Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 3, 1985

УДК 532.593

ОБТЕКАНИЕ ТЕЛА МНОГОСЛОЙНЫМ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Бежанов К. А., Тер-Крикоров А. М.

Исследуется плоская задача обтекания тела установившимся потоком слоистой жидкости с разрывной стратификацией. Количество слоев конечно, дно горизонтальное, верхняя граница свободная. Для изучения течения за телом делается гипотеза о возможности аппроксимации поля скоростей на границе тела полем скоростей, возникающем при обтекании тела потоком невесомой жидкости [1, 2]. В смешанных эйлерово-лагранжевых переменных сформулирована граничная задача для эллиптического уравнения второго порядка в прямолинейной полосе с разрезом и с условиями согласования на конечном числе параллельных прямых, соответствующих границам раздела. Введение меры, порожденной монотонным распределением плотности в невозмущенном потоке, позволяет свести граничную задачу к нелинейному интегродифференциальному уравнению с симметризуемыми ядрами фредгольмовского типа. Линеаризованное уравнение решается методом Фурье.

Усилен результат работы [3]: показано, что соответствующее однородное интегральное уравнение имеет при любом заданном значении числа Фруда не более конечного числа положительных характеристических чисел, которым соответствуют осциллирующие моды. Вследствие этого асимптотика за телом описывается суммой конечного числа гармоник. Показано также, что если скорость потока близка к одной из счетного множества скоростей распространения длинноволновых мод, то резонансно усиливается соответствующая гармоника.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоский установившийся поток идеальной несжимаемой тяжелой слоистой жидкости, обтекающей тело T_0: $(|x| \leqslant l, y_-(x) \leqslant y \leqslant y_+(x))$, где $y_+(x)$ и $y_-(x)$ — известные функции, задающие форму тела. Ось Ox направлена вдоль горизонтального дна канала, а ось Oy — вертикально вверх (фигура). На границах $y_k(x)$ слоев T_k терпят разрывы плотность ρ и тангенциальная составляющая вектора скорости $\mathbf{V}$, а давление p и нормальная составляющая вектора скорости непрерывны, T_k: $(-\infty < x < +\infty,\ y_{k-1}(x) < y < y_k(x))$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Граничная задача для модифицированной функции тока имеет вид для совокупности областей T [3]

$$\nabla^2\psi - gy\rho'(\psi) = \Phi'(\psi) \tag{1.1}$$

$$\left[\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + gy\rho(\psi) - \Phi(\psi)\right]_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$[\psi]_k(x) = 0,\ \psi(x, y_k(x)) = \psi_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\psi(x, 0) = 0,\ \psi(x, y_\pm(x)) = \psi_0$$

$$\Phi(\psi) = \frac{1}{2}\rho(\psi)\mathbf{V}^2 + p + gy\rho(\psi), \quad T = \bigcup_{k=1}^{n} T_k \setminus T_0$$

Здесь и далее штрихом обозначается дифференцирование по соответствующему аргументу, $[f]_k(x)$ — скачок функции $f(x, y)$ при переходе через k-ю границу раздела, постоянные ψ_k соответствуют линиям разрыва плотности, ψ_0 — линии тока, разветвляющейся на теле, g — ускорение силы тяжести, $\Phi(\psi)$ — функция Бернулли.

При $x \to -\infty$ задан одномерный невозмущенный поток с параметрами

$$\rho = R(\eta), \quad \mathbf{V} = V(\eta)\mathbf{i}, \quad p = P(\eta) = g\int_{\eta}^{H}(R\,\xi)\,d\xi$$

