Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 3, 1985

УДК 532.517.4

АНИЗОТРОПНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПРИ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ

Бабкин В. А.

Показано, что в области, прилегающей к твердой стенке, ньютоновскую жидкость в турбулентном течении можно рассматривать как ориентируемую жидкость Эриксена—Лесли, на определяющие константы которой наложены некоторые условия. Логарифмический профиль скоростей получается из найденного решения, если пренебречь молекулярной вязкостью и если расстояние от стенки мало.

1. Рассмотрим напорное турбулентное течение несжимаемой ньютоновской жидкости между параллельными плоскими стенками в отсутствие массовых сил. Система координат декартова: ось x направлена по потоку, ось y перпендикулярна стенкам. Уравнения стенок: $y = \pm h$.

Полуэмпирическая теория пути смешения Прандтля и многочисленные эксперименты показывают, что вблизи твердой стенки продольная осредненная скорость u имеет логарифмический профиль

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\left(1 - \frac{|y|}{h}\right) + C \tag{1.1}$$

где $v_* = (\tau_w / \rho)^{1/2}$ — динамическая скорость, τ_w — модуль касательного напряжения на стенке, ρ — плотность жидкости, $\varkappa$ — постоянная Кармана.

Как будет видно из дальнейшего, профиль (1.1) получается, если турбулентную жидкость рассматривать как анизотропную жидкость, физические свойства которой в каждой точке определяются вектором-ориентиром $\mathbf{n}$ [1—3].

В турбулентном течении ньютоновская жидкость становится анизотропной [4—6] и вблизи твердой стенки обладает структурой, которую образует система вихрей, называемых Λ-вихрями [6]. Λ-Вихрь имеет вершину, которая является наиболее удаленной от стенки точкой вихря, и две ветви, убегающие в бесконечность в направлении течения. По мере удаления от вершины ветви вихря приближаются к стенке, при этом угол, образуемый ими с направлением течения, уменьшается до нуля. Хотя отдельные вихри могут отклоняться от стенки на значительное расстояние, подавляющая часть вихрей расположена в пристеночной области, толщина которой δ.

Для описания турбулизованной жидкости применим модель Эриксена — Лесли [1—3], полагая, что единичный вектор $\mathbf{n}$ характеризует направление вихревой линии. Хотя эта модель была построена для жидких кристаллов-нематиков, из структуры уравнений модели видно, что ее можно прилагать и к другим жидким средам, свойства которых характеризуются вектором-ориентиром.

Пусть течение установившееся, жидкость несжимаемая и массовыми силами можно пренебречь. Полагая

(1.2) $$v_x = u(y),\ v_y = v_z = 0$$

(1.3) $$\mathbf{n} = \{\cos\theta(y),\ \sin\theta(y),\ 0\}$$

можно получить [1] следующие уравнения движения ориентируемой жидкости между параллельными плоскими стенками (штрих означает дифференцирование по y):

(1.4) $$\tau_{xy}' = \partial p/\partial x,\quad \tau_{yy}' = 0$$

(1.5) $$\mu_{xy}' + g_x = 0,\quad \mu_{yy}' + g_y = 0$$

Здесь v_x, v_y, v_z — компоненты осредненной скорости, τ_{ij} (i, j = x, y, z) — напряжения, p — давление, θ — угол между вектором-ориентиром и осью x. Обобщенные напряжения μ_{ij} и внутренняя объемна сила $\mathbf{g}$ (g_x, g_y, g_z) — это характерные для ориентируемой жидкости динамические величины, которые определяют изменение вектора-ориентира [1, 2].

