Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 3, 1985

УДК (532.5 + 539.3) : 534

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ИЛИ ТЕЧЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ, ПРОТЯЖЕННЫХ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Куликовский А. Г.

Дается обобщение асимптотических условий устойчивости [1] для состояний или течений на отрезке $0 \leqslant x \leqslant L$ при больших значениях L. В отличие от [1] допускается существование точек внутри этого отрезка, где также ставятся граничные условия. На граничные условия никаких ограничений, кроме вытекающих из требования корректности, не накладывается. В отличие от [1] эти условия могут быть вырожденными, т. е. допускается обращение в нуль любого числа коэффициентов отражения или преломления возмущений различных типов. Кроме того, состояние или течение может медленно меняться с изменением x, т. е. зависеть от x/L. В последнем случае возмущения могут отражаться не только от точек, где поставлены граничные условия, но и испытывать внутренние отражения от точек поворота или точек пересечения действительной оси x с линиями Стокса (см., например, [2]) на комплексной плоскости.

Показано, что, если исключить неустойчивость, порождаемую граничными условиями, поставленными в какой-нибудь одной из точек («граничную» неустойчивость), то в общем случае условием неустойчивости служит существование при $\operatorname{Im}\omega > 0$ циклической последовательности волн, зависящих от времени, как $e^{-i\omega t}$, и преобразующихся одна в другую, такой, что произведение коэффициентов пространственного усиления (или ослабления) этих волн на коэффициенты их взаимного превращения при отражении или преломлениях должно быть равно единице. Применительно к слабо неоднородным состояниям и течениям полученное условие можно рассматривать как обобщение на произвольные граничные условия «условий квантования», полученных [2—7] при наличии только внутренних отражений от линий Стокса или точек поворота.

1. Рассмотрим поведение возмущений произвольного стационарного состояния или течения, зависящего от $x^* = x/L$, на отрезке $0 \leqslant x \leqslant L$ при больших значениях L. Предполагаем, что в точках $x = X^\alpha$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, \mu+1$), $X^0 = 0$, $X^\mu = L$, отстоящих одна от другой на расстоянии порядка L, поставлены граничные условия, связывающие между собой возмущения и их производные в этих точках.

Будем считать, что на каждом из отрезков $[X^\alpha, X^{\alpha+1}]$ возмущения описываются линейной системой уравнений, про которую будем предполагать следующее. Любое решение этой системы $u_j^\alpha(x, t)$ на отрезке $[X^\alpha, X^{\alpha+1}]$, зависящее от времени, как $e^{-i\omega t}$, представляется в виде линейной комбинации независимых решений

$$u_j^\alpha(\omega, x) = \sum_m C_m^\alpha w_{mj}^\alpha(\omega, x^*)(1 + R_{mj}^\alpha)\exp\left(i\int k_m^\alpha(\omega, x^*)\,dx\right) \tag{1.1}$$

$$(R_{mj}^\alpha = R_{mj}^\alpha(\omega, x^*, L) \to 0,\ L \to \infty)$$

Функции $w_{mj}^\alpha(\omega, x^*)$ удовлетворяют условию $\left[\sum_j |w_{mj}^\alpha|^2\right]^{1/2} \equiv w_m^\alpha \neq 0$; $k_m^\alpha(\omega, x^*)$ — корни дисперсного уравнения

$$\Phi_\alpha(\omega, k, x^*) = 0 \tag{1.2}$$

в которое медленная переменная x^* входит как параметр. Будем считать, что значения k^α, удовлетворяющие этому уравнению, образуют конечное множество k_m^α (ω, x^*) ($m = 1, 2, \ldots, N^\alpha$) или по каким-либо другим причинам в сумме (1.1) можно ограничиться только N^α слагаемыми. Равенство (1.1) соответствует ВКБ-приближению [2].

Предполагаем выполненным условие корректности [8] (или «эволюционности») системы уравнений, заключающееся в том, что существует постоянная M, такая, что при $\mathrm{Im}\,\omega > M$ для всех x^* и α мнимые части всех k_m^α отличны от нуля. Это означает, что при $\mathrm{Im}\,\omega > M$ изменение знака $\mathrm{Im}\,k_m^\alpha$ может происходить только при переходе k_m^α через бесконечность. Предположим, что такой переход может происходить лишь в некоторых изолированных точках x и в этих точках можно поставить некоторые эффективные граничные условия, связывающие решения по разные стороны от этих точек. Тогда, считая, что эти точки включены в число точек X^α, получим, что при $\mathrm{Im}\,\omega > M$ на каждом из отрезков $[X^\alpha, X^{\alpha+1}]$ величины $\mathrm{Im}\,k_l^\alpha$ не меняют знака.