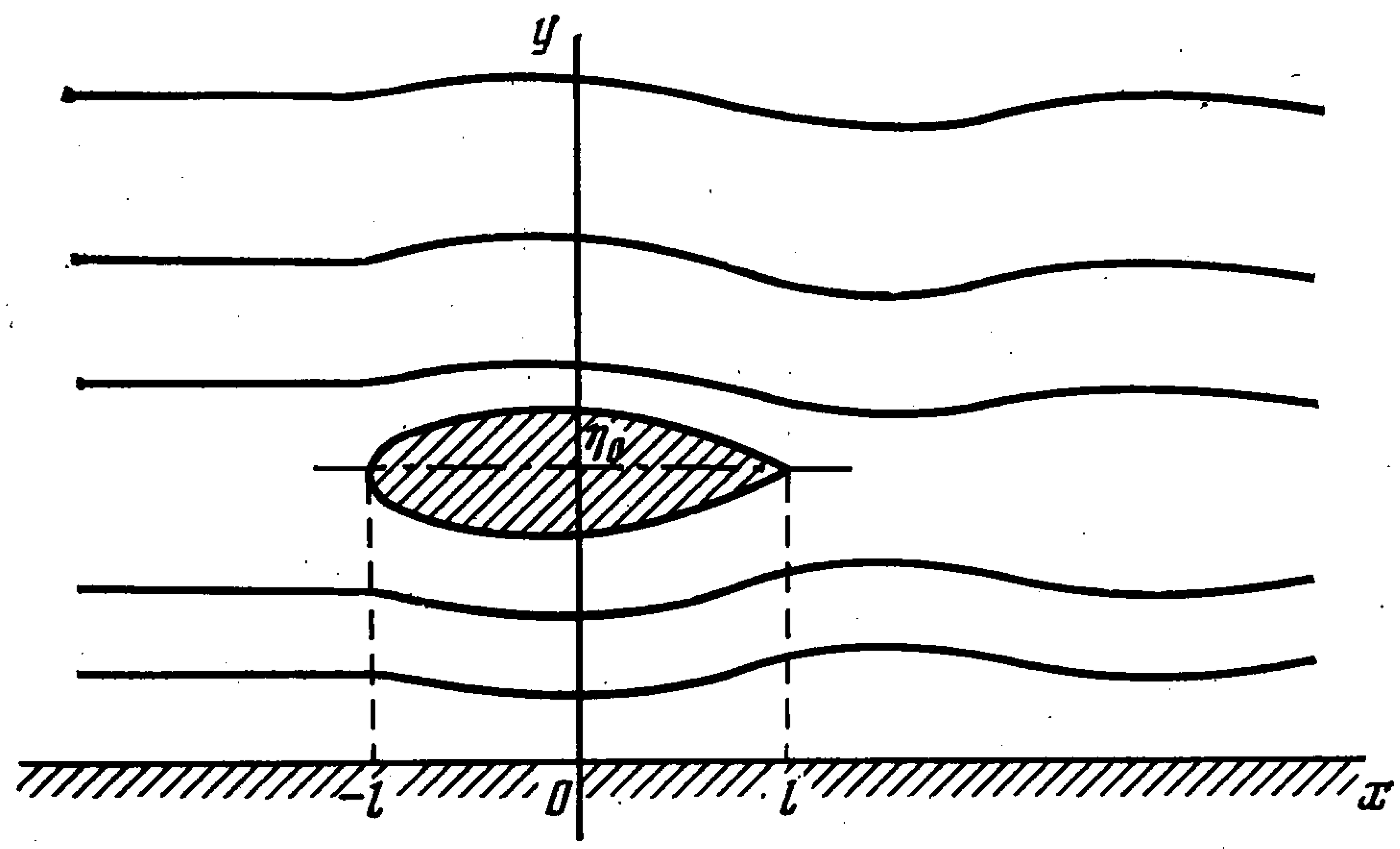
Здесь η — лагранжева координата, задающая при $x \to -\infty$ расстояние до оси Ox невозмущенной прямолинейной линии тока, $\mathbf{i}$ — единичный орт оси Ox, H — глубина невозмущенного потока.

Было показано [3], что семейство линии тока совпадает с семейством $\eta(x, y) = \text{const}$, а плотность $\rho(\psi) = R(\eta)$ и функция Бернулли $\Phi(\psi) = \Phi_0(\eta)$ зависят только от η и, следовательно, постоянны на линиях тока.

Перейдем к безразмерным переменным, беря в качестве единицы длины величину H, а в качестве единиц плотности и скорости — числа

$$R_0 = \frac{1}{H}\int_0^H R(\xi)\,d\xi, \quad c = \frac{1}{HR_0}\int_0^H R(\xi)V(\xi)\,d\xi$$

Возьмем в качестве независимых переменных x и η, а в качестве зависимой переменной $y(x, \eta)$. Тогда области течения соответствует полоса



$(-\infty < x < +\infty,\ 0 < \eta < 1)$, дну — прямая $\eta = 0$, свободной границе — прямая $\eta = 1$, границам раздела — прямые $\eta = \eta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $0 < \eta_1 < \ldots < \eta_n = 1$, телу — отрезок G_0: $(|x| \leqslant l,\ \eta = \eta_0)$. Предполагается, что при $\eta > 1$ задан фиктивный поток нулевой скорости и плотности.

