Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 3, 1985

УДК 531.31

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРИВОДЯЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЧАПЛЫГИНА

Илиев Ил.

Рассматривается задача существования приводящего множителя Чаплыгина (ПМЧ) для неголономных систем с k степенями свободы. Получены инвариантные условия применимости данного метода. Путем введения дополнительных координат выделен класс неголономных систем, для которых применим метод ПМЧ в расширенном конфигурационном пространстве. Для сравнения даются соответствующие условия в квазикоординатах. Изучается вопрос о существовании ПМЧ для одной из эквивалентных неголономных систем.

1. Постановка задачи. С. А. Чаплыгин сформулировал [1] условия, при которых неголономные системы с двумя степенями свободы допускают приводящий множитель. При помощи уравнений в допустимых векторах идеи Чаплыгина были распространены [2] на системы с k степенями свободы. Данная работа продолжает исследования, начатые в [2].

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем уравнения из [2]. Для краткости предположим, что индексы λ, μ, ν, $\varkappa$, ρ, ... принимают значения от 1 до n; a, b, c, d — от 1 до k и p, q, r, ... — от $k+1$ до n.

При помощи преобразования

$$d\tau = N(q^a)\,dt \tag{1.1}$$

уравнения движения неголономной системы в допустимых векторах

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s^{\cdot a}}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial q^{\varkappa}}\alpha_a{}^{\varkappa} - \Delta_{a,\,bc}s^{\cdot b}s^{\cdot c} = \frac{\partial U}{\partial q^{\varkappa}}\alpha_a{}^{\varkappa} \tag{1.2}$$

преобразуются к виду

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial(\theta)}{\partial s'^{a}}\right) - \frac{\partial(\theta)}{\partial q^{\varkappa}}\alpha_a{}^{\varkappa} = \frac{\partial U}{\partial q^{\varkappa}}\alpha_a{}^{\varkappa} \tag{1.3}$$

$$(2\theta = G_{ab}s^{\cdot a}s^{\cdot b} = N^2G_{ab}s'^{a}s'^{b} = 2(\theta),\ G_{ab} = g_{\lambda\mu}\alpha_a{}^{\lambda}\alpha_b{}^{\mu})$$

Коэффициенты $g_{\lambda\mu}$ определяются из выражения для кинетической энергии $T = {}^1/_2 g_{\lambda\mu}q^{\cdot\lambda}q^{\cdot\mu}$, а силовая функция обозначена через $U(q^a)$.

2. Метод ПМЧ для неголономной системы с k степенями свободы. Допустимые векторы имеют вид

$$\begin{array}{ll} & \alpha_1\,(1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \omega_1{}^{k+1},\ \ldots,\ \omega_1{}^n) \\ (2.1) & \alpha_2\,(0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ \omega_2{}^{k+1},\ \ldots,\ \omega_2{}^n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \alpha_k\,(0,\ 0,\ \ldots,\ 1,\ \omega_k{}^{k+1},\ \ldots,\ \omega_k{}^n) \end{array}$$

где $\omega_a{}^p\,(q^b)$ определяются из уравнения связей

$$q^{\cdot p} = \omega_a{}^p q^{\cdot a} \tag{2.2}$$

При учете сделанных предположений уравнения (1.3) можно представить в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial(\theta)}{\partial q^{a\prime}} - \frac{\partial(\theta)}{\partial q^a} = \frac{\partial u}{\partial q^a} \tag{2.3}$$

Условия существования ПМЧ для системы с k степенями свободы следующие:

(2.4)
$$\Pi_{a,\,bc}=\frac{\partial \ln N}{\partial q^{\varkappa}}\,\alpha_c{}^{\varkappa}G_{ab}+\frac{\partial \ln N}{\partial q^{\varkappa}}\,\alpha_b{}^{\varkappa}G_{ac}-2\frac{\partial \ln N}{\partial q^{\varkappa}}\,\alpha_a{}^{\varkappa}G_{bc}-\Omega_{a,\,bc}=0$$
$$\Omega_{a,\,bc}=\Gamma_{c,\,ab}-\Gamma_{c,\,ba}+\Gamma_{b,\,ac}-\Gamma_{b,\,ca}$$
$$\Gamma_{a,\,cb}=\Gamma_{\varkappa,\,\mu\nu}\alpha_a{}^{\varkappa}\alpha_b{}^{\mu}\alpha_c{}^{\nu}+g_{\lambda\mu}\alpha_a{}^{\lambda}\frac{\partial \alpha_b{}^{\mu}}{\partial q^{\nu}}\,\alpha_c{}^{\nu}$$

