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct)$. Функции p, q предполагаются достаточно гладкими и $p(0) = q(0) = 0$. Ограничимся разложениями функций p, q в нуле по формуле Тейлора до кубов аргументов включительно]

$$(4.2) \quad u(x, t) = \alpha(x + ct)^3 + \beta(x + ct)^2 + \gamma(x + ct) + \delta(x - ct)^3 + \lambda(x - ct)^2 + \mu(x - ct)$$

Так как при $t = 0$ возникает критическая точка у решения, то $u(x, 0) = \sigma x^3$, $\sigma > 0$, т. е. $\gamma + \mu = 0$, $\beta + \lambda = 0$, $\alpha + \delta = \sigma$. Не ограничивая общности, можно считать, что $u(x, t)$ при $t < 0$ имеет вид

$$(4.3) \quad u(x, t) = \alpha(x + ct)^3 + \beta(x + ct)^2 + \delta(x - ct)^3 - \beta(x - ct)^2$$

Возникновение разрыва в точке $(0, 0)$ обеспечивается неравенствами $\alpha + \beta > 0$, $\beta < 0$. Из (4.3), решая уравнение $u_x(x, t) = 0$, находим фронты быстрых сигнотон $x = x_+(t)$, $x = x_-(t)$. Далее, из соотношений (2.5) находится решение при $x_-(t) \leq x \leq x_+(t)$. Время существования решения с диаграммой β_-, β_+ определяется из условий $x'_-(t) < -b$, $x'_+(t) > b$. Можно показать, что если $|\alpha| \rightarrow \infty$, $|\delta| \rightarrow \infty$, $0 < c_1 \leq |\alpha - \delta| / |\alpha + \delta| \leq c_2$, то время существования решения с диаграммой β_-, β_+ стремится к нулю.

Итак, как правило, у гладкого при $t < 0$ решения в момент $t = 0$ возникают два быстрых сигнотона, которые через некоторое время могут претерпевать дальнейшие превращения. Если время существования этих быстрых сигнотон очень мало, то естественно рассмотреть переход от гладкого при $t < 0$ решения сразу к следующей стадии поведения разрывов, минуя этап, связанный с быстрыми сигнотонами. Этим объясняется целесообразность исследования схем возникновения разрывов не общего положения.

Приведем примеры процессов возникновения разрывов, отличных от перехода $0 \rightarrow \beta_-, \beta_+$. Пусть при $t < 0$ решение $u(x, t)$ имеет вид

$$(4.4) \quad u(x, t) = \begin{cases} p_l(x + ct) + q_l(x - ct), & x \leq ct \\ p_l(x + ct) + q_r(x - ct), & ct \leq x \leq -ct \\ p_r(x + ct) + q_r(x - ct), & x \geq -ct \end{cases}$$

$$p_l(\eta) = -A|\eta|^{2n}, \quad q_l(\eta) = -B|\eta|^{2n}, \quad p_r(\xi) = C|\xi|^{2n}$$

$$q_r(\xi) = D|\xi|^{2n}, \quad n \geq 1$$

Условие $u_x \geq 0$ при $t < 0$ обеспечивается неравенствами $A > 0$, $A + B > 0$, $D > 0$, $C + D > 0$. Заметим, что если числа A, B, C, D положительны, то решение остается монотонно возрастающим и при $t > 0$.

Будем искать у решения при $t > 0$ быстрые сигнотоны. Для их фронтов получаем

$$(4.5) \quad x_-(t) = -\frac{(A^\lambda - B^\lambda)ct}{A^\lambda + B^\lambda} = k_-t$$

$$x_+(t) = \frac{(D^\lambda - C^\lambda)ct}{D^\lambda + C^\lambda} = k_+t; \quad \lambda = \frac{1}{2n-1}$$

Если $k_- < -b$, $k_+ > b$, то действительно, формулы (4.5) дают фронты быстрых сигнотон и при $t > 0$. Если же $k_- > -b$ или $k_+ < b$, то при $t > 0$ решение уже не может иметь диаграммы β_- , β_+ .

Заметим, что при $t > 0$ решение можно искать в виде однородной функции степени $2n$. Поэтому фронты разрывов прямые линии. Ограничимся для простоты случаем $n = 1$. Для $n > 1$ исследования проводятся аналогично. Пусть для определенности $k_- > -b$, $k_+ > b$ и, следовательно, $C < 0$. Таким образом, при $t > 0$ в диаграмме имеется быстрый сигнотон. Будем искать при $t > 0$ решение с диаграммой α_- , β_+ . Из (2.5), (2.9) для $x = \alpha t$ — фронта ударной волны — получаем уравнение

$$(4.6) \quad (b+c)A(\alpha+c)^2 + (b-c)B(\alpha-c)^2 = -\frac{4CDc^2(\alpha+b)^2}{c(D-C)+b(D+C)}$$

Положив в (4.6) $B = 0$ и учитывая, что $A > 0$, $C < 0$, $D > 0$, получаем существование решения уравнения (4.6), такого, что $-b < \alpha < -c$. Тем самым доказано существование решения с диаграммой α_- , β_+ .

Рассмотрим еще решение при $t > 0$, имеющее диаграмму β_0 , β_+ . Для фронта $x = \beta_0 t$ медленного сигнотона получаем уравнение

$$(4.7) \quad B(c - \beta_0)(c(D - C) + b(D + C)) = -2CDc(b - \beta_0)$$

Задаваясь числами C , D , β_0 , где $|\beta_0| < c$, из равенства (4.7) найдем число B . При переходе $0 \rightarrow \beta_0$, β_+ возможно появление особенностей решения при $t > 0$, проявляющихся в степенном росте вторых производных на одной из прямых $x = \pm ct$. Хотя, как отмечалось выше, переход $0 \rightarrow \beta_0$, β_+ не типичен и при малых изменениях решения при $t < 0$ может исчезнуть, проявление этой особенности скажется на больших по величине значениях вторых производных. Возникновение степенной особенности у гладкого при $t < 0$ решения представляет интерес в связи с тем, что в ударных волнах и сигнотонах соответствующие производные хотя и разрывны, но решение имеет односторонние производные достаточно высоких порядков.