Введем числа s^α, такие, что при $\mathrm{Im}\,\omega > M$

(1.3) $$\mathrm{Im}\,k_j^\alpha(\omega, x^*) > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s^\alpha)$$
$$\mathrm{Im}\,k_p^\alpha(\omega, x^*) < 0 \quad (p = s^{\alpha+1}, \ldots, N^\alpha)$$

Граничные условия для возмущений предполагаем не зависящими от L, однородными, разделяющимися (т. е. связывающими величины возмущений и производных от них в точке, где условия поставлены) и удовлетворяющими необходимым условиям корректности [9; 10]. Последние заключаются в том, что при $x = 0$ и $x = L$ должно быть поставлено соответственно s^0 и $N^\mu - s^\mu$ граничных условий, а в каждой из внутренних точек X^α должно быть $N^{\alpha-1} - s^{\alpha-1} + s^\alpha$ граничных условий, не считая равенства $x = X^\alpha$, задающего положение самой точки. Величины X^α могут быть, вообще говоря, функциями частоты ω.

Граничные условия после подстановки в них решения (1.1) представляют собой линейную однородную систему алгебраических уравнений с коэффициентами, зависящими от ω, относительно величин C_m^α. Граничные условия при $x = 0$ и $x = L$ связывают между собой соответственно значения C_m^0 и C_m^μ. Граничные условия при $x = X^{\alpha+1}$ связывают значения C_m^α и $C_m^{\alpha+1}$. Матрица Δ коэффициентов при всех C_m^λ имеет вид, изображенный на фиг. 1.

Для простоты показан случай $\mu = 2$, т. е. когда отрезок $[0, L]$ делится точками X^1 и X^2 на три части. Вне прямоугольников, обведенных сплошными линиями, все элементы — нули. Числа, стоящие слева и сверху, указывают число строк и столбцов в соответствующих минорах.

Равенство нулю определителя матрицы Δ дает уравнение для нахождения собственных частот ω.

Каждое слагаемое в (1.1) можно рассматривать [1] как волну, которой можно приписать направление распространения в зависимости от знака $\mathrm{Im}\,k^\alpha{}_m$, принимаемого этой величиной при $\mathrm{Im}\,\omega > M$. Волны, соответствующие $k_1^\alpha, k_2^\alpha, \ldots, k_{s_\alpha}^\alpha$ ($k_{s_{\alpha+1}}^\alpha, \ldots, k_{N^\alpha}^\alpha$), считаются распространяющимися направо (налево). При $\mathrm{Im}\,\omega > M$ все волны испытывают пространственное затухание в направлении своего распространения. Граничные условия в каждой точке, где они поставлены, должны позволять по приходящим волнам определять уходящие. Этим обусловлено число граничных условий, необходимых для корректности. Вертикальные штриховые линии на фиг. 1 разделяют в матрице Δ столбцы, соответствующие величинам C_m^α, входящим в волны, распространяющиеся в разные стороны.