Как следствие из них получаются следующие уравнения:

(2.5)
$$(1-k)\frac{\partial \ln N}{\partial q^{\varkappa}}\,\alpha_a{}^{\varkappa}=\frac{1}{2}\,\Omega_a;$$
$$\Omega_a=\Omega_{a,\,bc}G^{bc}$$

При $k=2$ число уравнений (2.4) и (2.5) одно и то же и равно двум (этот случай был рассмотрен Чаплыгиным).

Теорема 1. Объекты $\Pi_{a,\,bc}$ при замене переменных $q^{b'}=q^{b'}(q^a)$, $\det\|A_a{}^{b'}\|\neq 0$ преобразуются по закону
$$\Pi_{a',\,b'c'}=\Pi_{a,\,bc}A_{a'}{}^{a}A_{b'}{}^{b}C_{c'}{}^{c}$$
$$(A_{a'}{}^{a}=\partial q^a/\partial q^{a'},\ A_b{}^{b'}=\partial q^{b'}/\partial q^b)$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что
$$\frac{\partial \ln N}{\partial q^{\varkappa'}}\,\alpha_{a'}^{\varkappa'}=\frac{\partial \ln N}{\partial q^{\varkappa}}\,\alpha_a{}^{\varkappa}A_{a'}^{a},$$
$$G_{a'b'}=G_{ab}A_{a'}^{a}A_{b'}^{b},\qquad \Omega_{a',\,b'c'}=\Omega_{a,\,bc}A_{a'}^{a}A_{b'}^{b}A_{c'}{}^{c}$$
откуда следует и утверждение, сформулированное в теореме.

Следствие. Если система с k степенями свободы допускает ПМЧ, т. е. удовлетворяются условия $\Pi_{a,\,bc}=0$, то после замены переменных получим $\Pi_{a',\,b',\,c'}=0$, и следовательно, та же система в новых переменных имеет ПМЧ $N(q^{a'})$.

Обозначим $\Lambda_{cb}{}^{a}=\Gamma_{bc}{}^{a}$. Из формул преобразований $\Lambda_{cb}{}^{a}$ при указанной выше замене переменных получаем
$$\Lambda_{c'b'}^{a'}=\Lambda_{cb}^{a}A_a^{a'}A_{b'}^{b}A_{c'}{}^{c}+A_b^{a'}\,\frac{\partial A_{b'}^{b}}{\partial q^{c'}}$$

Из этого следует, что $\Lambda_{cb}{}^{a}$ определяют аффинную связность [3] в пространстве с кручением $S_{cb}{}^{a}={}^1/_2\,(\Lambda_{cb}{}^{a}-\Lambda_{bc}{}^{a})$. Используя результаты [3] и формулы
$$\nabla_a G_{bc}=\Omega_{a,\,bc}=\frac{\partial G_{bc}}{\partial q^a}-\Lambda_{ab}^{e}G_{ec}-\Lambda_{ac}^{e}G_{be},\qquad \frac{\partial G_{bc}}{\partial q^a}=\Gamma_{b,\,ac}+\Gamma_{c,\,ab}$$
уравнения (2.4) и (2.5) запишем следующим образом:

(2.6) $\nabla_a G_{bc}=\nabla_c\ln NG_{ab}+\nabla_b\ln NG_{ac}-2\nabla_a\ln NG_{bc}$

(2.7) $(1-k)\,\nabla_a\ln N={}^1/_2\Omega_a$

Дифференцируя (2.6) и альтернируя по индексам d и a, после соответствующих преобразований имеем
$$\nabla_d\nabla_a G_{bc}-\nabla_a\nabla_d G_{bc}=\Phi$$
$$\Phi_{dabc}=\nabla_d\nabla_c\ln NG_{ab}+\nabla_d\nabla_b\ln NG_{ac}-2\nabla_d\nabla_a\ln NG_{bc}-$$
$$-\nabla_a\nabla_c\ln NG_{db}-\nabla_a\nabla_b\ln NG_{dc}+2\nabla_a\nabla_d\ln NG_{bc}+$$
$$+\nabla_c\ln N\nabla_a\ln NG_{db}+\nabla_b\ln N\nabla_a\ln NG_{dc}-\nabla_c\ln N\nabla_d\ln NG_{ab}-$$
$$-\nabla_b\ln N\nabla_d\ln NG_{ac}$$