Рассмотрим подробнее возникновение степенных особенностей у решения при переходе $0 \rightarrow \beta_0$, γ_+^0 , который является предельным к переходу $0 \rightarrow \beta_0$, β_+ и технически проще исследуется. Пусть при $t < 0$ решение u представляется в виде (4.4), где функции p_l , q_l , p_r , q_r таковы, что

$$p_l(0) = q_l(0) = p_r(0) = q_r(0) = p_l'(0) = q_l'(0) = p_r'(0) = q_r'(0) = 0$$

Другие условия на эти функции будут приведены ниже. Поскольку при $t > 0$ решение содержит полусигнотон γ_+^0 , то

$$(4.8) \quad q_r(\xi) = -\frac{b-c}{b+c} p_r\left(\frac{b+c}{b-c} \xi\right)$$

Неубывание u по x при $x \geq bt > 0$ следует из неравенства $p_r''(\xi) < 0$ при $\xi > 0$. Поскольку $p_r'(0) = 0$, то из неравенства $p_r''(\xi) < 0$ следует, что $p_r'(\xi) < 0$ при $\xi > 0$. Условие монотонного возрастания u при $t < 0$ вытекает из неравенств $p_r''(\xi) < 0$ при $\xi > 0$, $p_l'(\eta) > 0$ при $\eta < 0$, $p_l'(\eta_1) + q_l'(\eta_2) > 0$ при $\eta_1 \leq \eta_2 < 0$. При $t > 0$ будем искать решение с диаграммой β_0 , γ_+^0 . Тогда $u(x, t)$ задается формулами

$$u(x, t) = \begin{cases} p_l(x+ct) + q_l(x-ct), & x \leq -ct \\ p(x+ct) + q_l(x-ct), & -ct \leq x \leq \beta(t) \\ p_*(x+bt) + q(x-bt), & \beta(t) \leq x \leq bt \\ p_r(x+ct) + q_r(x-ct), & bt \leq x \end{cases}$$

Условие склейки на прямой $x = bt$ определяет функцию

$$(4.9) \quad p_*(\xi) = \frac{2c}{b+c} p_r\left(\frac{b+c}{2b} \xi\right)$$

Возьмем фронт медленного сигнотона в виде $\beta(t) = -ct + kt^M$, $k > 0$, $M > 1$. Из (2.5) и вида $\beta(t)$ выразим функции p , q_l , q через p_*

$$(4.10) \quad \begin{aligned} q'(- (b+c)t + kt^M) &= -p_*'((b-c)t + kt^M) \\ q_l'(-2ct + kt^M) &= -bc^{-1}p_*'((b-c)t + kt^M) \\ p'(kt^M) &= bc^{-1}p_*'((b-c)t + kt^M) \end{aligned}$$

Так как $p_*' < 0$, а $q_l' > 0$, то u — монотонно возрастающая функция при $-ct \leq x \leq \beta(t)$ и монотонно убывающая при $\beta(t) \leq x \leq bt$.

Пусть функция $p_r(\xi)$ бесконечно дифференцируема при $\xi > 0$ и $M > 1$ — целое число. Тогда из (4.9), (4.10) следует, что $p_l(\xi)$, $q(\eta)$, $q_l(\eta)$ — бесконечно дифференцируемые функции при $\xi > 0$, $\eta < 0$. Положим $p_r''(\xi) = A\xi^{N-2} + o(\xi^{N-2})$. В этом случае из (4.9) имеем, что $p_l''(\xi) = B\xi^{N-2} + o(\xi^{N-2})$. Из последнего равенства в (4.10) находим]

$$(4.11) \quad p''(kt^M) = \frac{bB}{ckM} (b-c)^{N-2} t^{N-M-1} + o(t^{N-M-1})$$

Равенство (4.11) показывает, что вторые производные u могут иметь степенную особенность на прямой $x = -ct$. Например, если $M = 2$, $N = 2$, то $u_{xx}(x+ct) \sim \sim C(x+ct)^{-1/2}$ при $x+ct > 0$. Итак, взяв функцию $p_l(\eta)$, такую, что $p_l'(\eta) > 0$ при $\eta < 0$, и $p_r(\xi)$, такую, что $p_r''(\xi) < 0$ при $\xi > 0$, по формулам (4.8), (4.9), (4.10) найдем u с диаграммой β_0, γ_+^0 .

5. Бифуркации разрывов. Пусть $x = x(t)$ — фронт разрыва, являющийся гладкой кривой при $t_1 < t < t_2$, на которой тип разрыва сохраняется. Будем говорить, что в точке $(x(t_2), t_2)$ возникает бифуркация разрыва, если в этой точке при $t > t_2$ происходит ветвление разрыва или при переходе через эту точку меняется тип разрыва. Предполагается, что в некоторой окрестности точки $(x(t_2), t_2)$, $t \leq t_2$ нет других разрывов, кроме $x = x(t)$.

Рассмотрим сначала бифуркации быстрых сигнотонов. Пусть при $t < 0$ решение имеет диаграмму β_- и сигнотон, фронт которого $x = \beta(t)$ является локальным максимумом, причем $\beta(t)$ предполагается достаточно гладкой функцией и $\beta'(t) = -b - 2dt + O(t^2)$, $d > 0$. Тогда решение допускает представление

$$u(x, t) = \begin{cases} p_l(x+ct) + q_l(x-ct); & x \leq \beta(t) \\ p_r(x+bt) + q_r(x-bt), & x \geq \beta(t) \end{cases}$$

Функции p_l, q_l предполагаются достаточно гладкими в некоторой окрестности нуля. Без ограничения общности можно считать, что

$$p_l(0) = q_l(0) = p_r(0) = q_r(0) = p_l'(0) = q_l'(0) = p_r'(0) = q_r'(0) = 0$$

Типичный случай бифуркации соответствует неравенству

$$(5.1) \quad p_l''(0) + q_l''(0) < 0$$

Из неравенства (5.1) и соотношений (2.5) следует, что $p_l''(0) \neq 0$, $q_l''(0) \neq 0$, а из условия $u_x > 0$ при $t < 0$ находим, что $p_l''(0) < 0$, $q_l''(0) > 0$. Для $t > 0$ будем искать решение с диаграммой α_- в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} p_l(x+ct) + q_l(x-ct), & x \leq \alpha(t) \\ p_r(x+bt) + q(x-bt), & \alpha(t) \leq x \leq bt \\ p_r(x+bt) + q_r(x-bt), & x \geq bt \end{cases}$$

Неизвестные функции $\alpha(t)$, $q(\eta)$ определяются из (2.9). Именно, из первого уравнения в (2.9) по теореме о неявных функциях находим $\alpha(t)$. Второе уравнение в (2.9) определяет $q(\eta)$.

Положим $\alpha(t) = -bt + k(t)t^2$. Для того чтобы скорость ударной волны попала в соответствующую зону, достаточно, чтобы $k(0) > 0$. Положим $p_l(x) = -x^2 + Px^3 + O(x^4)$, так что $p_l''(x) = -2 + 6Px + O(x^2)$. Из соотношений (2.5) найдем q_l, p_r, q_r . В частности

$$q_l(x) = \frac{b-c}{b+c}x^2 + \frac{x^3}{3} \left(\frac{4dc}{(b+c)^3} - 3P \left(\frac{b-c}{b+c} \right)^2 \right) + O(x^4)$$

$$p_r(\xi) = -\frac{4c(b-c)}{3\sqrt{db}}\xi^{3/2} + O(\xi^2)$$

Подставляя выражения для p_l, q_l, p_r, α в первое уравнение (2.9), находим, что

$$(5.2) \quad (b - c)k^{3/2}(t) = 1/2 (b - c) d^{3/2} + O(t)$$

Если $b \neq c$, то из (5.2) получаем $k(0) = 2^{-2/3}d$. Таким образом, $k(0) > 0$. Непосредственно проверяются условия монотонности для u при $t > 0$. Отметим, что отношение ускорений фронта сигнотона и фронта ударной волны в точке бифуркации равно $2^{2/3}$ и, следовательно, не зависит от величины a в уравнении (0.1), хотя этот результат справедлив лишь при $a \neq 0$.