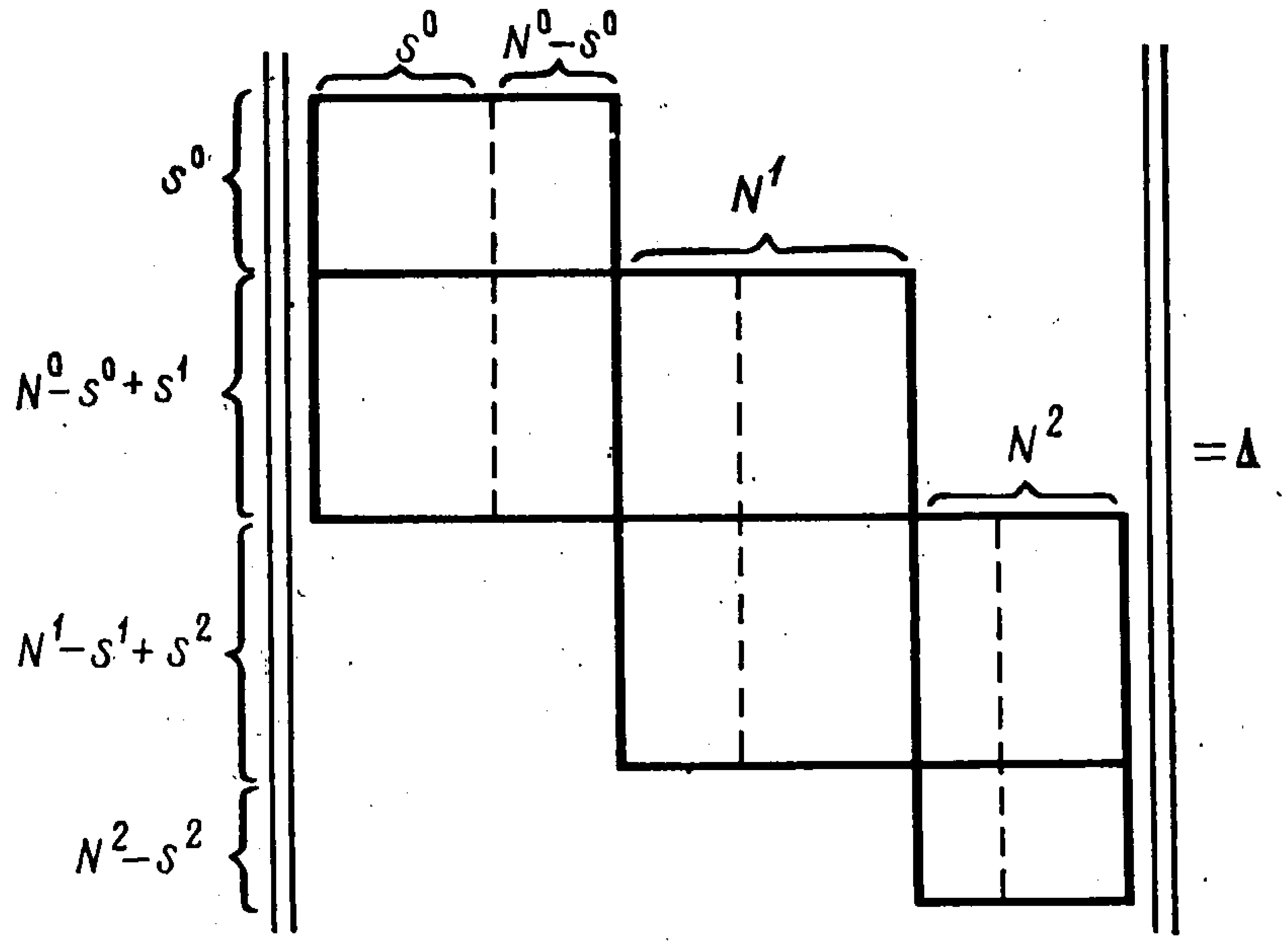
Введем обозначения

$$(1.4)\qquad iK_m^\alpha = \pm\frac{1}{L}\int\limits_{X^\alpha}^{X^{\alpha+1}}\left[ik_m^\alpha(\omega, x^*) + \frac{1}{w_m^\alpha}\frac{\partial w_m^\alpha}{\partial x}\right]dx$$

(знак плюс берется при $m = 1, 2, \ldots, s^\alpha$, минус — при $m = s^{\alpha+1}, \ldots, N^\alpha$). Очевидно, $K_m{}^\alpha$ зависит от ω, а также от X^α и $X^{\alpha+1}$. Считая, что последние величины — функции от ω и L и $X^{\alpha+1} - X^\alpha$ имеет порядок L, будем предполагать существование предела выражения (1.4)

$$\lim_{L\to\infty} K_m^\alpha = K_m^{*\alpha}(\omega)$$

Если в неопределенном интеграле, стоящем в показателе в равенстве (1.1), постоянную интегрирования выбрать таким образом, чтобы на том



