Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 3, 1985

УДК 533.6

К КЛАССИФИКАЦИИ ПЛОСКИХ ИЗЭНТРОПИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА ТИПА ДВОЙНОЙ ВОЛНЫ

Мелешко С. В.

Дается полная классификация плоских изэнтропических течений газа типа двойных волн [1—6] при наличии функционального произвола в общем решении задачи Коши. Ранее [1] рассмотрены двойные волны в случае потенциальных течений. После замены условия потенциальности течений на более слабое условие прямолинейности линий уровня дана [2] полная классификация плоских изэнтропических течений газа типа двойных волн с прямыми линиями уровня.

Уравнения газовой динамики политропного газа в плоском изэнтропическом случае можно записать в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2} v_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \varkappa\theta\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) = 0$$

$$\varkappa = \gamma - 1, \quad \theta = c^2/\varkappa$$

где (v_1, v_2) — скорость, c — скорость звука, γ — показатель политропы газа.

Пусть V — локальная окрестность точки (v_1°, v_2°) в пространстве годографа скорости. Требуем, чтобы для фиксированной функции $\theta = \theta(v_1, v_2)$, $(v_1, v_2) \in V$ бегущая волна [1] имела функциональный произвол хотя бы в одну функцию в общем решении задачи Коши.

В простейшем случае, когда $\theta_1^2 + \theta_2^2 = 0$ ($\theta_i = \partial\theta/\partial v_i$, $\psi_i = \theta_i^2 - \varkappa\theta$), можно показать, что общее решение имеет две произвольные функции одного аргумента, поэтому считаем $\theta_1^2 + \theta_2^2 \neq 0$. Тогда поворотом системы координат всегда можно добиться, чтобы в новой системе координат в некоторой окрестности V точки (v_1°, v_2°) пространства годографа скорости было выполнено неравенство

$$\theta_1\theta_2\psi_1\psi_2 \neq 0 \tag{2}$$

Дальнейшее исследование основано на том, что всякая совместная система дифференциальных уравнений после конечного числа продолжений приходит в инволюцию [7, 8]. Если система дифференциальных уравнений находится в инволюции, то функциональный произвол в решении определяется характерами Картана, которые связаны определенным образом со старшими параметрическими производными [7]. Для существования решений, имеющих функциональный произвол, необходимо, чтобы ранг матрицы из коэффициентов при старших производных не был равен числу всех старших производных (ни при каком из продолжений).

Подставив $\theta = \theta(v_1, v_2)$ в уравнения (1), получим систему квазилинейных дифференциальных уравнений, которая будет не в инволюции. При исследовании на совместность этой системы ее необходимо продолжать.

Частично продолжив ее переходом к зависимым переменным v_1, v_2, $v_3 = \partial v_1/\partial x_2 - \partial v_2/\partial x_1$, приходим к переопределенной системе пяти квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad & S_i \equiv p_0{}^i + \sum_{k=1}^{2} v_k p_k{}^i + \theta_1 p_i{}^1 + \theta_2 p_i{}^2 = 0, \quad i = 1, 2 \\
& S_3 \equiv p_0{}^3 + \sum_{k=1}^{2} v_k p_k{}^3 + v_3 (p_1{}^1 + p_2{}^2) = 0 \\
& \Phi_1 \equiv \psi_1 p_1{}^1 + 2\theta_1\theta_2 p_1{}^2 + \psi_2 p_2{}^2 + \theta_1\theta_2 v_3 = 0 \\
& \Phi_2 \equiv p_2{}^1 - p_1{}^2 - v_3 = 0 \\
& (p_j{}^i = \partial v_i/\partial x_j,\ i = 1, 2, 3;\ j = 0, 1, 2;\ x_0 \equiv t)
\end{aligned}
$$

Исследуя систему (3) на совместность, получим еще одно уравнение первого порядка

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad & D_0\Phi_1 + \sum_{k=1}^{2} (v_k + \theta_k) D_k\Phi_1 + \theta_2 (\theta_1{}^2 + \varkappa\theta) D_1\Phi_2 + \\
& + \theta_1\psi_2 D_2\Phi_2 - \psi_1 D_1 S_1 - 2\theta_1\theta_2 D_1 S_2 - \psi_2 D_2 S_2 = \\
& = \varkappa\theta (\theta_1 p_2{}^3 - \theta_2 p_1{}^3) + \sum_{i,\,k=1}^{2} b_{ik} p_i{}^i p_k{}^k + v_3 (a_1 p_1{}^1 + a_2 p_2{}^2 + v_3 a_3) = 0
\end{aligned}
$$

где D_i ($i = 0, 1, 2$) — полные производные по x_i, а коэффициенты b_{ik}, a_j ($i, k = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$) зависят только от v_1, v_2. Ввиду громоздкости вид b_{ik}, a_j здесь не приводим.