Функция $y(x, \eta)$ удовлетворяет уравнению [3, 4]

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(a^2(\eta)\frac{1+y_x^2}{2y_\eta^2}\right) - a^2(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\frac{y_x}{y_\eta} - \nu R'(\eta)\,y = \Phi_0'(\eta) \tag{1.2}$$

$$(\nu = gH/c^2, \quad a^2(\eta) = R(\eta)\,V^2(\eta))$$

Нижние индексы x и η означают дифференцирование по соответствующей переменной, ν — величина, обратная квадрату числа Фруда.

Граничные условия на теле имеют вид при $|x| \leqslant l$

$$y(x, \eta_0 + 0) = \eta_0 + y_+(x), \quad y(x, \eta_0 - 0) = \eta_0 + y_-(x) \tag{1.3}$$

где $y_+(x)$ и $y_-(x)$ — известные функции, задающие форму тела, $y_-(x) \leqslant y_+(x)$.

На границах слоев функции $y(x, \eta)$ и $p(x, \eta)$ непрерывны, что приводит к условиям согласования

$$\left[a^2(\eta)\frac{1+y_x^2}{2y_\eta^2} - \Phi_0(\eta) - \nu R(\eta)\,y\right]_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.4}$$

$$[y]_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Граничное условие на дне и асимптотическое условие на $-\infty$ имеют вид

(1.5) $$y(x,0)=0, \quad \lim_{x\to-\infty} y(x,\eta)=\eta$$

Граничные условия (1.3) сильно усложняют задачу. Заменим их парой более простых граничных условий. Из (1.3) следует, что

(1.6 $$[y]_0(x) = \theta(l - |x|)\, y_0(x), \quad y_0(x) = y_+(x) - y_-(x)$$

где $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда, $[f]_0(x)$ означает скачок функции $f(x, \eta)$ при переходе через прямую $\eta = \eta_0$.

Сделаем гипотезу о возможности аппроксимации поля скоростей на границе тела полем скоростей, возникающим при обтекании тела потоком невесомой жидкости. Эта гипотеза оправдана, если изменение плотности в слое, в котором находится тело, невелико (тело тонкое или мала стратификация) [1, 2]. Для простоты рассмотрим случай, когда тело помещено целиком в одном из слоев. Тогда

(1.7) $$\left[\frac{1}{2}\rho V^2\right]_0(x)=\left[a^2(\eta)\frac{1+y_x^{\,2}}{2y_\eta^{\,2}}\right]_0(x)=\theta(l-|x|)\,p_0(x)$$

$$p_0(x)=\left[\frac{1}{2}\rho_* V_*^{\,2}\right]_0(x)=-[p_*]_0(x)$$

где звездочкой отмечены параметры невесомой жидкости.

Итак, окончательно имеем уравнение (1.2) и граничные условия (1.4) — (1.7).

2. Основное интегродифференциальное уравнение обтекания тела. Замена

(2.1) $$y(x, \eta) = \eta + w(x, \eta)$$

позволяет получить следующую граничную задачу для совокупности областей G:

(2.2) $$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(a^2(\eta)\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}+F_1 w\right)\right)+a^2(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+F_2 w\right)-\nu R'(\eta)\,w=0$$

(2.3) $$\left[a^2(\eta)\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}+F_1 w\right)-\nu R(\eta)\,w\right]_k(x)=0, \quad k=1,2,\ldots,n$$

(2.4) $$\left[a^2(\eta)\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}+F_1 w\right)\right]_0(x)=\theta(l-|x|)\,p_0(x)$$

(2.5) $$[w]_0(x) = \theta(l - |x|)\, y_0(x), \quad w(x, 0) = 0$$

(2.6) $$[w]_k(x)=0, \quad k=1,2,\ldots,n, \quad \lim_{x\to-\infty} w(x,\eta)=0$$

$$G=\bigcup_{k=1}^{n} G_k\setminus G_0, \quad G_k\colon (-\infty<x<+\infty, \ \eta_{k-1}<\eta<\eta_k)$$

Выражения для нелинейных операторов $F_1 w$ и $F_2 w$ приведены в [3], но они в дальнейшем не понадобятся.

Граничную задачу (2.2) — (2.6) сведем к решению интегродифференциального уравнения [3]. Для этого проинтегрируем уравнение (2.2) по отрезку $[\eta, 1]$ и воспользуемся граничными условиями (2.3) и (2.4)

(2.7) $$a^2(\eta)\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}+F_1 w\right)=\nu\int_\eta^1 w(x,\xi)\,d\mu(\xi)-$$

$$-\theta(l-|x|)\,\theta(\eta-\eta_0)\,p_0(x)+\int_\eta^1 a^2(\xi)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}(x,\xi)+F_2 w\right)d\xi$$

где $\mu(\eta)$ — мера Лебега — Стилтьеса, порожденная монотонной функцией $R(\eta)$, а $d\mu(\eta) = -dR(\eta)$.