Из последних формул следует [3]

$$-R^e_{dab}G_{ec} - R^e_{dac}G_{be} - 2S^e_{da}\nabla_e G_{bc} = \Phi_{dabc}$$

После свертки обеих частей этих равенств с G^{bc} получаем

$$-2R^b_{dab} = 2(1-k)(\nabla_d\nabla_a \ln N - \nabla_a\nabla_d \ln N) + 2S^e_{da}\Omega_e \tag{2.8}$$

Дифференцируя (2.7) и альтернируя, находим

$$2(1-k)(\nabla_d\nabla_a \ln N - \nabla_a\nabla_d \ln N) = \nabla_d\Omega_a - \nabla_a\Omega_d$$

Условия интегрируемости системы (2.7) можно записать еще так:

$$-2S^e_{da}\Omega_e = \nabla_d\Omega_a - \nabla_a\Omega_d$$

Подставляя в (2.8), имеем

$$R^b_{dab} = 0 \tag{2.9}$$

Условия (2.9) выполняются тогда и только тогда, когда система (2.7) интегрируема. Значения тензора Римана — Кристоффеля вычисляются по формуле

$$R^d_{abc} = \frac{\partial\Lambda^d_{bc}}{\partial q^a} - \frac{\partial\Lambda^d_{ac}}{\partial q^b} + \Lambda^d_{ae}\Lambda^e_{bc} - \Lambda^d_{be}\Lambda^e_{ac} \tag{2.10}$$

Таким образом доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. Необходимыми и достаточными инвариантными условиями существования ПМЧ при $k = 2$ являются условия (2.9).

В случае $k > 2$ условия (2.9) будут только необходимыми.

Теорема 3. Необходимыми и достаточными условиями существования ПМЧ в случае $k > 2$ являются одновременное выполнение условий (2.9) и следующих соотношений [2]:

$$2(1-k)\,\Omega_{a,\,bc} = \Omega_c G_{ab} + \Omega_b G_{ac} - 2\Omega_a G_{bc} \tag{2.11}$$

где Ω_a — градиентный вектор, определяемый из (2.7). Существование последнего обеспечено выполнением условий (2.9).

Заменим систему допустимых векторов $\alpha_a{}^\varkappa$ системой $\beta_{a'}{}^\varkappa = \gamma_{a'}{}^a\alpha_a{}^\varkappa$ при $\det\|\gamma_{a'}{}^a\| \neq 0$. Используя результаты [2], после соответствующих преобразований получаем

$$\Pi_{a',\,b'c'} = \Pi_{a,\,bc}\gamma^a_{a'}\gamma^b_{b'}\gamma_{c'}{}^c + \chi_{a',\,b'c'} \tag{2.12}$$

$$\chi_{a',\,b'c'} = G_{bc}\gamma_{c'}{}^c\left[\frac{\partial\gamma^b_{b'}}{\partial q^\varkappa}\alpha_a{}^\varkappa\gamma^a_{a'} - \frac{\partial\gamma^b_{a'}}{\partial q^\varkappa}\alpha_a{}^\varkappa\gamma^a_{b'}\right] +$$

$$+ G_{bc}\gamma^c_{b'}\left[\frac{\partial\gamma^b_{c'}}{\partial q^\varkappa}\alpha_a{}^\varkappa\gamma^a_{a'} - \frac{\partial\gamma^b_{a'}}{\partial q^\varkappa}\alpha_a{}^\varkappa\gamma_{c'}{}^a\right]$$

Предполагая, что система имеет ПМЧ, т. е. $\Pi_{a,\,bc} = 0$, находим

$$\Pi_{a',\,b'c'} = \chi_{a',\,b'c'} \tag{2.13}$$

Условия (2.13) называются условиями существования ПМЧ в квазикоординатах [4, 5]. Установлено [5], что выведенные в [4] при $k = 2$ условия в квазикоординатах некорректны. Корректные условия получены в [5] и совпадают с (2.13).