Рассмотрим еще вопрос о бифуркации ударной волны. Пусть при $t < 0$ фронт ударной волны имеет вид

$$\alpha(t) = -ct + kt^2 + O(t^3), \quad k > 0, \quad O(t^3) = t^3 r(t)$$

($r(t)$ — достаточно гладкая функция), а решение допускает представление

$$u(x, t) = \begin{cases} p_l(x + ct) + q_l(x - ct), & x \leq \alpha(t) \\ p_r(x + bt) + q_r(x + bt), & x \geq \alpha(t) \end{cases}$$

Положим

$$p_l(x) = Ax + Bx^2 + O(x^3), \quad q_l = Cx + Dx^2 + O(x^3)$$

Из соотношений (2.9) и вида $\alpha(t)$ находим

$$p_r(x) = -C \frac{c}{b} + ((b + c)(A + C)k + (b - c)4Dc^2) \frac{x^3}{2b(b - c)} + O(x^3)$$

$$q_r(x) = C \frac{c}{b} + ((b - c)(A + C)k + (b - c)4Dc^2) \frac{x^2}{2b(b + c)} + O(x^3)$$

Ограничимся для простоты случаем $A + C > 0$. Предположим, что $p_r''(0) + q_r''(0) < 0$. Это неравенство обеспечивает отсутствие столкновения разрывов и эквивалентно соотношению

$$(5.3) \quad \frac{(2 - a)(A + C)k}{4a(1 - a)} < -D$$

По функциям p_r, q_r можно определить возникновение при $t > 0$ сигнотона β_+ . Если

$$(5.4) \quad -D < D_*, \quad D_* = \frac{(b + c)(A + C)k}{4(b - c)c^2}$$

то при $t = 0$ возникает быстрый сигнотон β_+ , если же

$$(5.5) \quad -D > D_*$$

то быстрый сигнотон β_+ при достаточно малых $t > 0$ не возникает.

Заметим, что левая часть (5.3) всегда меньше правой части (5.4), т. е. решение с быстрым сигнотомом β_+ , вообще говоря, возможно. В этом случае типичная диаграмма при $t > 0$ имеет вид $\beta_0, \alpha_+, \beta_+$ и исследование такого решения весьма громоздко.

Пусть выполнено неравенство (5.5). Будем искать при $t > 0$ решение с диаграммой β_0 . Для фронта $x = \beta(t)$ медленного сигнотона из (2.5) получаем уравнение

$$p_r'(\beta(t) + bt)b = -cq_l'(\beta(t) - ct)$$

откуда имеем

$$\beta'(0) = -\frac{b(A + C)k + (b - c)2Dc^2}{(A + C)k + (b - c)2Dc}$$

Из условия (5.5) следует, что $|\beta'(0)| < c$. Рассмотренный переход $\alpha_- \rightarrow \beta_0$ описывает процесс исчезновения ударной волны.

Вернемся к специальным случаям возникновения разрывов у гладкого решения, рассмотренным в п. 4. В первом из них гладкое при $t < 0$ решение порождает при $t > 0$ ударную волну, а второе — медленный сигнотон. Обоснованием рассмотрения этих переходов являются результаты п. 5. Именно, если при $t = 0$ возникает быстрый сигнотон, то, как следует из п. 5, типичным для него является превращение в ударную волну. Таким образом, первое из специальных решений п. 4 аппроксимирует решение общего положения с малым временем существования быстрого сигнотона. Второе решение п. 4 характеризует решение общего положения с малыми временами существования как быстрого сигнотона, так и образовавшейся из него ударной волны.

6. Локальные решения уравнения (0.3). Понятие локального решения уравнения (0.3) аналогично соответствующему понятию для уравнения (0.1) (см. п. 3). Именно, рассматривается прямоугольник $\Pi: x_0 - \varepsilon_1 < x < x_0 + \varepsilon_1, t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon_2$ и в нем веер гладких кривых $\Gamma_i: x = x_i(t), t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon_2, i = 1, \dots, N$, исходящих из точки $x_0, t_0: x_0 = x_i(t_0)$ и не пересекающихся в Π при $t > t_0$. Обозначим $\Pi_i, i = 0, 1, \dots, N$ открытую связную область в Π , ограниченную соседними линиями Γ_i, Γ_{i+1} и сторонами Π .

Локальным решением уравнения (0.3) называется функция $u(x, t)$, определенная в Π и удовлетворяющая следующим условиям. В областях $\Pi_i, i = 0, \dots, N$ функция $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема, монотонна по x , причем характер монотонности не зависит от t и удовлетворяет уравнению (0.3). Линии Γ_i называются линиями (фронтами) разрыва решения. Для завершения определения понятия локального решения остается описать поведение функции $u(x, t)$ при переходе через фронт разрыва.

В п. 2 были рассмотрены четыре вида разрывов: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Этих видов разрывов было достаточно при описании эволюции гладких начальных функций задачи Коши для уравнения (0.1). Эти же четыре вида разрывов сохраняются и для уравнения (0.3), причем для α -разрыва должны выполняться условия Гюгонио (1.2) и условие локального невозрастания механической энергии (1.3). Однако для существования решения задачи Коши для уравнения (0.3) с гладкими начальными функциями указанных четырех видов разрывов оказывается недостаточно.

Чтобы обеспечить существование решения рассматриваемой задачи, нужно ввести еще один вид разрыва — λ -разрыв (разрыв сплошности, откол). Фронт его неподвижен, т. е. $x(t) = x_0$. Учитывая, что x — лагранжева координата частицы, находим, что после образования λ -разрыва вся система распадается на две не обменивающиеся частицами системы. Далее предполагается, что $u^+ > u^-$ и $(u_x)^\pm \geq 0$.

Заметим, что в случае уравнения (0.3) фронты γ - и δ -разрывов, выходящие из точки $x = 0, t = 0$, имеют вид $x = \pm \sqrt{2}t, x = 0$. Если $x(t)$ — фронт медленного сигнотона, выходящего из точки $x = 0, t = 0$, то $x(t) = 0$, т. е. у медленного сигнотона фронт неподвижен.