Разделим уравнение (2.7) на $a^2(\eta)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, \eta]$, используя граничные условия (2.5) и (2.6), получим окончательно

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad & w(x,\eta) - \nu \int_0^1 G(\eta,\xi)\, w(x,\xi)\, d\mu(\xi) = \\
& = \theta(l - |x|)\left(y_0(x)\,\theta(\eta-\eta_0) - p_0(x)\, G(\eta,\eta_0)\right) - \\
& - \int_0^\eta F_1 w\, d\xi + \int_0^1 a^2(\xi)\, G(\eta,\xi)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,\xi) + \frac{\partial}{\partial x} F_2 w\right) d\xi \\
& G(\eta,\xi) = \begin{cases} q(\eta), & \eta \leqslant \xi \\ q(\xi), & \eta > \xi \end{cases}, \quad q(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\tau}{a^2(\tau)}
\end{aligned}
$$

Если обратить оператор Фредгольма, стоящий в левой части уравнения (2.8), то получим интегродифференциальное уравнение, не содержащее меры $\mu(\eta)$ в левой части

$$
\begin{aligned}
(2.9)\qquad & w(x,\eta) + \int_0^1 a^2(\xi)\, \Gamma(\eta,\xi,\nu)\, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,\xi)\, d\xi = \\
& = \theta(l - |x|)\left(y_0(x)\,\chi_1(\eta,\nu) - p_0(x)\,\chi_2(\eta,\nu)\right) + \Phi w \\
& \chi_1(\eta,\nu) = \theta(\eta-\eta_0) - \nu \int_{\eta_0}^1 \Gamma(\eta,\xi,\nu)\, d\mu(\xi) \\
& \chi_2(\eta,\nu) = G(\eta,\eta_0) - \nu \int_0^1 \Gamma(\eta,\xi,\nu)\, G(\xi,\eta_0)\, d\mu(\xi)
\end{aligned}
$$

Выражения для нелинейного оператора Φw и резольвенты $\Gamma(\eta, \xi, \nu)$ приведены в [3]. Резольвента имеет счетное множество простых положительных полюсов в точках $\nu = \nu_l$, которым соответствуют критические скорости длинноволновых мод.

3. Исследование спектра интегрального уравнения Фредгольма. Полагая в (2.9) $\Phi w = 0$, получим линейное интегродифференциальное уравнение, для решения которого необходимо рассмотреть вспомогательное интегральное уравнение Фредгольма с симметризуемым ядром

$$
(3.1)\qquad z(\eta,\nu) = \lambda \int_0^1 a^2(\xi)\, \Gamma(\eta,\xi,\nu)\, z(\xi,\nu)\, d\xi
$$

При $\nu \neq \nu_l$ все характеристические числа λ_m ($m = 1, 2, \ldots$) уравнения (3.1) простые и вещественные, а соответствующие собственные функции ортогональны с весом $a^2(\eta)$.

Теорема 1. При заданном значении параметра ν интегральное уравнение (3.1) имеет не более конечного числа положительных характеристических чисел.

Доказательство. Интегральное уравнение (3.1) эквивалентно граничной задаче на собственные значения для дифференциального оператора второго порядка

$$
(3.2)\qquad \frac{d}{d\eta}\left(a^2(\eta)\frac{dz}{d\eta}\right) - \lambda a^2(\eta)\, z - \nu R'(\eta)\, z = 0, \quad 0 < \eta < 1
$$

$$
(3.3)\qquad \left[a^2(\eta)\frac{dz}{d\eta} - \nu R(\eta)\, z\right]_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n
$$

$$
(3.4)\qquad z(0,\lambda) = 0, \quad [z]_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1
$$

где $z = z(\eta, \lambda)$ без изменения обозначения.