Вследствие равенств (1.2) уравнение неразрывности выполняется тождественно. Величины, входящие в уравнения (1.4), (1.5), определяются следующими равенствами:

(1.6)
$$2\tau_{xy} = [2\mu_1\sin^2\theta\cos^2\theta + (\mu_5 - \mu_2)\sin^2\theta + (\mu_3 + \mu_6)\cos^2\theta + \mu_4]\,u'$$
$$\tau_{yy} = -p - (k_{11}\cos^2\theta + k_{33}\sin^2\theta)\,\theta'^2 + \sin\theta\cos\theta\,[\mu_1\sin^2\theta + {}^1/_2\,(\mu_2 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_6)]\,u'$$
$$\mu_{xy} = \beta_2\cos\theta - [k_{22}\sin\theta + (k_{33} - k_{22})\sin^3\theta]\,\theta'$$
$$\mu_{yy} = \beta_2\sin\theta + [k_{11}\cos\theta + (k_{33} - k_{22})\cos\theta\sin^2\theta]\,\theta'$$
$$g_x = \gamma\cos\theta + \beta_2\theta'\sin\theta + {}^1/_2\,(\lambda_2 - \lambda_1)\,u'\sin\theta$$
$$g_y = \gamma\sin\theta - \beta_2\theta'\cos\theta - (k_{33} - k_{22})\,\theta'^2\sin\theta + {}^1/_2\,(\lambda_1 + \lambda_2)\,u'\cos\theta$$

где λ_1, λ_2, $\mu_1, \ldots, \mu_6$, k_{11}, k_{22}, k_{33} — определяющие константы в модели Эриксена — Лесли, β_2, γ — неопределенные константы в этой модели.

Постоянные модели Эриксена — Лесли и, в частности, те, что входят в равенства (1.6), связаны следующими соотношениями [2]:

(1.7)
$$k_{11} \geqslant 0,\ k_{22} \geqslant 0,\ k_{33} \geqslant 0,\ |k_{24}| \leqslant k_{22},\quad |k_{11} - k_{22} - k_{24}| \leqslant k_{11}$$
$$\mu_2 + \mu_3 = \mu_6 - \mu_5,\quad \mu_4 \geqslant 0,\quad 2\mu_1 + 3\mu_4 + 2\mu_5 + 2\mu_6 \geqslant 0,$$
$$2\mu_4 + \mu_5 + \mu_6 \geqslant 0,\ -4\lambda_1(2\mu_4 + \mu_5 + \mu_6) \geqslant (\mu_2 + \mu_3 - \lambda_2)^2$$
$$\lambda_1 = \mu_2 - \mu_3,\quad \lambda_2 = \mu_5 - \mu_6$$

После подстановки последних четырех выражений (1.6) в уравнения (1.5) получается уравнение, которому удовлетворяет угол θ

(1.8)
$$d/d\theta\,(f(\theta)\,\theta'^2) + (\lambda_1 + \lambda_2\cos 2\theta)\,u' = 0$$
$$f(\theta) = k_{11}\cos^2\theta + k_{33}\sin^2\theta$$

Найдем условия, которым в дополнение к соотношениям (1.7) должны удовлетворять постоянные в модели Эриксена—Лесли, чтобы профиль скорости вблизи стенки имел вид (1.1). Как и в теории пути смешения Прандтля, положим, что около стенки $\tau_{xy} = -\tau_w$. Тогда первое равенство (1.6) принимает вид

(1.9) $$g(\theta)\,u' = -\tau_w$$

(1.10)
$$2g(\theta) = 2\mu_1\sin^2\theta\cos^2\theta + (\mu_5 - \mu_2)\sin^2\theta + (\mu_3 + \mu_6)\cos^2\theta + \mu_4$$

Уравнения (1.8) и (1.9) дают следующее дифференциальное уравнение для определения угла θ:

$$\frac{d}{d\theta}\left(f(\theta)\theta'^2\right) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \cos 2\theta}{g(\theta)}\tau_w \tag{1.11}$$