Рассмотрим еще условия на α -, β -разрывы в форме, учитывающей специфику уравнения (0.3). Именно в этой форме соответствующие условия используются при построении решений конкретных задач. Обозначим через $u^1(x, t)$ ($u^2(x, t)$) решение $u(x, t)$ уравнения (0.3) в области, где $u_x(x, t) \leq 0$ ($u_x(x, t) \geq 0$). Тогда, считая $x_0 = 0, t_0 = 0$, имеем

$$(6.1) \quad \begin{aligned} u^1(x, t) &= p(x + \sqrt{2}t) + q(x - \sqrt{2}t) - Ax^2/4 \\ u^2(x, t) &= a(x) + b(x)t + At^2/2 \end{aligned}$$

Из соотношений (6.1) и условий Гюгонио (1.2) находим, что

$$(6.2) \quad 2\sqrt{2}p(x(t) \pm \sqrt{2}t) = \sqrt{2}(a(x(t)) + tb(x(t))) \pm \pm B(x(t)) + A(\sqrt{2}/4)(x(t) \pm \sqrt{2}t)^2$$

где $B'(\lambda) = b(\lambda)$, $x(t)$ — фронт α -разрыва (ударной волны).

Если $x(t)$ — фронт β -разрыва (быстрого сигнотона), то условия на фронте, используя (6.1), можно записать в виде

$$(6.3) \quad \begin{aligned} a'(x(t)) + tb'(x(t)) &= 0, \quad p'(x(t) + \sqrt{2}t) + \\ + q'(x(t) - \sqrt{2}t) &= Ax(t)/2 \\ b(x(t)) &= -At + \sqrt{2}p'(x(t) + \sqrt{2}t) - \sqrt{2}q'(x(t) - \sqrt{2}t) \end{aligned}$$

Отметим, что для скорости $\alpha'(t)$ фронта ударной волны выполняется неравенство

$$(6.4) \quad |\alpha'(t)| \leq \sqrt{2}$$

а для скорости $\beta'(t)$ фронта быстрого сигнотона имеем $|\beta'(t)| \geq \sqrt{2}$.

Используя общие свойства решений уравнения (0.3), приступим к решению конкретных задач для этого уравнения.

7. Возникновение λ -разрывов (разрывов сплошности). Рассмотрим простейшую задачу для уравнения (0.3) при $A = 0$ о столкновении двух несформированных систем, в которой возникает явление откола. Пусть $-l_1 < x < l_2$, $l_1, l_2 > 0$. Ищется решение уравнения (0.3), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \\ u_x(-l_1, t) &\geq 0, \quad u_x(l_2, t) \geq 0 \end{aligned}$$

$$u_0(x) = 0, \quad v_0(x) = \begin{cases} V > 0, & -l_1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq l_2 \end{cases}$$

Решение $u(x, t)$ для $t < 0$ дается формулами

$$u(x, t) = \begin{cases} Vt, & -l_1 \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq l_2 \end{cases}$$

т. е. при $t < 0$ левая система $-l_1 \leq x < 0$ движется вправо с постоянной скоростью V , правая система $0 \leq x \leq l_2$ неподвижна.

Пусть для определенности $l_1 \leq l_2$. Приведем решение поставленной задачи для $t > 0$.

Если $0 \leq \sqrt{2}t \leq l_1$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} Vt, & -l_1 \leq x \leq -\sqrt{2}t \\ V(\sqrt{2}t - x)/2\sqrt{2}, & -\sqrt{2}t \leq x \leq \sqrt{2}t \\ 0, & \sqrt{2}t \leq x \leq l_2 \end{cases}$$

Если $l_1 \leq \sqrt{2}t \leq l_2$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} Vl_1/\sqrt{2}, & -l_1 \leq x \leq -2l_1 + \sqrt{2}t \\ V(\sqrt{2}t - x)/2\sqrt{2}, & -2l_1 + \sqrt{2}t \leq x \leq \sqrt{2}t \\ 0, & \sqrt{2}t \leq x \leq l_2 \end{cases}$$

Если $l_2 \leq \sqrt{2}t \leq l_1 + l_2$ решение имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} Vl_1/\sqrt{2}, & -l_1 \leq x \leq -2l_1 + \sqrt{2}t \\ V(\sqrt{2}t - x)/2\sqrt{2}, & -2l_1 + \sqrt{2}t \leq x \leq 2l_2 - \sqrt{2}t \\ V(t - l_2/\sqrt{2}), & 2l_2 - \sqrt{2}t \leq x \leq l_2 \end{cases}$$

Итак, до момента времени $t_1 = (l_1 + l_2)/\sqrt{2}$ выполняется неравенство $u_x \leq 0$ и, следовательно, задача решается в рамках линейной постановки.

Для $t > (l_1 + l_2)/\sqrt{2}$ решение имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} Vl_1/\sqrt{2}, & -l_1 \leq x \leq l_2 - l_1 \\ V(t - l_2/\sqrt{2}), & l_2 - l_1 \leq x \leq l_2 \end{cases}$$

т. е. в точке $x = l_2 - l_1$ вновь возникает неподвижный разрыв.

Таким образом, удар левой системы длины l_1 , движущейся вправо со скоростью V в неподвижную правую систему, через некоторое время приведет к тому, что от правой системы оторвется кусок длины l_1 , который будет двигаться вправо со скоростью V , а остальные частицы будут неподвижны.

8. Возникновение ударной волны из статического начального состояния. Рассмотрим для уравнения (0.3) при $A = 0$ задачу Коши с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

где $u_0(x)$ — непрерывная функция, $u_0'(x) > 0$ при $x < 0$, $u_0'(x) < 0$ при $x > 0$. Для $t > 0$ решение будем искать в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x), & x \leq \alpha(t) \\ p(x + \sqrt{2}t) + q(x - \sqrt{2}t), & \alpha(t) \leq x \leq \sqrt{2}t \\ (u_0(x + \sqrt{2}t) + u_0(x - \sqrt{2}t))/2, & x \geq \sqrt{2}t \end{cases}$$

где $x = \alpha(t)$ — фронт ударной волны, $p(\xi) = u_0(\xi)/2$, $\xi \geq 0$.

Функция $\alpha(t)$ находится из первого уравнения в (6.2): $u_0(\alpha(t) + \sqrt{2}t) = u_0(\alpha(t))$. Далее, зная $\alpha(t)$, из уравнения (6.2) с нижним знаком минус находим $q(\eta)$ при $\eta \leq 0$. Затем следует проверить условие монотонности $u_x \leq 0$ при $\alpha(t) \leq x \leq \sqrt{2}t$ и неравенство (6.4).

Пусть $u_0(x)$ — четная функция, тогда $\alpha(t) = -\sqrt{2}t/2$ и $q(\eta) = u_0(\eta/3)/2$. Непосредственно проверяются соответствующие условия монотонности при достаточно малых $t > 0$. Таким образом, действительно, решение имеет диаграмму α_- .