Собственные числа λ_m можно найти следующим образом. Вначале решается задача Коши для уравнения (3.2) на отрезке $[0, \eta_1]$ с начальными условиями при $\eta = 0$

$$z(0, \lambda) = 0, \quad \frac{dz}{d\eta}(0, \lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{a(0)} \tag{3.5}$$

Пусть это решение — $z_1(\eta, \lambda)$. Далее задача Коши для уравнения (3.2) решается на отрезке $[\eta_1, \eta_2]$, а начальные условия при $\eta = \eta_1$ берутся для $k = 1$ из условий согласования (3.3) и (3.4)

$$z_2(\eta_1, \lambda) = z_1(\eta_1, \lambda)$$

$$\frac{dz_2}{d\eta}(\eta_1, \lambda) = \frac{a^2(\eta_1 - 0)}{a^2(\eta_1 + 0)} \frac{dz_1}{d\eta}(\eta_1, \lambda) + \nu [R(\eta)]_1 \frac{z_1(\eta_1, \lambda)}{a^2(\eta_1 + 0)}$$

Это решение обозначается через $z_2(\eta, \lambda)$.

Продолжая эти рассуждения, можно построить функцию

$$z = z_k(\eta, \lambda), \ \eta \in [\eta_{k-1}, \eta_k], \ k = 1, 2, \ldots, n$$

которая удовлетворяет уравнению (3.2) и всем граничным условиям (3.3) и (3.4), кроме условия (3.3) при $k = n$. Чтобы λ было собственным значением, а $z(\eta, \lambda)$ соответствующей собственной функцией, необходимо и достаточно, чтобы λ было решением уравнения

$$a^2(1) \frac{dz}{d\eta}(1, \lambda) - \nu R(1) z(1, \lambda) = 0 \tag{3.6}$$

Таким образом, собственные числа уравнения (3.2) должны быть решениями уравнения (3.6).

Если теперь предположить, что положительные характеристические числа интегрального уравнения (3.1) образуют бесконечную последовательность, то эта последовательность должна иметь бесконечность своей предельной точкой. Покажем, что это предположение приводит к противоречию.

Умножим уравнение (3.2) на $z(\eta, \lambda)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,1]$. Используя далее граничные условия (3.3) и (3.4), получим

$$\lambda I_1(\lambda) = \nu I_2(\lambda) - I_3(\lambda)$$

$$I_1(\lambda) = \int_0^1 a^2(\eta) z^2(\eta, \lambda) \, d\eta, \qquad I_2(\lambda) = \int_0^1 z^2(\eta, \lambda) \, d\mu(\eta)$$

$$I_3(\lambda) = \int_0^1 a^2(\eta) z_\eta^2(\eta, \lambda) \, d\eta$$

откуда

$$(I_2(\lambda)/I_1(\lambda)) \geqslant \lambda/\nu \tag{3.7}$$

Пусть далее при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$

$$\alpha \leqslant a(\eta) \leqslant \beta, \ R(\eta) \geqslant \gamma, \ |R'(\eta)| \leqslant \delta \tag{3.8}$$

где α, β, γ и δ — положительные постоянные.

При больших положительных λ и с учетом (3.8) имеем асимптотическую формулу реше ия уравнения (3.2) [5]

$$z(\eta, \lambda) = \frac{\exp(\sqrt{\lambda}\eta)}{a(\eta)} (1 + o(1)), \quad \lambda \to +\infty \tag{3.9}$$

Если использовать граничные условия (3.3), (3.4), неравенства (3.8) и формулу (3.9), можно по индукции получить асимптотические решения для всех n слоев

$$z_k(\eta, \lambda) = \gamma_k a^{-1}(\eta) \exp(\sqrt{\lambda}\,\eta)\,(1 + o(1)), \ \eta_{k-1} \leqslant \eta \leqslant \eta_k \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.10}$$

а постоянные γ_k не зависят от λ.

Тогда из (3.8) и (3.10) получим при $\lambda_m \to +\infty$

$$I_2(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} z^2(\eta_k, \lambda) R(\eta_k) - \int_0^1 z^2(\eta, \lambda) R'(\eta) \, d\eta \leqslant \tag{3.11}$$

$$\leqslant C_1 \exp(2\sqrt{\lambda}), \quad C_1 > 0$$

В выражении (3.11) интеграл в правой части был отброшен, так как его порядок равен $\exp(2\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda}$.

Аналогично из (3.8) и (3.10) имеем

(3.12) $$I_1(\lambda) \geqslant C_2 \exp(2\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda}, \quad C_2 > 0$$

Из (3.11) и (3.12) следует неравенство

(3.13) $$(I_2(\lambda)/I_1(\lambda)) \leqslant C\sqrt{\lambda}, \quad C > 0$$

В выражениях (3.11)—(3.13) постоянные C_1, C_2 и C не зависят от λ.