Фиг. 1

конце отрезка $[X^\alpha, X^{\alpha+1}]$, откуда соответствующая волна выходит, ее модуль был равен $|C_m{}^\alpha|$, то на другом конце этого отрезка ее модуль будет равен $|C_m{}^\alpha|\exp(-\operatorname{Im} K_m{}^\alpha L)$. Сами волны на соответствующих концах отрезка $[X^\alpha, X^{\alpha+1}]$ представляются следующим образом:

$$(1.5)\qquad C_m{}^\alpha\frac{w_{mj}^\alpha}{w_m{}^\alpha}, \qquad C_m{}^\alpha\frac{w_{mj}^\alpha}{w_m{}^\alpha}\exp iLK_m{}^\alpha$$

Будем называть $-\operatorname{Im} LK_m{}^\alpha$ показателями пространственного усиления волн. Очевидно, что в выражениях (1.4) главным является первый член, который остается конечным при $L\to\infty$, а вклад второго члена в $K_m{}^\alpha$ стремится к нулю. Согласно неравенствам (1.2), при $\operatorname{Im}\omega > M$ все показатели пространственного усиления волн отрицательны.

В матрице Δ в силу независимости граничных условий от L все элементы, соответствующие волнам, которые уходят от точки, где записано граничное условие, будут иметь порядок единицы, а элементы, стоящие в столбце, соответствующем коэффициенту $C_m{}^\alpha$ при приходящей волне, будут содержать множитель $\exp iLK_m{}^\alpha$. При $\operatorname{Im}\omega > M$ и $L\to\infty$ все эти элементы стремятся к нулю, так что в пределе останутся только элементы квадратных миноров, стоящих по главной диагонали и ограниченных штриховыми линиями.

Это означает, что при $\operatorname{Im}\omega > M$ определитель матрицы Δ при достаточно больших L приближенно равен произведению определителей упомянутых выше миноров

$$(1.6)\qquad |\Delta(\omega)| = |A_0(\omega)|\,|A_1(\omega)|\ldots|A_\mu(\omega)|$$

До тех пор, пока выписанное в (1.6) выражение по порядку величины остается больше невыписанных членов, равенство нулю определителя матрицы Δ влечет за собой при $L \to \infty$ обращение в нуль хотя бы одного определителя, например

$$(1.7) \qquad |A_\nu(\omega)| = 0$$

Соответствующая этому определителю система граничных условий связывает между собой значения возмущений и их производных в точке $x = X^\nu$, положение которой — функция ω. Поэтому левая часть уравнения (1.7) не содержит зависимости от L. На комплексной плоскости ω корням уравнения (1.7) могут соответствовать отдельные точки, положение которых не зависит от L. Такие точки могут отсутствовать, если все $|A_\lambda|$ постоянны.

При выполнении равенства (1.7) можно построить решение, в котором отличны от нуля C_m^ν ($m = 1, \ldots, s^\nu$) и $C_j^{\nu+1}$ ($j = s^{\nu+1}, \ldots, N^{\nu+1}$), соответствующие волнам, уходящим от точки X^ν. Остальные C_m^β при $\operatorname{Im}\omega > M$ в пределе при $L \to \infty$ равны нулю. При $\operatorname{Im}\omega < M$ могут отличаться от нуля и некоторые другие C_m^β, однако соответствующие волны не оказывают влияния на развитие возмущения и значение ω до тех пор, пока справедливо равенство (1.6).

Если равенство (1.7) выполняется при $\operatorname{Im}\omega > 0$, то имеет место неустойчивость, связанная с ростом возмущений, порождаемых точкой X^ν. Как видно из (1.7), условия возникновения такой неустойчивости связаны с заданием граничных условий в этой точке. Эту неустойчивость будем называть граничной.

Другой вид собственных функций и неустойчивости возникает при $\operatorname{Im}\omega < M$, когда неучтенные в (1.6) члены становятся сравнимыми с выражением, стоящим в правой части (1.6).

Рассмотрим случай, когда определители всех миноров A_ν отличны от нуля, исключив из рассмотрения на комплексной плоскости ω малые окрестности точек, в которых это условие не выполняется. Тогда граничные условия можно разрешить относительно амплитуд уходящих волн. При этом все миноры A_ν будут единичными матрицами, а вне этих миноров в тех же строках будут стоять элементы, каждый из которых содержит множитель $\exp iLK_m^\alpha$, определяемый номером столбца. Множитель, стоящий при этой экспоненте, представляет собой с обратным знаком коэффициент превращения (т. е. коэффициент отражения или преломления) падающей волны в уходящую волну.