Заметим, что в рассматриваемой задаче возможны и более сложные структуры решения. Например, если $u_0(x) = -|x|^{1/2}$, то при $t > 0$ решение имеет диаграмму α_- , α_+ , γ_+ . В этом случае решение является однородной функцией степени $1/2$, фронты ударных волн — прямые

$$x = \alpha_-t, \quad x = \alpha_+t, \quad \alpha_- = -\frac{3\sqrt{2} + 19}{49}, \quad \alpha_+ = \frac{4 - \sqrt{2}}{7}$$

В рассматриваемой задаче в случае гладкой функции $u_0(x)$ решение имеет диаграмму α_- , вообще говоря, лишь на малом интервале времени.

9. Столкновение разреженной системы с жесткой стенкой ($A = 0$). Пусть $x \geq 0$ и при $t < 0$ система расположена справа от стенки $x = 0$, т. е. $u_x(x, t) \geq 0$, $x + u(x, t) \geq 0$. Пусть далее

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = -v(x), \quad u_0'(x) \geq 0, \quad v(0) > 0, \\ u_0(0) = 0,$$

т. е. вблизи $x = 0$ при $t < 0$ система движется к стенке $x = 0$.

Для малых $t > 0$ вблизи $x = 0$ решение имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} p(x + \sqrt{2}t) - p(\sqrt{2}t - x), & 0 \leq x \leq \alpha(t) \\ u_0(x) - tv(x), & x \geq \alpha(t) \end{cases}$$

Таким образом, к стенке примыкает зона сжатия, которая заканчивается ударной волной, фронт которой $x = \alpha(t)$. Из (6.2) находим уравнения для $p(\xi)$, $\alpha(t)$

$$(9.1) \quad \pm 2\sqrt{2}p(\sqrt{2}t \pm \alpha(t)) = \sqrt{2}(u_0(\alpha(t)) - tv(\alpha(t))) - V(\alpha(t))$$

где $V'(\xi) = v(\xi)$, $V(0) = 0$. Из уравнений (9.1) получим $\alpha'(0)$, $p'(0)$

$$(9.2) \quad \alpha'(0) = \frac{2v_0}{u_0' + \sqrt{(u_0')^2 + 2v_0^2}}$$

$$p'(0) = -\frac{1}{4}(\sqrt{(u_0')^2 + 2v_0^2} - u_0'), \quad u_0' = u_0'(0), \quad v_0 = v(0)$$

Если $u_0(x) = kx$, $v(x) = v_0$, то формулы (9.2) дают решение при всех $t > 0$. Именно, $\alpha(t) = \alpha'(0)t$, $p(\xi) = p'(0)\xi$.

Проследим в этом случае (при $0 \leq x \leq l$) весь процесс соударения. Для $0 \leq t \leq l/\alpha$

$$u(x, t) = \begin{cases} 2px, & 0 \leq x \leq \alpha t \\ kx - v_0 t, & \alpha t \leq x \leq l \end{cases}$$

Если $l/\alpha \leq t \leq l/\alpha + l/\sqrt{2}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} 2px, & 0 \leq x \leq l - \sqrt{2}(t - l/\alpha) \\ 2p(l - \sqrt{2}t + l\sqrt{2}/\alpha), & l - \sqrt{2}(t - l/\alpha) \leq x \leq l \end{cases}$$

Наконец, если $t > l/\alpha + l/\sqrt{2}$, то $u(x, t) = 2p(l + l\sqrt{2}/\alpha - \sqrt{2}t)$ при $0 \leq x \leq l$. Таким образом, при $t > l/\alpha + l/\sqrt{2}$ система становится плотной ($u_x = 0$) и движется вправо с постоянной скоростью

$$v_1 = \sqrt{2} \frac{v_0^2}{k + \sqrt{k^2 + 2v_0^2}} < v_0$$

Итак, равномерно разреженная система ($u_x = k > 0$), движущаяся влево с постоянной скоростью v_0 в результате столкновения с жесткой стенкой через некоторое время отскакивает от нее и плотной системой ($u_x = 0$) движется вправо с постоянной скоростью v_1 , $v_1 < v_0$.

10. Отражение волны сжатия от свободного края. Рассматривается следующая задача для уравнения (0.3) при $A = 0$. Пусть при $t < 0$ решение (0.3) имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq -\sqrt{2}t, \\ f(x + \sqrt{2}t), & -\sqrt{2}t \leq x, \end{cases} \quad f'(\xi) \leq 0, \quad \xi \geq 0, \quad f(0) = 0$$

Задача состоит в нахождении решения для $t > 0$ при условии $u_x(0, t) \geq 0$. Оказывается, что вид решения существенно зависит от $f''(\xi)$. Поэтому рассмотрим различные случаи поведения $f''(\xi)$.

Пусть $f''(\xi) \leq 0$, тогда при $t \geq 0$ решение имеет вид

$$(10.1) \quad u(x, t) = \begin{cases} f(x + \sqrt{2}t) + f(\sqrt{2}t - x), & 0 \leq x \leq \sqrt{2}t \\ f(x + \sqrt{2}t), & x \geq \sqrt{2}t \end{cases}$$

Действительно, если $0 \leq x \leq \sqrt{2}t$, то

$$u_x = f'(\sqrt{2}t + x) - f'(\sqrt{2}t - x) = f''(\xi) \cdot 2x$$

Таким образом, в этом случае решение (0.3) совпадает с решением линейной задачи (волна сжатия, отражаясь от свободного края, остается волной сжатия).

Если $f'(\xi)$ — монотонно возрастающая функция, то решение (0.3) для $t \geq 0$ имеет вид

$$(10.2) \quad u(x, t) = \begin{cases} f(2x) + 2f'(2x)(\sqrt{2t} - x), & 0 \leq x \leq \sqrt{2t} \\ f(x + \sqrt{2t}), & x \geq \sqrt{2t} \end{cases}$$

В этом случае при $t = 0$ в точке $x = 0$ возникает полусигнотон ${}^0\gamma_+$.

Заметим, что если $f(\xi)$ имеет разрыв первой производной в точке ξ_0 , то при $t \geq \xi_0/2\sqrt{2}$ в точке $x_0 = \xi_0/2$ возникает разрыв сплошности. Если $f'(\xi) = 0$ при $\xi \geq \xi_1$, то при $x > \xi_1/2$ и $t > \xi_1/2\sqrt{2}$ отраженная волна распространяется вправо лишь на конечное расстояние.