Так как по предположению характеристические числа интегрального уравнения (3.1) имеют предельную точку на бесконечности, то существует последовательность $\{\lambda_m\}$, такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty, \quad \lambda_m > 0$$

Подставляя λ_m в неравенства (3.7) и (3.13), получим при $\lambda_m \to +\infty$

$$(\lambda_m/\nu) \leqslant C\sqrt{\lambda_m}$$

что невозможно. Теорема доказана.]

Занумеруем характеристические числа интегрального уравнения (3.1) следующим образом:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_N > 0 > \lambda_{N+1} > \ldots$$

а соответствующие им собственные функции

(3.14) $$z_m(\eta, \nu), \ m = 1, 2, \ldots, N, N+1, \ldots$$

образуют полную ортонормированную систему.

Для однослойной модели результат, доказанный в теореме 1, был получен ранее [6] [1]. Точные решения уравнения (1.1) с конечным числом волновых гармоник ранее были найдены для случая, когда $\rho'(\psi)$ и $\Phi'(\psi)$ линейно зависят от ψ [7].

4. Решение линейного интегродифференциального уравнения. Линейное интегродифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (2.9), решается методом Фурье. Для этого функции $\chi_1(\eta, \nu)$ и $\chi_2(\eta, \nu)$, определенные формулами в (2.9), разлагаются в ряды по системе (3.14)

(4.1) $$\chi_1(\eta, \nu) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m z_m(\eta, \nu), \ \chi_2(\eta, \nu) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m z(\eta, \nu), \ 0 \leqslant \eta \leqslant 1$$

$$\alpha_m = \int_{\eta_0}^{1} a^2(\eta) z_m(\eta, \nu)\, d\eta - \frac{\nu}{\lambda_m} \int_{\eta_0}^{1} z_m(\eta, \nu)\, d\mu(\eta)$$

$$\beta_m = \int_{0}^{1} a^2(\eta) G(\eta, \eta_0) z_m(\eta, \nu)\, d\eta - \frac{\nu}{\lambda_m} \int_{0}^{1} G(\eta, \eta_0) z_m(\eta, \nu)\, d\mu(\eta)$$

Решение интегродифференциального уравнения ищем в виде

$$w(x, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) z_m(\eta, \nu)$$

где неизвестные функции $B_m(x)$ удовлетворяют уравнению

(4.2) $$B_m''(x) + \lambda_m B_m(x) = \lambda_m f_m(x)$$
$$f_m(x) = \theta(l - |x|)(\alpha_m y_0(x) - \beta_m p_0(x))$$

Решение уравнения (4.2), обращающееся в нуль вместе со своей производной на $-\infty$, имеет вид

(4.3) $$B_m(x) = B_m^+(x) = \sqrt{\lambda_m} \int_{-\infty}^{x} f_m(\xi) \sin\sqrt{\lambda_m}(x - \xi)\, d\xi, \quad \lambda_m > 0$$

---

[1] См. также *Городцов В. А., Теодорович Э. В.* Черенковское излучение внутренних волн равномерно движущимися источниками.— Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1981, № 183. с. 65.

$$B_m(x) = B_m^-(x) = \frac{\sqrt{|\lambda_m|}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(\xi)$$

$$\exp\left(-\sqrt{|\lambda_m|}\,|x-\xi|\right) d\xi, \quad \lambda_m < 0$$

Тогда, используя утверждение теоремы 1, решение интегродифференциального уравнения запишем в виде

$$w(x, \eta) = \sum_{m=1}^{N} B_m^+(x) z_m(\eta, \nu) + \sum_{m=N+1}^{\infty} B_m^-(x) z_m(\eta, \nu) \tag{4.4}$$

Из формул (4.3) и (4.4) следует, что впереди обтекаемого тела течение слабо возмущено, а волны развиваются вниз по потоку сразу при встрече с телом.

Для исследования течения за телом выпишем формулы (4.3) и (4.4) при $x > l$

$$w(x, \eta) = \sum_{m=1}^{N} (M_m \sin\sqrt{\lambda_m}\, x + L_m \cos\sqrt{\lambda_m}\, x)\sqrt{\lambda_m}\, z_m(\eta, \nu) - \tag{4.5}$$

$$-\frac{1}{2} F(x, \eta, \nu)$$

$$F(x, \eta, \nu) = \sum_{m=N+1}^{\infty} \sqrt{|\lambda_m|}\, z_m(\eta, \nu) \int_{-l}^{l} f_m(\xi) \exp\left(-\sqrt{|\lambda_m|}\,(x-\xi)\right) d\xi$$

$$M_m = \int_{-l}^{l} f_m(\xi) \cos\sqrt{\lambda_m}\,\xi\, d\xi, \quad L_m = -\int_{-l}^{l} f_m(\xi) \sin\sqrt{\lambda_m}\,\xi\, d\xi \tag{4.6}$$