Если скорость u определена формулой (1.1), то, найдя u' из (1.1) и подставляя в уравнение (1.9), получим алгебраическое уравнение для определения θ

$$g(\theta) = \rho\varkappa v_* (h - |y|) \operatorname{sgn} y \tag{1.12}$$

По своему смыслу равенство (1.12) является, очевидно, интегралом уравнения (1.11). Из (1.12)

$$\theta' = \frac{2\rho\varkappa v_*}{(-2\mu_1 \cos 2\theta + \mu_2 + \mu_3 - \mu_5 + \mu_6)\sin 2\theta} \tag{1.13}$$

Если производную (1.13) подставить в уравнение (1.11), то можно видеть, что левая часть будет нечетной, а правая — четной функцией от θ. Таким образом, чтобы уравнение (1.11) обращалось в тождество при подстановке выражения (1.13), необходимо и достаточно, чтобы и левая, и правая части обратились в нуль. Отсюда следует

$$k_{11} = k_{33} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \tag{1.14}$$

С учетом (1.14) соотношения (1.7) дают

$$\mu_2 = \mu_3 = 0, \quad \mu_5 = \mu_6, \quad k_{24} = -k_{22} \tag{1.15}$$

Равенства (1.14) и (1.15) устанавливают те ограничения, которым необходимо должны удовлетворять коэффициенты определяющих уравнений, чтобы профиль скоростей был логарифмическим. За модель турбулизованной жидкости примем модель Эриксена — Лесли [1, 2] ориентируемой жидкости, в которой константы удовлетворяют условиям (1.14) и (1.15). В этой модели напряжения при течении жидкости между параллельными плоскими стенками с учетом равенств (1.2) и (1.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -p + u'(\mu_1 \cos^2\theta + \mu_5)\sin\theta\cos\theta \\ \tau_{yy} &= -p + u'(\mu_1 \sin^2\theta + \mu_5)\sin\theta\cos\theta \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = u'[\mu_1 \sin^2\theta\cos^2\theta + {}^1/_2(\mu_4 + \mu_5)] \\ \tau_{zz} &= -p, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Как и в работе [5], напряжения τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz} различны.

2. Найдем профиль скорости при турбулентном течении жидкости между параллельными плоскими стенками. Для этого решим систему уравнений (1.4)—(1.6) с учетом условий (1.14), (1.15). Система сводится к следующим уравнениям:

$$g(\theta)u' = -\tau_w y/h, \quad \tau_w = -h\partial p/\partial x \tag{2.1}$$

$$k_{22}\sin\theta\cos\theta\theta'' + k_{22}(1 - 3\sin^2\theta)\theta'^2 - \gamma = 0 \tag{2.2}$$

$$g(\theta) = \mu_1 \sin^2\theta\cos^2\theta + \mu_0, \quad 2\mu_0 = \mu_4 + \mu_5 \tag{2.3}$$

В соответствии с работой [6] формулируются граничные условия для функции $\theta(y)$

$$\theta(h) = \theta(-h) = 0 \tag{2.4}$$

Скорость $u(y)$ должна удовлетворять условию прилипания на стенке

$$u(h) = u(-h) = 0 \tag{2.5}$$

Если $\gamma = 0$, то, интегрируя один раз уравнение (2.2), получим

$$\sin^2\theta\cos^4\theta\theta'^2 = B \tag{2.6}$$

где B — постоянная интегрирования. Если θ_0 — угол наклона вектора-ориентира на верхней границе $y = \pm (h - \delta)$ прилегающего к стенкам Λ-вихревого слоя толщиной δ [6] и θ_0' — соответствующая производная, то

$$B = \theta_0'^2 \sin^2 \theta_0 \cos^4 \theta_0 \tag{2.7}$$

Ввиду симметрии течения относительно плоскости $y = 0$ ограничимся далее рассмотрением течения только в верхней полуплоскости: $0 \leqslant y \leqslant h$. Тогда интегрирование уравнения (2.6) с граничными условиями (2.4) дает