Рассмотрим теперь несколько случаев отражения волны сжатия от свободного края, когда $f''(\xi)$ меняет знак при $\xi = \xi_0$, $f''(\xi_0) = 0$. Пусть $f''(\xi) \leq 0$ при $\xi \leq \xi_0$, $f''(\xi) \geq 0$ при $\xi \geq \xi_0$. Рассмотрим функцию $\xi = \xi(y)$ — середины отрезков, соединяющих одинаковые значения функции $y = f'(\xi)$, $y_2 \leq y \leq y_1 \leq 0$.

Пусть $\xi(y)$ — монотонно убывающая функция, так что

$$\min \xi(y) = \xi(y_1) = \xi_1, \quad \max \xi(y) = \xi(y_2) = \xi_0, \quad 2\xi_1 > \xi_0$$

В этом случае для $0 \leq \sqrt{2t} \leq \xi_1$ решение имеет вид (10.1). Если же $\xi_1 \leq \sqrt{2t} \leq \xi_0$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x + \sqrt{2t}) + f(\sqrt{2t} - x), & 0 \leq x \leq \beta(t) \\ a(x) + tb(x), & \beta(t) \leq x \leq \xi_1 \\ c(x) + td(x), & \xi_1 \leq x \leq \sqrt{2t} \\ f(x + \sqrt{2t}), & x \geq \sqrt{2t} \end{cases}$$

Здесь $x = \beta(t)$ — фронт сигнотона β_- , $x = \sqrt{2t}$ — фронт полусигнотона ${}^0\gamma_+$. Фронт $x = \beta(t)$ определяется из уравнения

$$f'(\sqrt{2t} + \beta(t)) - f'(\sqrt{2t} - \beta(t)) = 0$$

Откуда находим, что

$$\sqrt{2t} + \beta(t) \geq \xi_0, \quad \sqrt{2t} - \beta(t) \leq \xi_0, \quad \beta'(t) < 0$$

так как $\xi(y)$ — убывающая функция. Из уравнения для $\beta(t)$ находим, что

$$\beta'(t) = -\sqrt{2} \frac{f''(\sqrt{2t} - \beta(t)) - f''(\sqrt{2t} + \beta(t))}{f''(\sqrt{2t} - \beta(t)) + f''(\sqrt{2t} + \beta(t))}$$

и, следовательно, $\beta'(t) < -\sqrt{2}$, т. е. $x = \beta(t)$ действительно является фронтом сигнотона. Функции $c(x)$, $d(x)$, $a(x)$, $b(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} c(x) &= f(2x) - 2xf'(2x), \quad d(x) = 2\sqrt{2}f'(2x) \\ b(x) &= \sqrt{2}(f'(\sqrt{2t}(x) + x) + f'(\sqrt{2t}(x) - x)) \\ a(x) &= f(\sqrt{2t}(x) + x) + f(\sqrt{2t}(x) - x) - t(x)b(x) \end{aligned}$$

где $t = t(x)$ — функция, обратная к $x = \beta(t)$.

Условие монотонности функции $c(x) + td(x)$ проверяется непосредственно, монотонность функции $a(x) + tb(x)$ следует из того, что $\beta(t) \leq x \leq \xi_1$, $t(x)$ — монотонно убывающая функция и, следовательно, $t \geq t(x) \geq \xi_1/\sqrt{2}$. Итак, в этом случае в полукрестности точки $(\xi_1, \xi_1/\sqrt{2})$ решение имеет диаграмму $\beta_-, {}^0\gamma_+$.

Если $\xi = \xi(y)$ — монотонно возрастающая функция, то при $0 \leq t \leq \xi_0/\sqrt{2}$ решение такое же, как и на начальном этапе предыдущего при-

мера. Если $t \geq \xi_0/\sqrt{2}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} a(x) + tb(x), & 0 \leq x \leq \beta(t) \\ f(x + \sqrt{2}t) + f(\sqrt{2}t - x), & \beta(t) \leq x \leq \sqrt{2}t \\ f(x + \sqrt{2}t), & x \geq \sqrt{2}t \end{cases}$$

где $x = \beta(t)$ — фронт сигнотона ($\beta' > \sqrt{2}$), функции $\beta(t)$, $a(x)$, $b(x)$ определяются теми же формулами, что и в предыдущем примере. В этом случае сигнотон возникает в $x = 0$ и движется вправо, в то время как в предыдущем случае он возникал в $x = \xi_1$ и двигался влево.

Рассмотрим задачу об отражении волны сжатия от свободного края, когда $f''(\xi) \geq 0$ при $0 \leq \xi \leq \xi_0$, $f''(\xi) \leq 0$ при $\xi \geq \xi_0$. Здесь для $0 \leq 2\sqrt{2}t \leq \xi_0$ решение имеет вид (10.2). Для $2\sqrt{2}t \geq \xi_0$ решение ищем в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} f(2x) + 2xf'(2x)(\sqrt{2}t - x), & 0 \leq x \leq \alpha(t) \\ f(x + \sqrt{2}t) + q(x - \sqrt{2}t), & \alpha(t) \leq x \leq \sqrt{2}t \\ f(x + \sqrt{2}t), & x \geq \sqrt{2}t \end{cases}$$

где $x = \alpha(t)$ — фронт ударной волны, $2\alpha(\xi_0/2\sqrt{2}) = \xi_0$. Функции $\alpha(t)$, $q(\eta)$ ($q(0) = 0$) — искомые. Из соотношений (6.2) для них имеем

$$(10.3) \quad \begin{aligned} f(\alpha(t) + \sqrt{2}t) &= f(2\alpha(t)) + (\sqrt{2}t - \alpha(t))f'(2\alpha(t)) \\ q(\alpha(t) - \sqrt{2}t) &= (\sqrt{2}t - \alpha(t))f'(2\alpha(t)) \end{aligned}$$

Из первого в (10.3) по теореме о неявных функциях находится $\alpha(t)$, из второго определяется $q(\eta)$. Сложность первого уравнения в (10.3) состоит в том, что если $f''(\xi_0) = 0$, $f'''(\xi_0) \neq 0$, то это уравнение имеет два решения. Одно из них, $\alpha(t) = \sqrt{2}t$, не подходит. Для нахождения $\alpha'(\xi_0/2\sqrt{2})$ у второго решения нужно первое уравнение в (10.3) трижды продифференцировать и положить $t = \xi_0/2\sqrt{2}$. Откуда получаем $\alpha'(\xi_0/2\sqrt{2}) = -\sqrt{2}/5$.

Таким образом, в рассматриваемом случае волна сжатия, движущаяся влево, отражаясь от свободного края, превращается в волну разрежения типа полусигнотона. Затем в момент времени $t = \xi_0/2\sqrt{2}$ на фронте этого полусигнотона возникает ударная волна, движущаяся влево со скоростью $-\sqrt{2}/5$, в момент $t = \xi_0/2\sqrt{2}$. Отметим, что эта скорость не зависит от вида функции f .