Теорема 2. Если функции $y_0(x)$ и $p_0(x)$ непрерывны на отрезке $[-l, l]$, то для функции $F(x, \eta, \nu)$ справедлива равномерная по x и η оценка при $x > + 2/\sqrt{|\lambda_{N+1}|}$

$$|F(x, \eta, \nu)| \leqslant C(\nu) \exp\left(-\sqrt{|\lambda_{N+1}|}\,(x - l)\right) \tag{4.7}$$

Доказательство. Из неравенства Бесселя следует, что

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{z_m^2(\eta, \nu)}{\lambda_m^2} \leqslant \int_0^1 a^2(\xi)\, \Gamma^2(\eta, \xi, \nu)\, d\xi \leqslant C_1(\nu) \tag{4.8}$$

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} (\alpha_m^2 + \beta_m^2) \leqslant \int_0^1 a^2(\xi)\,(\chi_1^2(\xi, \nu) + \chi_2^2(\xi, \nu))\, d\xi = C_2(\nu)$$

$$C_1(\nu) = \max_{0 \leqslant \eta \leqslant 1} \int_0^1 a^2(\xi)\, \Gamma^2(\eta, \xi, \nu)\, d\xi$$

Так как $|x \exp(-2\sqrt{x})| < 1$ при $x > 0$, то

$$|\lambda_m| \exp\left(-2\sqrt{\left|\frac{\lambda_m}{\lambda_{N+1}}\right|}\right) < |\lambda_{N+1}| \tag{4.9}$$

Пусть далее

$$|y_0(x)| \leqslant K, \quad |p_0(x)| \leqslant K, \quad x > l + 2/\sqrt{|\lambda_{N+1}|} \tag{4.10}$$

где K — некоторая положительная постоянная. Тогда, используя неравенства (4.8) — (4.10), из (4.5) получаем

$$|F(x, \eta, \nu)| \leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} 2K(|\alpha_m| + |\beta_m|)\,|z_m(\eta, \nu)| \exp\left(-\sqrt{|\lambda_m|}\,(x - l)\right) \leqslant$$

$$\leqslant K |\lambda_{N+1}| \exp\left(-\sqrt{|\lambda_{N+1}|}\,(x - l) + 2\right) \sum_{m=N+1}^{\infty} (\alpha_m^2 + \beta_m^2 +$$

$$+ 2\frac{z_m^2(\eta, \nu)}{\lambda_m^2}\Bigg) \leqslant C(\nu)\exp(-\sqrt{|\lambda_{N+1}|}(x-l))$$

$$C(\nu) = Ke^2(2C_1(\nu) + C_2(\nu))\,|\lambda_{N+1}|$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Оценка типа (4.7) справедлива для любой производной функции $F(x, \eta, \nu)$ по x и η при $x \geqslant x_0 > l$.

Доказательство аналогично.

Число x_0 зависит от порядка производной функции $F(x, \eta, \nu)$. Таким образом, с увеличением x решение $w(x, \eta)$ становится все более гладким, а особенности, вносимые в поток из-за малой гладкости границы тела, сглаживаются при $x \to +\infty$.

Из формул (2.1), (4.5) и теоремы 2 следует равномерная по x и η асимптотика для функции $y(x, \eta)$ при $x > l + 2/\sqrt{|\lambda_{N+1}|}$

$$y(x, \eta) = \eta + \sum_{m=1}^{N}(M_m \sin\sqrt{\lambda_m}\,x + L_m\cos\sqrt{\lambda_m}\,x)\sqrt{\lambda_m}\,z_m(\eta, \nu) + O(\exp(-\sqrt{|\lambda_{N+1}|}(x-l)) \tag{4.11}$$

(числа M_m и L_m определены формулами (4.6)).