Определитель матрицы Δ можно вычислять, представляя его в виде суммы произведений определителей миноров, составленных из столбцов, стоящих в каждой из систем строк, соответствующей различным X^ν. Каждое такое произведение содержит экспоненциальный множитель $\exp i\sum LK_m^\alpha$, где суммирование проводится по номерам α и m столбцов, входящих в один из указанных миноров и не входящих в миноры A_α. Таким образом, можно символически записать

$$(1.8) \qquad |\Delta| = 1 + \sum (\ldots)(\ldots)\ldots(\ldots) \exp i\sum LK_m^\alpha$$

где скобки — не зависящие от L выражения, представляющие определители миноров после вынесения из них экспоненциальных множителей.

Заметим, что в каждой сумме $\sum K_m{}^\alpha$, стоящей в (1.8), для каждого α число $n^\alpha{}_+$ слагаемых $K_m{}^\alpha$, соответствующих волнам, распространяющимся направо, равно числу $n^\alpha{}_-$ слагаемых $K_m{}^\alpha$, соответствующих волнам, распространяющимся налево. Это утверждение является следствием того, что, если какой-нибудь столбец, соответствующий приходящей волне, использован в миноре, соответствующем граничному условию при $x = X^\alpha$, то он не должен использоваться в минорах, соответствующих граничным условиям при $x = X^{\alpha-1}$ и $X = X^{\alpha+1}$.

Для упрощения дальнейшего изложения заметим, что при заданной системе граничных условий по номерем α и m можно определить номер столбца в матрице Δ и обратно. Поэтому в дальнейшем вместо $C_m{}^\alpha$ и $K_m{}^\alpha$ будем писать C_j и K_j и считать, что новый индекс (при отсутствии верхнего индекса) пробегает множество значений от единицы до номера последнего столбца в матрице Δ.

Если сумма в (1.8) становится сравнимой с единицей, то хотя бы для одного слагаемого в этой сумме будет в пределе при $L \to \infty$ выполняться равенство

$$\text{(1.9)} \qquad \operatorname{Im} \sum_j K_j = 0, \quad j \in \{j_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2r$$

Множество значений $\{j_i\}$, по которому проводится суммирование в (1.9), таково, что для каждого отрезка $[X^\alpha, X^{\alpha+1}]$ число слагаемых K_j, соответствующих волнам, распространяющимся направо, равно числу слагаемых K_j, соответствующих волнам, распространяющимся налево.

Уравнение (1.9) соответствует некоторой кривой в плоскости ω. Предположим, что при уменьшении $\operatorname{Im}\omega$ какая-нибудь такая кривая, соответствующая одному ненулевому слагаемому в сумме (1.8), в некотором диапазоне значений $\operatorname{Re}\omega$ встретится первой, т. е. обратится в нуль только одна сумма (1.9), а аналогичные суммы, соответствующие другим ненулевым слагаемым в (1.8), останутся отрицательными. Это предположение будет использоваться в дальнейшем и называться предположением о некратности кривой (1.9). При выполнении этого предположения легко проанализировать расположение собственных частот на комплексной плоскости ω. Оставляя в сумме (1.8) только главный член, запишем уравнение для собственных частот

$$\text{(1.10)} \qquad |\Delta| \approx 1 - a(\omega) \exp \sum iLK_j(\omega) = 0$$

где $a(\omega)$ — весь предэкспоненциальный множитель. Взяв приращение показателя экспоненты, соответствующие $\omega - \omega_0$, где ω_0 удовлетворяет равенству (1.9), и считая $\omega - \omega_0$ малым, получим

$$\text{(1.11)} \qquad 1 - b(\omega_0)\, a(\omega_0) \exp i\,[Lc(\omega - \omega_0)] = 0$$

$$b = \exp i \sum LK_j(\omega_0), \quad |b| = 1, \quad c = \left[\frac{\partial}{\partial\omega} \sum K_j(\omega)\right]_{\omega=\omega_0}$$

Величина $a(\omega)$ не раскладывалась в ряд, так как ее производная по ω конечна (не содержит L). Из (1.11) видно, что собственные частоты расположены на расстоянии порядка $1/L$ одна от другой и от линии (1.9).