11. Движение частиц упругосыпучей среды в поле силы тяжести. 1°.
Подъем волны сжатия и ее отражение от свободной поверхности. В этой задаче ось x предполагается направленной вниз. Рассмотрим уравнение (0.3), для которого $A > 0$, $x \geq 0$, и при $t < 0$ возьмем его решение следующего вида:

$$u(x, t) = \begin{cases} -Ax^2/4, & 0 \leq x \leq -\sqrt{2}t \\ -Ax^2/4 + f(\sqrt{2}t + x), & x \geq -\sqrt{2}t \end{cases}$$

где $f(0) = 0$, $f'(\xi) \leq 0$ при $\xi \geq 0$. Край $x = 0$ предполагается свободным, т. е. $u_x(0, t) \geq 0$. Итак, при $t < 0$ снизу вверх (против направления силы тяжести) распространяется волна сжатия, которая при $t = 0$ достигает свободной поверхности.

Пусть сначала $|f''(\xi)| \leq A/4$. В этом случае при $t > 0$ решение совпадает с решением линейной задачи и имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x + \sqrt{2}t) + f(\sqrt{2}t - x) - Ax^2/4, & 0 \leq x \leq \sqrt{2}t \\ f(\sqrt{2}t + x) - Ax^2/4, & x \geq \sqrt{2}t \end{cases}$$

Действительно, в этом случае при $0 \leq x \leq \sqrt{2}t$ имеем

$$u_x = 2x(f''(\lambda) - A/4) < 0$$

Пусть теперь $f''(\xi)$ — монотонно убывающая функция и существует $x_1 > 0$, для которого $f''(2x_1) = A/4$. В этом случае для $0 \leq t \leq t_1 = x_1/\sqrt{2}$ решение имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}A(t^2 + x^2 - 2\sqrt{2}xt) + f(2x) + 2(\sqrt{2}t - x)f'(2x), & 0 \leq x \leq \sqrt{2}t \\ f(x + \sqrt{2}t) - Ax^2/4, & x \geq \sqrt{2}t \end{cases}$$

Действительно, при $0 \leq x \leq \sqrt{2}t \leq x_1$ выполняется неравенство

$$u_x = 4(\sqrt{2}t - x)(f''(2x) - A/4) > 0$$

Для $t \geq t_1$ решение будем искать в виде,

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}A(t^2 + x^2 - 2\sqrt{2}xt) + f(2x) + 2(\sqrt{2}t - x)f'(2x), & 0 \leq x \leq \alpha(t) \\ f(\sqrt{2}t + x) + r(\sqrt{2}t - x) - Ax^2/4, & \alpha(t) \leq x \leq \sqrt{2}t \\ f(\sqrt{2}t + x) - Ax^2/4, & x \geq \sqrt{2}t \end{cases}$$

где $x = \alpha(t)$ — фронт ударной волны.

Из соотношений (6.2) находим уравнения для $\alpha(t)$, $r(\xi)$

$$(11.1) \quad \begin{aligned} f(\alpha(t) + \sqrt{2}t) &= f(2\alpha(t)) + (\sqrt{2}t - \alpha(t))f'(2\alpha(t)) + \\ &+ \frac{1}{8}A(\alpha(t) + \sqrt{2}t)^2 \\ r(\sqrt{2}t - \alpha(t)) &= (\sqrt{2}t - \alpha(t))(f'(2\alpha(t)) - \frac{1}{2}A\alpha + \\ &+ \frac{1}{8}A(\sqrt{2}t - \alpha(t))) \end{aligned}$$

Из первого уравнения в (11.1) по теореме о неявных функциях находится $\alpha(t)$, из второго уравнения в (11.1) определяется $r(\xi)$. Пусть $f'''(2x_1) \neq 0$, тогда, дифференцируя первое уравнение в (11.1) три раза по t и полагая $t = t_1$, находим, что $\alpha'(t_1) = -\sqrt{2}/5$.

Для завершения исследования решения в окрестности $t = t_1$ остается проверить, что $u_x < 0$ при $\alpha(t) \leq x \leq \sqrt{2}t$. Для доказательства этого неравенства достаточно установить, что $u_x(\sqrt{2}t - 0, t) < 0$ при $t > t_1$. Из второго уравнения в (11.1) находим, что

$$u_x(\sqrt{2}t - 0, t) = 2(\sqrt{2}t - x_1)(f''(\lambda) - A/4), \quad 2x_1 < \lambda < 2\sqrt{2}t$$

и, так как $f''(\lambda) - A/4 < 0$, то $u_x(\sqrt{2}t - 0, t) < 0$.

Итак, в рассматриваемой задаче волна сжатия отражается от свободной поверхности и превращается в движущуюся вниз волну разрежения типа полусигнотона. Затем, в момент времени $t_1 = x_1/\sqrt{2}$ на фронте полусигнотона возникает ударная волна, движущаяся вверх, при этом величина скорости ударной волны в момент возникновения равна $\sqrt{2}/5$, т. е. не зависит ни от f , ни от A .

Дальнейшее исследование эволюции решения при $t > t_1$ затруднено тем, что в общем случае нельзя явно найти функцию $x = \alpha(t)$ из первого уравнения в (11.1). Поэтому рассмотрим конкретную функцию

$$f(\xi) = \begin{cases} -\xi^3 + 3\xi^2 - 3\xi, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ -1, & \xi \geq 1 \end{cases}$$

В этом случае ударная волна возникает, если $A < 24$. При этом $x_1 = \frac{1}{2} - A/48$, $\alpha(t) = (-\sqrt{2}t + 6x_1)/5$. Далее непосредственно проверяется, что ударная волна доходит до свободного края и отражается волной сжатия.

2°. Падение в поле силы тяжести разреженной системы на жесткое основание. Ось x предполагается направленной вверх. В этом случае $0 \leq$

$x \leq l$, $A < 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = v_0(x)$. Решение при $t \leq 0$ берется в виде

$$u(x, t) = u_0(x) + tv_0(x) + At^2/2$$

причем $u_x(x, t) \geq 0$, $x + u(x, t) \geq 0$. Для $t \geq 0$ решение ищется в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} p(x + \sqrt{2}t) + p(\sqrt{2}t - x) - Ax^2/4, & 0 \leq x \leq \alpha(t) \\ u_0(x) + tv_0(x) + At^2/2, & \alpha(t) \leq x \leq l \end{cases}$$

где $x = \alpha(t)$ — фронт ударной волны. Для неизвестных функций $\alpha(t)$, $p(\xi)$ из соотношений (6.2) находим уравнения

$$(11.2) \quad \pm 2\sqrt{2}p(\sqrt{2}t \pm \alpha) = \sqrt{2}(u_0(\alpha) + tv_0(\alpha)) \pm V_0(\alpha) + \frac{1}{4}A\sqrt{2}(\alpha \pm \sqrt{2}t)^2$$

Систему (11.2) рассмотрим в частном случае, когда

$$u_0(x) = kx^2, \quad v_0(x) = -Vx$$

В этом случае при $t < 0$ решение имеет вид

$$u(x, t) = kx^2 - Vxt + At^2/2$$

Условие отсутствия сигнотона при $t > 0$ обеспечивается неравенством $V < 2\sqrt{2}k$. Решение при $t > 0$ является однородной функцией второй степени, т. е. $p(\xi) = p\xi^2$, $\alpha(t) = \alpha t$. Из уравнений (11.2) имеем

$$A(\alpha^2 - 2)^2 + 4k\alpha^4 + 8(k\alpha^2 - V\alpha) = 0$$

Положим $\alpha = \sqrt{2}/2$, тогда A , k , V связаны соотношением $9A + 20k - 16\sqrt{2}V = 0$. Положим $A = -4k/3$, $V = \sqrt{2}k/4$.