Таким образом, гладкое решение системы (3) необходимо удовлетворяет уравнению (4), а это позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, безвихревые изэнтропические двойные волны ($v_3 = 0$) либо имеют произвол в две функции одного аргумента в общем решении задачи Коши, либо по теореме о редукции двойных волн [9] они редуцируются к инвариантным решениям. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать вихревые течения ($v_3 \neq 0$). Во-вторых, максимальный произвол в решении плоской изэнтропической двойной волны при заданной функции $\theta = \theta(v_1, v_2)$ возможен только в три функции одного аргумента.

Можно показать, что система (3), (4) находится в инволюции только в случае

$$
(5)\qquad \gamma = 2, \quad \theta = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} (v_k + c_k)^2
$$

(c_1, c_2 — произвольные постоянные). При этом уравнение (4) принимает вид

$$
\theta(\theta_1 p_2{}^3 - \theta_2 p_1{}^3) + \frac{\theta^2 v_3}{\theta_1\theta_2}(p_1{}^1 - p_2{}^2) = 0
$$

а решение системы (3), (4) имеет произвол в три функции одного аргумента. Ранее [2] при классификации плоских изэнтропических двойных волн с прямыми линиями уровня было получено такое же уравнение двойной волны, но произвол решения, указанный там, равен двум функциям одного аргумента, т. е. требование прямолинейности линий уровня срезает функциональный произвол до двух функций одного аргумента. Уравнение двойной волны (5) в пространстве годографа исключаем из дальнейшего рассмотрения.

Если условия (5) не выполнены, то система (3), (4) не в инволюции и при исследовании на совместность ее необходимо продолжать.

После специального продолжения путем введения зависимых переменных $v_4 = p_1^1$, $v_5 = p_1^2$ и исследования переопределенной системы десяти квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно зависимых переменных $v_1, v_2, \ldots v_5$, как и для системы (3), получим еще одно уравнение первого порядка

$$\sum_{i=3}^{5} Q_i p_1^i + Q_6 = 0 \tag{6}$$

Здесь коэффициенты $Q_i = Q_i(v_1, \ldots, v_5)$ $(i = 3, 4, 5)$ — линейные функции относительно v_3, v_4, v_5, вид которых не приводится из-за громоздкости.

Из вида переопределенной системы квазилинейных дифференциальных уравнений относительно $v_1, v_2, \ldots, v_5$ следует, что параметрическими производными старшего порядка при $(\alpha - 1)$-м продолжении могут быть только $\partial^\alpha v_i / \partial x_1^\alpha (i = 3, 4, 5)$. Поэтому из характеров Картана, отвечающих за функциональный произвол, не нулевым будет только первый (σ_1) и при этом имеет место неравенство $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant 3$.

Если система находится в инволюции с характером Картана σ_1, то произвол равен σ_1 функции одного аргумента в общем решении задачи Коши. Поэтому максимально возможный произвол в три функции одного аргумента достигается только в случае, когда

$$Q_i \equiv 0 \quad (i = 3, 4, 5) \tag{7}$$

в противном случае $\sigma_1 < 3$. Из вида коэффициентов Q_i следует, что тождества (7) выполнены только, когда имеют место условия (5). Следовательно, $Q_3^2 + Q_4^2 + Q_5^2 \not\equiv 0$.

После двух продолжений переопределенной системы квазилинейных дифференциальных уравнений относительно $v_1, v_2, \ldots, v_5$ и составления линейных комбинаций путем исключения главных производных относительно производных p_{111}^i $(i = 3, 4, 5)$ получим алгебраическую систему четырех линейных уравнений

$$\begin{gathered} \sum_{i=3}^{5} Q_i p_{111}^i = f_1, \quad Q_4 p_{111}^3 = f_2 \\ ((\theta_1^2 + \theta_2^2) Q_3 - \theta_1^2 Q_5) p_{111}^3 = f_3 \\ \theta_2 (-\psi_2 Q_3 + \theta_1^2 Q_5) p_{111}^3 + \theta_1 \psi_1 Q_5 p_{111}^4 + \\ + \theta_1 (-\psi_2 Q_4 + 2\theta_1 \theta_2 Q_5) p_{111}^5 = f_4 \end{gathered} \tag{8}$$

где функции f_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ зависят только от производных не выше второго порядка.