Из (2.12) видно, что существуют случаи, когда $\Pi_{a',b'c'} = 0$, хотя и $\Pi_{a,bc} \neq 0$. После замены $\beta_{a'}{}^\varkappa = \gamma_{a'}{}^a\alpha_a{}^\varkappa$ допустимые векторы $\beta_{a'}{}^\varkappa$ не имеют вид (2.1).

Пример. Рассмотрим динамическую неголономную систему с тремя степенями свободы, удвоенная кинетическая энергия которой и уравнения связей имеют вид

$$2T = (\dot q^1)^2 + (\dot q^2)^2 + (\dot q^3)^2 + (\dot q^4)^2 + (\dot q^5)^2$$

$$\dot q^4 = \dot q^2 \operatorname{tg} q^1, \quad \dot q^5 = \dot q^3 \operatorname{tg} q^1$$

Внешних активных сил нет.

Подставив выражение для $q^{\cdot 4}$, $q^{\cdot 5}$ в $2T$, получим

$$2\theta = (q^{\cdot 1})^2 + [(q^{\cdot 2})^2 + (q^{\cdot 3})^2]/\cos^2 q^1$$

Можно убедиться, что

$$\Omega_{1,22} = \Omega_{1,33} = 2\sin q^1/\cos^3 q^1, \quad \Omega_{2,12} = \Omega_{3,13} = -\sin q^1/\cos^3 q^1$$

остальные величины $\Omega_{a,bc}$ равны нулю. Из уравнений (2.5) находим $\Omega_1 = 4tg\, q^1$, $\Omega_2 = \Omega_3 = 0$, $N = \cos q^1$. Условия (2.11) удовлетворяются, следовательно, функция $N = \cos q^1$ — приводящий множитель системы.

3. Метод ПМЧ в расширенном конфигурационном пространстве. Пусть после замены $\beta_{a'}{}^{\varkappa}$ имеют вид

(3.1)
$$\beta_{1'}(1, 0, \ldots, 0, \omega_{1'}^{l+1}, \omega_{1'}^{l+2}, \ldots, \omega_{1'}{}^{n}), \ldots, \beta_{l'}(0, 0, \ldots$$
$$\ldots, 1, \omega_{l'}^{l+1}, \omega_{l'}^{l+2}, \ldots, \omega_{l'}{}^{n}), \beta_{(l+1)'}(0, 0, \ldots, 0, \omega_{(l+1)'}^{l+1}, \omega_{(l+1)'}^{l+2}, \ldots$$
$$\ldots, \omega_{(l+1)'}^{n}), \ldots, \beta_{k'}(0, 0, \ldots, 0, \omega_{k'}^{l+1}, \omega_{k'}^{l+2}, \ldots, \omega_{k'}^{n})$$

Из последних выражений видно, что $q^1, q^2, \ldots, q^l$ $(0 \leqslant l < k)$ — координаты. Расширим конфигурационное пространство [6], вводя дополнительные координаты $\pi^{l+1}, \ldots, \pi^k$. Положим $q^{1'} = q^1, \ldots, q^{l'} = q^l$, $q^{(l+1)'} = \pi^{l+1}, \ldots, q^{k'} = \pi^k$, $q^{(k+1)'} = q^{l+1}, \ldots, q^{(n-l+k)'} = q^n$. Обозначим $2T' = g_{i'j'}q^{\cdot i'}q^{\cdot j'}$ $(i', j' = 1, 2, \ldots, n - l + k)$. До сих пор предполагалось что $g_{\lambda\mu}$, $\omega_a{}^p$ и U — функции координат $q^1, q^2, \ldots, q^k$. Здесь и в дальнейшем потребуем, чтобы они зависели только от $q^1, q^2, \ldots, q^l$. При записи допустимых векторов

(3.2)
$$\alpha_{1'}(1, 0, \ldots, 0, \omega_{1'}^{l+1}, \ldots, \omega_{1'}{}^{n}), \alpha_{2'}(0, 1, \ldots, 0, \omega_{2'}^{l+1}, \ldots$$
$$\ldots, \omega_{2'}{}^{n}), \ldots, \alpha_{k'}(0, 0, \ldots, 1, \omega_{k'}^{l+1}, \ldots, \omega_{k'}{}^{n})$$

переменным $\pi^{l+1}, \ldots, \pi^k$ отвечают координаты, занимающие места с $l + 1$ до k. В расширенном $(n - l + k)$-мерном пространстве допустимые векторы (3.2) уже имеют вид (2.1).