Итак, для $0 \leq t \leq \sqrt{2}l$ решение определяется формулами

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{7\sqrt{2}}{12}kxt + \frac{1}{3}kx^2, & 0 \leq x \leq \sqrt{2}t \\ kx^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}kxt - \frac{2}{3}kt^2, & \sqrt{2}t \leq x \leq l \end{cases}$$

Если $\sqrt{2}l \leq t \leq 3\sqrt{2}l/2$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{7\sqrt{2}}{12}kxt + \frac{1}{3}kx^2, & 0 \leq x \leq 3l - \sqrt{2}t \\ \frac{5}{8}kx^2 + \frac{7}{12}kt^2 + \frac{9}{8}kl^2 - \frac{5}{4}kl(x + \sqrt{2}t), & 3l - \sqrt{2}t \leq x \leq l \end{cases}$$

Если $3\sqrt{2}l/2 \leq t \leq 9\sqrt{2}l/5$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{7\sqrt{2}}{12}kxt - \frac{5}{2}klx + \frac{1}{3}kx^2, & 0 \leq x \leq \sqrt{2}t - 3l \\ \frac{5}{8}kx^2 + \frac{7}{12}kt^2 - \frac{5}{4}kl(x + \sqrt{2}t) - \frac{9}{8}kl^2, & \sqrt{2}t - 3l \leq x \leq l \end{cases}$$

При $9\sqrt{2}l/5 \leq t \leq 2\sqrt{2}l$ решение определяется равенствами

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{7\sqrt{2}}{12}kxt - \frac{5}{2}klx + \frac{1}{3}kx^2, & 0 \leq x \leq \frac{21}{5}l - \sqrt{2}t \\ p(x + \sqrt{2}t) + q(x - \sqrt{2}t) + \frac{kx^2}{3}, & \frac{21}{5}l - \sqrt{2}t \leq x \leq \alpha(t) \\ -\frac{5}{4}kx^2 - \frac{15}{2}kxl - \frac{3}{4}kl^2 - \frac{2}{3}kt^2 + \frac{5\sqrt{2}}{4}kt(2x + l), & \\ \alpha(t) \leq x \leq \sqrt{2}t - 3l \\ \frac{5}{8}kx^2 + \frac{7}{12}kt^2 - \frac{5}{4}kl(x + \sqrt{2}t) - \frac{9}{8}kl^2, & \sqrt{2}t - 3l \leq x \leq l \end{cases}$$

где $x = \alpha(t)$ — фронт ударной волны.

Будем считать, что $q(-3l) = 0$, тогда

$$p\left(\frac{21}{5}l\right) = -\frac{6}{25}kl^2, \quad q(\eta) = -\frac{7}{48}k\eta^2 - \frac{5}{4}kl\eta - \frac{39}{16}kl^2$$

Функции $p(\xi)$, $\alpha(t)$ находим из соотношений (6.2). Для $\alpha(t)$ имеем

$$2q(\alpha - \sqrt{2}t) = -\frac{5}{2}k\alpha^2 - \frac{35}{4}kl\alpha - \frac{3}{4}kl^2 + \frac{5\sqrt{2}}{4}kt(2\alpha + l) - \\ - \frac{1}{3}k(\alpha - \sqrt{2}t)^2$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{61}t + \frac{33}{61}l$$

Для функции $p(\xi)$ имеем уравнение

$$2p(\alpha + \sqrt{2}t) = -\frac{25}{4}kl\alpha - \frac{3}{4}kl^2 + \frac{5\sqrt{2}}{4}k(2\alpha + l) - \frac{1}{3}k(\alpha + \sqrt{2}t)^2$$

Исследование поведения решения при больших значениях t можно провести в рамках аналогичных конструкций. Однако вычисления в этой конкретной задаче становятся чрезвычайно громоздкими.

Опишем качественную структуру решения последней задачи при $0 \leq t \leq 2\sqrt{2}l$. При $t = 0$ в $x = 0$ возникает ударная волна, которая движется вверх со скоростью $\sqrt{2}/2$. При $0 \leq x \leq \sqrt{2}t/2$ среда сжата, $u(0, t) = 0$ при $\sqrt{2}t/2 \leq x \leq l$ среда разрежена. Эта структура решения имеет место при $0 \leq x \leq \sqrt{2}l/2$. Если $\sqrt{2}l/2 \leq t \leq 9\sqrt{2}l/5$, то среда находится в сжатом состоянии: $u(0, t) = 0$, $u_x(l, t) = 0$. Если $9\sqrt{2}l/5 \leq x \leq 2\sqrt{2}l$, то в точке $x = 3l/5$ при $t = 9\sqrt{2}l/5$ возникают полусигнотон γ_+ и ударная волна α_+ , движущаяся вверх со скоростью $\sqrt{2}/61$. Таким образом, между фронтами ударной волны и полусигнотона на рассматриваемом промежутке времени среда разрежена, в остальной среде находится в сжатом состоянии. Отметим, что скорость возникшей ударной волны мала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6, с. 29—34.
2. Амбарцумян С. А. Уравнения плоской разнородной или разномодульной теории упругости.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1966, т. 19, № 2, с. 3—19.
3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
4. John F. Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation.— Commun Pure Appl. Math., 1974, v. 27, No. 3, p. 377—405.
5. Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations.— Commun Pure Appl. Math., 1965, v. 18, No. 4, p. 697—715.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
7. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматгиз, 1963. 632 с.
8. Кнопов Л. Затухание упругих волн в Земле.— В кн.: Физическая акустика. Т. 3. Ч. Б. Динамика решетки. М.: Мир, 1968, с. 344—387.
9. Гольденблат И. И. Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.
10. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws. II.— Commun Pure Appl. Math., 1957, v. 10, No. 4, p. 537—566.
11. Маслов В. П., Мосолов П. П. Колебания разномодульных стержней.— Успехи матем. наук, 1981, т. 36, вып. 3, с. 240—241.
12. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. М.: Наука, 1982. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.IV.1983