$$\cos\theta = t, \quad t = [1 - 3\sqrt{B}\,(h - y)]^{1/3} \tag{2.8}$$

Интегрирование уравнения (2.1), в котором функция $g(\theta)$ определена формулой (2.3), приводит к следующему профилю скорости:

$$\frac{3\mu_1 hB}{\sqrt{\rho\tau_w}}\frac{u}{v_*} = \frac{3h\sqrt{B} - 1}{2q^2 - 1}\left[\sqrt{q^2 - 1}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{q^2 - 1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{q}{2}\ln\frac{q - t}{q + t}\right] + \frac{1 + 2\alpha}{4\sqrt{1 + 4\alpha}}\ln\frac{q^2 - t^2}{t^2 + q^2 - 1} +$$
$$+ \frac{1}{4}\ln|t^4 - t^2 - \alpha| + \frac{t^2}{2} + C \tag{2.9}$$
$$(\alpha = \mu_0/\mu_1,\ 2q^2 = 1 + \sqrt{1 + 4\alpha},\ q > 0)$$

Постоянная C определяется из граничного условия (2.5)

$$C = \frac{1 - 3h\sqrt{B}}{2q^2 - 1}\left[\sqrt{q^2 - 1}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{q^2 - 1}} + \frac{q}{2}\ln\frac{q - 1}{q + 1}\right] -$$
$$- \frac{1 + 2\alpha}{4\sqrt{1 + 4\alpha}}\ln\left(1 - \frac{1}{q^2}\right) - \frac{\ln\alpha}{4} - \frac{1}{2} \tag{2.10}$$

Формулы (2.9), (2.10) дают искомое распределение скоростей для рассматриваемой модели турбулентного потока в промежутке $(h - \delta) \leqslant y \leqslant h$. Покажем, что логарифмический профиль скоростей (1.1) получается из этого уравнения, если сделать те же предположения, которые обычно и делаются при выводе формулы (1.1) [7].

Функция $g(\theta)$ представляет собой эффективную вязкость турбулизованной жидкости, причем $\mu_0 = g(0)$. Таким образом, μ_0 — это вязкость жидкости непосредственно у стенки и по существу является коэффициентом молекулярной вязкости. Если пренебречь вязкостью μ_0 по сравнению с турбулентной вязкостью $\mu_1 \sin^2\theta \cos^2\theta$ (это означает, что $\alpha = 0$ и $q = 1$), то вблизи стенки, когда малы разности $h - y$ и $1 - t$ и, следовательно, главным членом в формуле (2.9) является $\ln(1 - t)$ (интересно отметить, что в этом случае граничное условие (2.5) уже не может быть выполнено и постоянную C можно найти вводя понятие ламинарного подслоя [7]), профиль скорости (2.9) принимает вид (1.1), где

$$\varkappa = 2\mu_1 (B/(\rho\tau_w))^{1/2} \tag{2.11}$$

Таким образом, постоянная Кармана $\varkappa$ оказывается связанной с параметрами турбулентного потока жидкости.

Автор благодарит В. Н. Николаевского за внимание к работе и конструктивную критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Leslie F. M.* Some constitutive equations for liquid crystals.— Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1968, v. 28, № 4, p. 265—283.
2. *Чандрасекар С.* Жидкие кристаллы. М.: Мир, 1980. 344 с.
3. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н.* Гидромеханика жидких кристаллов.— В кн.: Итоги науки и техники. Гидромеханика. Т. 7. М.: ВИНИТИ, 1973, с. 106—213.
4. *Николаевский В. Н.* Асимметричная механика турбулентных потоков.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 514—525.
5. *Дмитриев Н. М., Лурье М. В.* О реологической модели анизотропной турбулентности.— Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 4, с. 775—777.
6. *Perry A. E., Chong M. S.* On the mechanism of wall turbulence.— J. Fluid Mech., 1982, v. 119, p. 173—217.
7. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
13.I.1984