5. Асимптотика решения вблизи критических значений параметра ν. В работе [3] критические значения параметра $\nu = \nu_l$, $l = 1, 2, \ldots$ были определены как характеристические числа уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$W(\eta) = \nu\int_0^1 G(\eta, \xi)W(\xi)\,d\mu(\xi) \tag{5.1}$$

Критическим значениям ν_l соответствуют критические скорости распространения длинноволновых мод, а соответствующие собственные функции $\varphi_l(\eta)$ уравнения (5.1) определяют амплитуды этих мод. Была также установлена асимптотика при $\nu \to \nu_l + 0$, в этом случае в (4.11) l-е слагаемое является главным и справедливы формулы

$$z_l(\eta, \nu) = \frac{\varphi_l(\eta)}{\sqrt{A_{ll}}} + O(\nu - \nu_l), \quad \lambda_l = \frac{\nu - \nu_l}{A_{ll}} + o(\nu - \nu_l) \tag{5.2}$$

$$\Gamma(\eta, \xi, \nu) = \frac{\varphi_l(\xi)\varphi_l(\eta)}{\nu - \nu_l} + O(1), \quad A_{ll} = \int_0^1 a^2(\eta)\varphi_l^2(\eta)\,d\eta$$

Подставляя формулы (5.2) в (4.1) и оставляя лишь главные члены асимптотик при $\nu \to \nu_l + 0$, получим

$$\alpha_l = -\frac{\nu_l}{\lambda_l\sqrt{A_{ll}}}\int_{\eta_0}^1 \varphi_l(\eta)\,d\mu(\eta), \quad \beta_l = -\frac{1}{\lambda_l\sqrt{A_{ll}}}\varphi_l(\eta_0) \tag{5.3}$$

Если через S обозначить величину площади, занимаемую телом в потоке жидкости, а через Q подъемную силу, возникающую за счет циркуляции скорости, то, используя формулы (1.6) и (1.7), получим

$$S = \int_{-l}^{l} y_0(x)\,dx = \int_{-l}^{l}(y_+(x) - y_-(x))\,dx \tag{5.4}$$

$$Q = \int_{-l}^{l} p_0(x)\,dx = -\int_{-l}^{l}[p_*]_0(x)\,dx = \int_{\partial T} p_*(s)\cos(\tau_0, x)\,ds =$$

$$= -\int_{\partial T} p_*(s)\cos(\mathbf{n}_0, y)\,ds$$

где τ_0 и $\mathbf{n}_0$ — единичные векторы касательной и нормали к границе тела ∂T.

Тогда из формул (4.2), (4.6) и (5.4) находим

$$M_l = \alpha_l S - \beta_l Q, \quad L_l = O(\lambda_l) \tag{5.5}$$

Формула (4.11) заметно упрощается и, используя (5.2), (5.3) и (5.5), можно получить приближенное выражение

$$y(x, \eta) \approx \eta + \frac{aS - bQ}{\sqrt{\lambda_l}\, A_{ll}} \sin \sqrt{\lambda_l}\, x \varphi_l(\eta) \tag{5.6}$$

$$a = -\nu_l \int_{\eta_0}^{1} \varphi_l(\eta)\, d\mu(\eta), \quad b = -\varphi_l(\eta_0)$$

Оценка в формуле (5.6) при $\nu \to \nu_l + 0$ есть величина порядка

$$O(\exp(-\sqrt{|\lambda_{N+1}|}\,(x - l))) + o(\sqrt{(S^2 + Q^2)/\lambda_l})$$

Ряд в формуле (4.4) сходится при $|x| < l$ в смысле среднего квадратичного. Если воспользоваться асимптотикой характеристических чисел λ_m и собственных функций $z_m(\eta, \nu)$ при $m \to +\infty$, то стандартная техника математической физики позволяет выделить особенности на границе тела и улучшить сходимость ряда. Более детальное исследование ближнего поля позволило бы определить искажения, вносимые в форму тела гипотезой о возможности аппроксимации поля скоростей на границе тела полем скоростей при обтекании потоком невесомой жидкости. В данной работе этот вопрос не исследовался. Заметим только, что в рассматриваемой постановке линия тока, соответствующая телу, остается замкнутой, а ограничиваемая ею площадь равна площади тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miles J. W.* Internal waves generated by a horizontally moving sourse.— Geophys. Fluid Dyn., 1971, v. 1, No. 1, p. 63—87.
2. *Лайтхил Д.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
3. *Бежанов К. А., Тер-Крикоров А. М.* Многослойные установившиеся течения идеальной несжимаемой жидкости над неровным дном.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 5, с. 750—760.
4. *Тер-Крикоров А. М.* К теории волн установившегося типа в неоднородной жидкости.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 440—452.
5. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
6. *Доценко С. Ф.* О структуре волнового движения в потоке при произвольном изменении плотности по глубине.— Морские гидрофиз. исслед., 1973, № 3, с. 32—41.
7. *Yih C.-S.* Exact solutions for steady two-dimensional flow of a stratified fluid.— J. Fluid Mech., 1960, v. 9, No. 2, p. 161—174.

Москва

Поступила в редакцию
24.V.1984