В случае, когда несколько линий (1.9), соответствующих нескольким слагаемым в (1.8), совпадают, можно также утверждать, что собственные частоты будут расположены на расстояниях порядка $1/L$ в окрестности слившейся линии. Если какие-нибудь кривые (1.9), соответствующие ненулевому слагаемому в (1.8), заходят в верхнюю полуплоскость ω, то среди них можно выбрать самую верхнюю (все они лежат в области $\operatorname{Im}\omega < M$) и в окрестности этой кривой будут расположены собственные частоты, обеспечивающие рост возмущений, т. е. неустойчивость. Неустойчивость этого типа аналогична глобальной неустойчивости [1], и ее также назовем глобальной. Она связана с усилением волны, соответствующих $K_m{}^\alpha$, входящих в равенство (1.9), при их распространении, отражении или преломлении.

2. Если справедливо сделанное в п. 1 предположение о некратности кривой (1.9), то в сумме, стоящей в правой части равенства (1.8), одно слагаемое при уменьшении $\operatorname{Im}\omega$ первым становится порядка единицы, а остальные остаются много меньшими единицы или в точности равными нулю из-за равенства нулю предэкспоненциального множителя. В этом случае оказывается, что собственная функция, соответствующая собственным частотам, определяемым из (1.9), (1.11), представляет одну циклическую цепочку из $2r$ волн, превращающихся одна в другую при отражениях и преломлениях. Условием образования этой цепочки является равенство единице произведения коэффициентов отражения и преломления, соответствующих этой цепочке, и экспоненциальных множителей, определяющих пространственные изменения амплитуд этих волн.

Не изменяя главных слагаемых в (1.8), можно все элементы столбцов определителя Δ, не содержащих экспонент с показателями K_j, входящими в сумму (1.9), заменить нулями. Тогда, в силу того, что матрицы A_ν — единичные, можно, не изменяя величины определителя, вычеркнуть эти столбцы, а также строки с теми же номерами. Оставшаяся матрица D_{ij} будет иметь $2r$ столбцов и $2r$ строк, причем по главной диагонали будут стоять единичные миноры A_ν', оставшиеся от A_ν. Размер каждого минора A_ν' равен числу волн, распространяющихся на отрезке $[X^\nu, X^{\nu+1}]$ в каждую сторону. Вне миноров A_ν' расположены элементы вида

$$D_{ji} = -d_{ij} \exp iLK_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, 2r \tag{2.1}$$

где d_{ij} — коэффициент превращения i-й волны в j-ю при взаимодействии с соответствующей границей. Очевидно, что главные слагаемые в равенстве (1.8) могут быть записаны в виде

$$|\Delta| = 1 + |D_{ij}| = 1 + \sum (-1)^\varkappa \prod_{k,\, j} d_{kj} \exp i \sum_j LK_j \tag{2.2}$$