Ввиду линейности продолженных систем относительно старших производных процесс построения линейных комбинаций (8) можно осуществить в матричном виде, что значительно облегчает проведение выкладок.

Из (8) следует, что для существования функционального произвола в общем решении задачи Коши необходимо выполнение равенства

$$(((\theta_1^2 + \theta_2^2) Q_3 - \theta_1^2 Q_5)^2 + Q_4^2)(\psi_2 Q_4^2 - 2\theta_1 \theta_2 Q_4 Q_5 + \psi_1 Q_5^2) = 0 \tag{9}$$

которое является алгебраическим уравнением относительно $v_1, v_2, \ldots, v_5$. Продолжив (9) и произведя аналогичное рассмотрение матрицы, состоящей из коэффициентов при старших производных, приходим только к двум случаям: либо по теореме о редукции [9] двойная волна редуцируется к инвариантному решению, либо существует такая постоянная

$\beta > 0$, что $\theta_1^2 - \beta\theta_2^2 = 0$. (Из-за большого объема промежуточных выкладок здесь приведен лишь окончательный результат.)

В последнем случае поворотом системы координат можно добиться выполнения равенства $\theta_2 = 0$, т. е. $\theta = \theta(v_1)$.

Рассмотрим случай $\theta_2 = 0$. Подставив $\theta = \theta(v_1)$ в (3) и повторив аналогичное исследование существования решений системы (3), обладающих функциональным произволом, приходим только к случаю, когда $p_2^1 = 0$. Тогда из четвертого уравнения системы (3) имеем $p_{22}^2 = -D_2(\psi_1 p_1^1/\psi_2) = 0$, следовательно

$$v_2 = x_2 g_1(x_1, t) + g_2(x_1, t)$$

Подставив это выражение в (3) и расщепив S_1, получим гиперболическую систему четырех квазилинейных дифференциальных уравнений относительно $v_1(x_1, t)$, $g_i(x_1, t)$ $(i = 1, 2)$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g_i}{\partial t} + v_1\frac{\partial g_i}{\partial x_1} + g_1 g_i = 0 \quad (i = 1, 2) \\ &\frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_1 + \theta')\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \quad (\theta' \equiv \theta_1) \\ &\psi_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \varkappa\theta g_1 \end{aligned} \tag{10}$$

Система (10) легко исследуется на совместность перекрестным дифференцированием. В случае безвихревого течения ($g_1 = 0$) либо

$$(\theta')^2 - \varkappa\theta = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_1 + \theta')\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 0 \tag{11}$$

т. е. функции v_1, θ удовлетворяют уравнениям простой волны, как в одномерном случае, либо

$$v_1 = \mathrm{const}, \quad v_2 = g_2(x_1 - v_1 t) \tag{12}$$

($g_2(\zeta)$ — произвольная функция). В случае вихревого течения ($v_3 \neq 0$) функция $\theta = \theta(v_1)$ должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$\begin{aligned} &\psi_1(1 + \theta'')(\psi_1 - \varkappa\theta(1 + \theta'')) + \theta'(\varkappa\theta\psi_1\theta''' + \\ &+ \varkappa\theta'(1 + \theta'')(\psi_1 - \theta(2\theta'' - \varkappa))) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

а функции $v_1(x_1, t)$, $g_i(x_1, t)$ $(i = 1, 2)$ — переопределенной системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g_i}{\partial t} + v_1\frac{\partial g_i}{\partial x_1} + g_1 g_i = 0 \quad (i = 1, 2) \\ &\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\varkappa\theta}{\psi_1}\theta' g_1 = 0 \\ &\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\theta'}\left(1 - (1 + \theta'')\frac{\varkappa\theta}{\psi_1}\right)g_1^2 \\ &\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -(v_1 + \theta')\frac{\varkappa\theta}{\psi_1}g_1 \end{aligned} \tag{14}$$

находящейся в инволюции и имеющей произвол в одну функцию одного аргумента (например, $g_2(x_1, 0)$) в общем решении задачи Коши.