Уравнения движения неголономной системы в этом пространстве следующие [7]:

(3.3)
$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial q^{\cdot j'}} - \frac{\partial L'}{\partial q^{j'}}\right)\alpha_{a'}^{j'} = 0, \quad L' = T' + U$$

(3.4)
$$q^{\cdot j'} = \alpha_{a'}^{j'} q^{\cdot a'}$$

Если $\omega_{\varkappa}{}^p q^{\cdot\varkappa} = 0$ — уравнение какой-нибудь неголономной связи исходной системы (1.2), то $\omega_{\varkappa}{}^p \alpha_a{}^{\varkappa} = 0$ и $\omega_{\varkappa}{}^p \beta_{a'}{}^{\varkappa} = 0$. Как видно из (3.3), все слагаемые, для которых $j' = l + 1, \ldots, k$, тождественно равны нулю. Отсюда

(3.5)
$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q^{\cdot\varkappa}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\varkappa}}\right)\beta_{a'}^{\varkappa} = 0, \quad L = T + U$$

Если из (3.4) возьмем все уравнения, кроме уравнений с номерами $j' = l + 1, \ldots, k$, то получим

(3.6)
$$q^{\cdot\varkappa} = \beta_{a'}^{\varkappa} q^{\cdot a'} = \gamma_{a'}^{a} \alpha_a{}^{\varkappa} q^{\cdot a'}$$

Свертывая обе стороны по $\omega_{\varkappa}{}^p$, получаем

(3.7)
$$\omega_{\varkappa}{}^p q^{\cdot\varkappa} = 0$$

Видно, что уравнения (3.3), (3.4) эквивалентны (3.5), (3.7) и еще $k - l$ уравнениям, линейным относительно производных от координат.

Последние уравнения задают $k - l$ дополнительных неголономных связей

(3.8) $$\Omega_{i'}{}^{\varepsilon} q^{\cdot i'} = 0, \quad \varepsilon = n + 1, \ldots, n + k - l$$

Уравнения (3.5), (3.7) определяют движения выходной системы (1.2). Условия существования ПМЧ для уравнения (3.3), (3.4)

(3.9) $$\frac{\partial \ln N}{\partial q^{j'}} \alpha_{c'}{}^{j'} G_{a'b'} + \frac{\partial \ln N}{\partial q^{j'}} \alpha_{b'}{}^{j'} G_{a'c'} - 2 \frac{\partial \ln N}{\partial q^{j'}} \alpha_{a'}^{j'} G_{b'c'} = \Omega_{a', b'c'}$$

можно получить, как и в [2], оперируя в расширенном конфигурационном пространстве. Отличие состоит в том, что $\operatorname{rank} \| g_{i'j'} \| = n$, так как элементы строк и столбцов этой матрицы, имеющие номера с $l + 1$ до k, равны нулю.

Задача нахождения приводящего множителя $N(q^1, \ldots, q^l, \pi^{l+1}, \ldots, \pi^k)$ эквивалентна задаче, рассмотренной в [2], с той разницей, что матрица $\| g_{i'j'} \|$ вырождается. Уравнения для нахождения ПМЧ

(3.10) $$(1 - k) \frac{\partial \ln N}{\partial q^m} = \frac{1}{2} \Omega_m, \quad m = 1, 2, \ldots, l$$

$$(1 - k) \frac{\partial \ln N}{\partial \pi^s} = \frac{1}{2} \Omega_s, \quad s = l + 1, \ldots, k$$

получаются из результатов работы [2]. Если можно проинтегрировать уравнения (3.10) и удовлетворить условиям (3.9), это обеспечит нахождения ПМЧ $N(q^1, \ldots, q^l, \pi^{l+1}, \ldots, \pi^k)$.