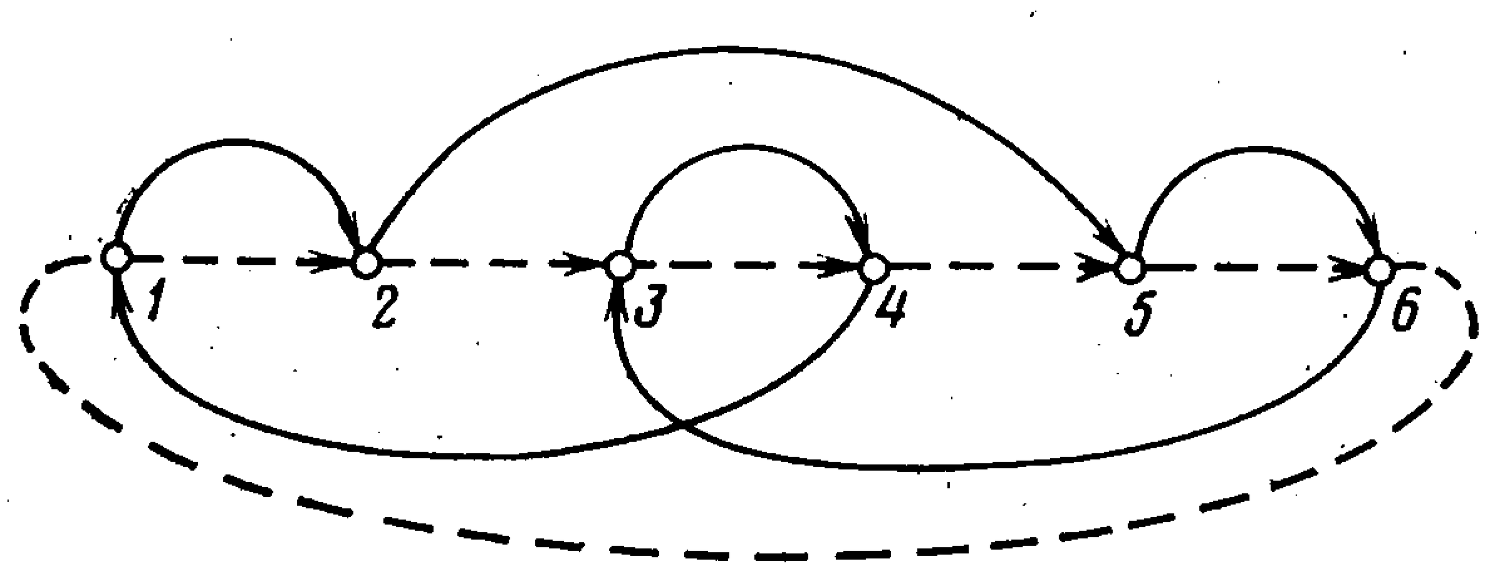
($\varkappa$ — целое число). Выберем некоторый ненулевой член суммы, стоящей в правой части (2.2), произведем некоторую перестановку множителей d_{ij}, образовывая последовательности множителей вида $d_{mn}\, d_{ns} \ldots d_{pq}$, так, чтобы первый индекс каждого следующего сомножителя совпадал со вторым индексом предыдущего. Такая группа множителей по начальному элементу строится однозначно и заканчивается, т. е. не может быть дальше продолжена, когда у последнего множителя второй индекс станет равным первому индексу первого множителя. Такую законченную цепочку множителей будем называть полным циклом, если она содержит все $2r$ сомножителей и подциклом, если число сомножителей меньше $2r$. В последнем случае можно выбрать еще один элемент и построить соответствующий ему подцикл и т. д., пока соответствующий член в сумме (2.2) не разобьется на произведение подциклов.

Каждому циклу или подциклу соответствуют циклические цепочки волн с номерами, совпадающими с индексами цикла. Сам цикл представляет собой произведение коэффициентов взаимного превращения этих волн при отражении в преломлении.

Оказывается, что при условии некратности кривой (1.8) среди слагаемых, стоящих под знаком суммы в (2.2), имеется только одно отличное от нуля, соответствующее цепочке волн последовательно превращающихся одна в другую при отражениях и преломлениях в точках $x = X^\alpha$. Само это слагаемое равно произведению коэффициентов взаимного превращения волн на коэффициенты их пространственного усиления, представленные экспонентами.

Для доказательства высказанного утверждения предположим, что все циклы, длина которых меньше $2r$, равны нулю (из-за равенства нулю какого-нибудь из d_{ij}) или являются коэффициентами при экспоненциальных множителях с отрицательными показателями — $\operatorname{Im} \sum LK_l < 0$ (предположение индукции). Покажем, что в этом случае для заданного множества, состоящего из $2r$ волн, таких, что $\operatorname{Im} \sum K_j = 0$, нельзя составить более одного цикла, причем наличие такого цикла при $\operatorname{Im} \omega > 0$ обеспечивает неустойчивость, а отсутствие его приводит к равенству нулю всех членов, стоящих под знаком суммы в (2.2), т. е. к отсутствию неустойчивости, связанной с выбранной группой волн.

Покажем сначала последнее. Если ни одного полного цикла не существует, тогда все произведения разбиваются на подциклы, а сумма показателей экспонент — на



Фиг. 2

группы слагаемых. Так как сумма всех экспонент равна нулю, то хотя бы одна из этих групп должна иметь неотрицательную сумму. Следовательно, по предположению индукции соответствующий цикл равен нулю, и поэтому все слагаемые под знаком суммы в (2.2) равны нулю.