Таким образом, дана полная классификация плоских изэнтропических двойных волн, обладающих функциональным произволом в общем решении задачи Коши, и справедлива

Теорема. Плоские изэнтропические двойные волны, обладающие функциональным произволом в общем решении задачи Коши при заданной функции $\theta = \theta(v_1, v_2)$, имеются лишь следующих видов:

1) двойные волны, редуцируемые к инвариантным решениям;

2) двойные волны (5), имеющие произвол в три функции одного аргумента;

3) безвихревые двойные волны, имеющие произвол в две функции одного аргумента [1];

4) двойные волны с $\theta(v_1)$, в которых произвол определяется одной функцией одного аргумента, $v_1 = v_1(x_1, t)$, $v_2 = x_2 g_1(x_1, t) + g_2(x_1, t)$ и имеет место: а) условие (11) либо (12) при $g_1 = 0$, б) уравнения (13), (14) при $g_1 \neq 0$.

Прием, в результате которого была получена эта классификационная теорема, является обобщением [1] и может быть с успехом использован и для других течений газа. Так, например, для безвихревых изэнтропических течений газа типа тройной волны [10] решение с максимально возможным произволом в две функции двух аргументов будет только когда

$$\theta = c_0 + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}(c_i - v_i)^2 \tag{15}$$

При этом решением будет бегущая волна с $x_i - c_i t = \Pi_i$ $(i = 1, 2, 3)$, где функция $\Pi(v_1, v_2, v_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi_1 \begin{vmatrix} \Pi_{22}\Pi_{23} \\ \Pi_{32}\Pi_{33} \end{vmatrix} + \psi_2 \begin{vmatrix} \Pi_{11}\Pi_{13} \\ \Pi_{31}\Pi_{33} \end{vmatrix} + \psi_3 \begin{vmatrix} \Pi_{11}\Pi_{12} \\ \Pi_{21}\Pi_{22} \end{vmatrix} - \tag{16}$$

$$- 2\theta_1\theta_2 \begin{vmatrix} \Pi_{21}\Pi_{23} \\ \Pi_{31}\Pi_{33} \end{vmatrix} + 2\theta_1\theta_3 \begin{vmatrix} \Pi_{12}\Pi_{13} \\ \Pi_{22}\Pi_{23} \end{vmatrix} - 2\theta_2\theta_3 \begin{vmatrix} \Pi_{11}\Pi_{13} \\ \Pi_{21}\Pi_{23} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(c_i = \mathrm{const}, \ \Pi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial v_i}, \quad \Pi_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i \partial v_j}, \quad i, j = 1, 2, 3\right)$$

Как было замечено А. Ф. Сидоровым, после замены $x_i' = x_i - c_i t$ $(i = 1, 2, 3)$ в координатах x_i' получится просто случай пространственных потенциальных стационарных движений (все они являются тройными волнами). Представление (15) для θ будет соответствовать интегралу Бернулли, а уравнение (16) для $\Pi(v_1, v_2, v_3)$ — преобразованному при помощи замены Лежандра уравнению для потенциала скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погодин Ю. Я., Сучков В. А., Яненко Н. Н.* О бегущих волнах уравнений газовой динамики.— Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 3, с. 443—445.
2. *Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н.* К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками.— Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 5, с. 832—834.
3. *Сидоров А. Ф.* О движении сжимаемой жидкости в плоских каналах с подвижными стенками.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 4, с. 719—725.
4. *Сидоров А. Ф.* Об ударных волнах в течениях политропного газа, имеющих прямолинейные характеристики.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 2, с. 377—381.
5. *Ермолин Е. В., Сидоров А. Ф.* Некоторые конфигурации изэнтропических распадов двумерных разрывов.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 2, с. 338—346.
6. *Сидоров А. Ф.* Некоторые точные решения нестационарной двумерной газовой динамики.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 2, с. 380—386.
7. *Kuranishi M.* Lectures on involutive systems of partial differential equations. São Paulo: Publ. Soc. Math. São Paulo, 1967. 77 p.
8. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.— Л.: Гостехиздат, 1948. 348с.
9. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
10. *Сидоров А. Ф.* Два точных решения уравнений гидродинамики типа тройной волны.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, с. 1139—1142.

Новосибирск

Поступила в редакцию 26.III.1984