Имея в виду указанные предположения, уравнения (1.3) запишем в расширенном конфигурационном пространстве в виде

(3.11) $$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial (\theta')}{\partial \dot{q}^{m'}} \right) - \frac{\partial (\theta')}{\partial q^m} = \frac{\partial U}{\partial q^m}, \quad m = 1, 2, \ldots, l$$

(3.12) $$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial (\theta')}{\partial \pi^{s'}} \right) - \frac{\partial (\theta')}{\partial \pi^s} = 0, \quad s = l + 1, \ldots, k$$

$$2\theta' = G_{a'b'} s^{\cdot a'} s^{\cdot b'} = N^2 G_{a'b'} s'^{a'} s'^{b'} = 2(\theta')$$

$$s^{1'} = q^1, \ldots, s^{l'} = q^l; \quad s^{(l+1)'} = \pi^{l+1}, \ldots, s^{k'} = \pi^k$$

При получении уравнений (3.11), (3.12) пользуемся тем, что $g_{\lambda\mu}$, $\omega_a{}^p$ и U — функции только $q^1, q^2, \ldots, q^l$. Требования такого рода встречаются в [4]. Как отмечено в [5], они приводят к неправильным заключениям, так как автор [4] пользовался квазикоординатами. Если рассуждения ведутся в расширенном конфигурационном пространстве, то выделяется класс неголономных систем, для которых метод ПМЧ применим.

Рассматриваемую неголономную систему [8, 9] можно заменить эквивалентной невырожденной системой. Она будет иметь лагранжиан

(3.13) $$L^* = L + {}^1/_2 \delta_{\varepsilon\chi} \Omega_{i'}{}^{\varepsilon} \Omega_{j'}{}^{\chi} q^{\cdot i'} q^{\cdot j'}$$

где $\delta_{\varepsilon\chi}$ — символы Кронекера. Система подчинена неголономным связям (3.7) и (3.8). В таком случае, согласно результатам работ [8, 9], как уравнения движения в допустимых векторах, так и условия (3.9) не изменяются.

Теоремы 2 и 3 формулируются следующим образом.

Теорема 4. Необходимыми и достаточными инвариантными условиями существования ПМЧ в расширенном конфигурационном пространстве при $k = 2$ являются

(3.14) $$R^{b'}_{d'a'b'} = 0$$

Теорема 5. Необходимыми и достаточными условиями существования ПМЧ в расширенном конфигурационном пространстве в случае $k > 2$ являются соотношения (3.14) и (3.9).

В процессе образования тензора Римана — Кристоффеля необходимо использовать значения $\Gamma^{c'}_{a'b'}$, вычисленные в расширенном конфигурационном пространстве. Связь между $R^{d'}_{a'b'c'}$ и R^{d}_{abc} можно найти по формуле [7]

$$\Gamma^{a'}_{c'b'} = \Gamma^{a}_{cb}\gamma_{c'}{}^{c}\gamma^{b}_{b'}\gamma^{a'}_{a} + \gamma^{a'}_{b}\frac{\partial\gamma^{b}_{b'}}{\partial q^{\rho}}\alpha_{c}{}^{\rho}\gamma_{c'}{}^{c} \tag{3.15}$$

После вычислений имеем

$$R^{d'}_{a'b'c'} = R^{d}_{abc}\gamma^{a}_{a'}\gamma^{b}_{b'}\gamma_{c'}{}^{c}\gamma^{d'}_{d} + R^{*d'}_{a'b'c'} \tag{3.16}$$

Формулы (3.16) и (2.13) дают возможность сформулировать теоремы 2 и 3 в квазикоординатах.

Теорема 6. Необходимыми и достаточными условиями существования ПМЧ в квазикоординатах при $k = 2$ являются условия

$$R^{c'}_{a'b'c'} = R^{*c'}_{a'b'c'} \tag{3.17}$$

Теорема 7. Необходимыми и достаточными условиями существования ПМЧ в квазикоординатах в случае $k > 2$ являются условия (3.17) и (2.13)

В общем случае $R^{*c'}_{a'b'c'} \neq 0$. Это еще раз свидетельствует о том, что есть случаи, когда метод неприменим в исходном пространстве, но применим в расширенном конфигурационном пространстве.