Покажем теперь, что при выполнении предположения индукции не может существовать более одного полного ненулевого цикла. Пусть имеется два различных цикла. Изменим порядок нумерации волн, так чтобы первый цикл соответствовал последовательности волн $1 \to 2 \to \ldots \to 2r \to 1$ и т. д. Тогда второй цикл будет соответствовать последовательности волн, которую можно изобразить системой стрелок, соответствующих этой последовательности. Например, для $r = 3$ возможна последовательность, показанная на фиг. 2. Штрихами изображена последовательность, соответствующая первому циклу.

Так как должны быть отличны от нуля все d_{kj}, соответствующие обоим циклам, то можно составлять из этих d_{kj} отличные от нуля подциклы. Эти подциклы соответствуют циклическим последовательностям, которые можно составить с помощью стрелок, соответствующих обоим полным циклам.

Каждой стрелке второго цикла, не совпадающей со стрелкой первого цикла, можно поставить в соответствие подцикл. Например, стрелке $2 \to 5$ соответствует подцикл, состоящий из четырех волн 2, 5, 6, 1. Все переходы, кроме $2 \to 5$, взяты из первой заданной цепочки. Таким образом, в подцикл, соответствующий стрелке, идущей направо, не входят волны, номера которых расположены под стрелкой (3 и 4). Точно так же стрелке, направленной влево, можно поставить в соответствие подцикл из волн, номера которых лежат над стрелкой, с включением концов.

Покажем, что если просуммировать частичные суммы показателей $S_i = \sum K_l$, соответствующие всем подциклам, которые можно образовать указанным выше способом, то получится величина, равная некоторому целому числу n, умноженному на полную сумму всех $2r$ показателей, которая согласно (1.9) равна нулю

$$\sum_i S_i = n \sum_{j=1}^{2r} K_j = 0 \tag{2.3}$$

Для доказательства этого утверждения заметим, что к каждому номеру волны на фиг. 2 подходит ровно одна стрелка, соответствующая второму циклу, поэтому можно в равенстве (2.3) без нарушения этого равенства суммы S_i, соответствующие подциклам, заменить суммами S_i' всех показателей подцикла, за исключением показателя, соответствующего концу стрелки.

Заметим также, что так как сумма всех $2r$ показателей равна нулю, то сумма S_i', соответствующая некоторой стрелке, показывающей вправо, на фиг. 2 равна с обратным знаком сумме показателей номеров, лежащих под стрелкой, включая конец стрелки (но без показателя, соответствующего начальной точке стрелки). Отсюда можно вывести, что частная сумма $\Sigma S_i'$, соответствующая непрерывной последовательности стрелок с первой стрелкой, выходящей из единицы, состоит из взятых с обратным знаком слагаемых K_i, соответствующих номерам, лежащим не правее конца последней стрелки без слагаемого K_1. Поэтому полная сумма всех S_i', а следовательно, и всех S_i оказывается равной нулю. Поэтому хотя бы одна частичная сумма S_i неотрицательна.

Из предположения индукции вытекает, что подцикл, соответствующий неотрицательной частичной сумме S_i, должен быть равен нулю. Следовательно, хотя бы один элемент d_{ij}, который входит в один из полных циклов, равен нулю, а вместе с ним равен нулю и этот полный цикл.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А. Г.* Об устойчивости однородных состояний.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 148—153.
2. *Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н.* Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск: Наука, 1982. 117 с.
3. *Силин В. П.* Колебания слабо неоднородной плазмы.—ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 4, с. 1271—1282.
4. *Рухадзе А. А., Силин В. П.* Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы.— Успехи физ. наук, 1964, т. 82, № 3, с. 499—535.
5. *Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П.* Об асимптотике собственных значений для несамосопряженных краевых задач.— Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1964, т. 4, № 2, с. 267—277.
6. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965. 553 с.
7. *Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. М.: Наука, 1978. 352 с.
8. *Петровский И. Г.* О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций.— Бюл. МГУ. Секц. А. Математика и механика, 1938, т. 1, № 7, с. 1—72.
9. *Соболев С. Л.* О смешанных задачах для уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными.— Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 4, с. 555—558.
10. *Hersch R.* Boundary conditions for equations of evolution.— Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1964, v. 16, No. 4, p. 243—264.

Москва

Поступила в редакцию
31.V.1983