4. Эквивалентные неголономные системы и задача о существовании ПМЧ. Приведение уравнений неголономной системы к уравнениям типа Лагранжа на основании условий Гельмгольца рассматривалось в работах [10, 11]. Приведение осуществлено непосредственно или после подходящего изменения правой части уравнений движения. Две неголономные системы названы [8, 9] эквивалентными, когда имеют одни и те же траектории на многообразии, определенном из уравнений связей. Это равносильно требованию, чтобы эти системы были подчинены одним и тем же связям и имели одни и те же уравнения движения, разрешенные относительно старших производных [7]

$$s^{\cdot\cdot a} + \Gamma^{a}_{bc}s^{\cdot b}s^{\cdot c} = F^{a}, \quad s^{\cdot\cdot a} + \Gamma^{*a}_{bc}s^{\cdot b}s^{\cdot c} = F^{*a}$$

где $q^{\cdot\varkappa} = \alpha^{\varkappa}\bar{s}^{a}$. Условия эквивалентности записываются следующим образом [8]:

$$\Gamma^{a}_{bc} + \Gamma^{a}_{cb} = \Gamma^{*a}_{bc} + \Gamma^{*a}_{cb}, \quad F^{a} = F^{*a} \tag{4.1}$$

Рассмотрим неголономную систему с функцией Лагранжа L. Обозначим через $L_l = L + L_1$ функцию Лагранжа эквивалентной неголономной системы, где

$$2L_1 = \theta_{bc}s^{\cdot b}s^{\cdot c} + \theta_{bp}s^{\cdot b}s^{\cdot p} + \theta_{pb}s^{\cdot b}s^{\cdot p} + 2V \tag{4.2}$$
$$s^{\cdot a} = \omega_{\varkappa}{}^{a}q^{\cdot\varkappa}, \quad s^{\cdot p} = \omega_{\varkappa}{}^{p}q^{\cdot\varkappa}, \quad \omega_{\lambda}{}^{a} = G^{ab}\alpha_{b}{}^{\varkappa}g_{\varkappa\lambda}$$

В системах Чаплыгина θ_{ab}, θ_{pb} и V — функции только от q^{a}. Видоизмененные [9] условия эквивалентности (4.1) записываются так:

$$2\nabla_{c}\theta_{ab} = 4S^{e}_{bc}\theta_{ea} + 4S^{e}_{ac}\theta_{eb} + M^{r}_{ca}\theta_{br} + M^{r}_{cb}\theta_{ar} \tag{4.3}$$
$$G^{ec}\theta_{ae}\frac{\partial U}{\partial q^{\varkappa}}\alpha_{c}{}^{\varkappa} = \frac{\partial V}{\partial q^{\varkappa}}\alpha_{a}{}^{\varkappa}$$
$$\left(M^{r}_{ca} = \left(\frac{\partial\omega_{\varkappa}{}^{r}}{\partial q^{\rho}} - \frac{\partial\omega_{\rho}{}^{r}}{\partial q^{\varkappa}}\right)\alpha_{c}{}^{\varkappa}\alpha_{a}{}^{\rho}\right)$$

Функции] N и G_{ab} в эквивалентной системе соответствуют N^* и $G_{ab}{}^* = G_{ab} + \theta_{ab}$. Условия существования ПМЧ для эквивалентной системы имеют вид

$$\nabla_c \ln N^* G^*_{ab} + \nabla_b \ln N^* G^*_{ac} - 2\nabla_a \ln N^* G^*_{bc} = \\ = 2\nabla_a G^*_{bc} + 2S^e_{ab} G^*_{ec} + 2S^e_{ac} G^*_{eb} \tag{4.4}$$

Подставив выражение (2.10) в (2.9), получим

$$R^c_{abc} = \partial \Gamma^c_{cb}/\partial q^a - \partial \Gamma^c_{ca}/\partial q^b = 0 \tag{4.5}$$

С другой стороны

$$2\,\frac{\partial \Gamma^c_{bc}}{\partial q^a} = \frac{\partial}{\partial q^a}\left[\frac{\partial G_{de}}{\partial q^b} G^{de}\right] = \frac{\partial}{\partial q^a}\left[\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial G_{de}}\frac{\partial G_{de}}{\partial q_b}\right] = \frac{\partial^2 \ln D}{\partial q^a\,\partial q^b}$$

($D = \det \| G_{de} \|$). Следовательно, $\partial \Gamma_{bc}{}^c/\partial q^a - \partial \Gamma_{ac}{}^c/\partial q^b = 0$. Эту величину добавим к правой части равенства (4.4), тогда находим

$$R^c_{abc} = \partial(\Gamma^c_{cb} + \Gamma^c_{bc})/\partial q^a - \partial(\Gamma^c_{ca} + \Gamma^c_{ac})/\partial q^b = 0$$

Учитывая теперь первое соотношение (4.1), сформулируем следующую теорему.

Теорема 8. Необходимыми условиями существования ПМЧ для всего класса эквивалентных неголономных систем являются условия (2.9) или соответственно (3.14).

Теоремы 3, 5 и 7 дают достаточные условия существования приводящего множителя Чаплыгина для класса эквивалентных неголономных систем. Для нахождения необходимых и достаточных условий требуется рассмотреть вопрос о совместимости уравнений (4.3), (4.4). Рассмотрим решение этой задачи в случае $N^* = 1$. Тогда уравнение (4.4) имеет вид

$$\nabla_a \theta_{bc} = -\nabla_a G_{bc} + S^e_{ba}(G_{ec} + \theta_{ec}) + S^e_{ca}(G_{eb} + \theta_{eb}) \tag{4.6}$$

При помощи (4.6) исключаем $\nabla_c \theta_{ab}$ из первого уравнения (4.3). В результате получим

$$2\nabla_c G_{ab} + 2S^e_{bc}(\theta_{ea} - G_{ea}) + 2S^e_{ac}(\theta_{eb} - G_{eb}) + M^r_{ca}\theta_{br} + M^r_{cb}\theta_{ar} = 0 \tag{4.7}$$

Систему (4.6) можно решать отдельно. Из условия интегрируемости определяем величины θ_{ab}, которые удовлетворяют системе (4.6). Уравнения (4.7) и второе равенство (4.3), как и условия интегрируемости, линейны относительно θ_{ab} и θ_{bp}, и их совместное решение равносильно решению поставленной задачи. Было показано [11], что уравнения движения без скольжения шара по горизонтальной плоскости после подходящего изменения их правой части принимают форму уравнений Лагранжа для голономной системы. Из этого следует, что существует приводящий множитель $N^* = 1$ (существование этого примера отмечалось также Чаплыгиным [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе.— В кн.: *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.— Л.: Гостехиздат, 1949, с. 28—38.
2. *Илиев Ил.* Върху приводящия множител на С. А. Чаплигин.— Теор. и прил. механика, 1980, т. 10, № 1, с. 13—20.
3. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М.— Л.: Гостехиздат, 1950. 463 с.
4. *Фуфаев Н. А.* Уравнения Чаплыгина и теорема о приводящем множителе в случае квазикоординат.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 3, с. 385—390.

5. *Шалаев В. Г.* О теореме Чаплыгина в неголономных координатах.— Науч. тр. Ташкент. ун-та, 1964, вып. 242, с. 3—8.
6. *Шульгин М. Ф.* О динамических уравнениях Чаплыгина при существовании условных неинтегрируемых уравнений.— ПММ, 1954, т. 18, вып. 6, с. 749—752.
7. *Илиев Ил.* Друга форма на уравненията в допустими вектори.— Научни тр. на висш. пед. ин-та, 1970, т. 8, кн. 2. с. 23—27.
8. *Илиев Ил.* Еквивалентни нехолономни системи и някои техни свойства.— Науч. тр. на Пловдивски ун-т, 1975, т. 13, кн. 1, с. 359—367.
9. *Илиев Ил.* Други свойства на еквивалентните механични системи.— Науч. тр. на Пловдивски ун-т, 1975, т. 13, кн. 1, с. 369—380.
10. *Новоселов В. С.* Применение метода Гельмгольца к исследованию движения неголономных систем.— Вестн. ЛГУ, 1958, вып. 1, № 1, с. 80—87.
11. *Новоселов В. С.* Применение метода Гельмгольца к изучению движения систем Чаплыгина.— Вестн. ЛГУ, 1958, вып. 3, № 13, с. 102—111.

Болгария

Поступила в редакцию
18.V.1983