Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 3, 1985

УДК 531.36 : 534.1

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ДВУХМАСШТАБНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ К ОДНОЧАСТОТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Ажоткин В. Д., Бабич В. М.

Метод двухмасштабных разложений применяется к одночастотной системе. Методом последовательных приближений удается оправдать полученные разложения на асимптотически большом интервале времени.

1. Для построения при $\varepsilon \to 0$ решений системы

$$d\varphi/dt = \omega(I) + \varepsilon f(\varphi, I, \varepsilon), \quad \omega(I) > 0 \tag{1.1}$$
$$dI/dt = \varepsilon g(\varphi, I, \varepsilon); \; \omega, f, g \in C^\infty, \; 0 < \varepsilon \ll 1$$

многие авторы использовали метод двухмасштабных разложений и близкие приемы [1—5]. Ниже предлагается отличающееся от известных двухмасштабное разложение решений системы (1.1)

$$\varphi = t_1 + \varepsilon\varphi_1(t_1, \tau) + \varepsilon^2\varphi_2(t_1, \tau) + \ldots \tag{1.2}$$
$$I = I_0(\tau) + \varepsilon I_1(t_1, \tau) + \varepsilon^2 I_2(t_1, \tau) + \ldots$$
$$\left(t_1 = \frac{\varphi_{-1}(\tau)}{\varepsilon} + \varphi_0(\tau), \quad \tau = \varepsilon t\right)$$

Здесь t_1 — быстрое время, τ — медленное время, $\varphi_j\,(j \geqslant -1)$, $I_j\,(j \geqslant 0)$ — искомые функции, 2π-периодические по t_1 при $j \geqslant 1$. Предлагаемый путь прямой и не требует последовательных замен переменных. Это упрощает процесс построения асимптотики решения системы (1.1). Уравнения (1.1), так же как и уравнение для нахождения I_0 (см. ниже), нелинейны, и существование их решений можно гарантировать лишь на отрезке вида $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 < +\infty$, т. е. при $0 \leqslant t \leqslant \tau_0/\varepsilon$. Именно на таком отрезке при достаточно малых ε удается доказать существование решения задачи Коши для системы (1.1) и тот факт, что разложения (1.2) действительно дают асимптотику этих решений. Таким образом, там, где удается построить ряды (1.2), существует и истинное решение системы (1.1), а (1.2) дает асимптотику этого решения.

2. Построим ряды, асимптотически удовлетворяющие системе уравнений (1.1) и начальным условиям

$$\varphi|_{t=0} = a, \quad I|_{t=0} = b \tag{2.1}$$

Подставим (1.2) в (1.1) и приравняем члены старшего порядка в обеих частях этих равенств

$$\varphi_{-1}'(\tau) = \omega(I_0), \quad \dot{I_1}\varphi_{-1}' + I_0' = g(t_1, I_0, 0) \tag{2.2}$$

(штрих означает производную по τ, точка — по t_1). Усредняя по периоду 2π второе из уравнений (2.2), получим

$$I_0'(\tau) = \langle g(t_1, I_0, 0)\rangle \quad \left(\langle F\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t_1)\,dt_1\right) \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) есть уравнение метода усреднений [1, 6]. Из уравнения (2.3), первого из уравнений (2.2) и начальных условий (2.1) получаем

(2.4) $\varphi_{-1}(0) = 0, \quad \varphi_{-1}'(\tau) = \omega(I_0); \quad I_0(0) = b, \quad I_0'(\tau) = \langle g(t_1, I_0, 0)\rangle$

откуда на некотором отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 < +\infty$ однозначно определяются φ_{-1} и I_0.

Выпишем члены следующего приближения:

(2.5) $$\varphi_0'(\tau) + \varphi_1^{\cdot}\varphi_{-1}' = \omega(I_0) I_1 + f(t_1, I_0, 0); \quad \omega'(I_0) = \frac{d\omega(I_0)}{dI_0}$$
$$I_2^{\cdot}\varphi_{-1}' + I_1' = g^{\cdot}(t_1, I_0, 0)\varphi_1 + \frac{\partial g(t_1, I_0, 0)}{\partial I_0} I_1 + \frac{\partial g(t_1, I_0, 0)}{\partial \varepsilon}$$

Из уравнения (2.2) находим I_1 с точностью до слагаемого, зависящего только от τ

(2.6) $I_1 = I_1^0(t_1, \tau) + I_1^1(\tau)$

Первое слагаемое I_1^0, выбираем так, чтобы $\langle I_1^0\rangle = 0$. Уравнения (2.5) можно рассматривать как уравнения для нахождения φ_1 и I_2 в классе 2π-периодических по t_1 функций. Условием существования таких φ_1 и I_2 является равенство средних по периоду левых и правых частей в (2.5) (при этом $\langle \varphi_1^{\cdot}\rangle = 0$, $\langle I_2^{\cdot}\rangle = 0$)

(2.7) $$\varphi_0'(\tau) = \omega'(I_0) I_1^1(\tau) + \langle f\rangle, \quad I_1^1(\tau) = \langle g^{\cdot}\varphi_1\rangle + \left\langle \frac{\partial g}{\partial I_0} I_1\right\rangle + \left\langle \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}\right\rangle$$

Исключим функцию φ_1 из первого члена в правой части второго уравнения системы (2.7). Получим

(2.8) $$\langle g^{\cdot}\varphi_1\rangle = -\langle g\varphi_1^{\cdot}\rangle = -\Big\langle \frac{g(t_1, I_0, 0)}{\omega(I_0)}(\omega'(I_0) I_1^1 +$$
$$+ \omega'(I_0) I_1^0 + f(t_1, I_0, 0) - \varphi_0'(\tau))\Big\rangle =$$
$$= [\langle g\rangle\langle f\rangle - \langle gf\rangle - \omega'(I_0)\langle gI_1^0\rangle]/\omega(I_0)$$

При преобразованиях использованы уравнения (2.5) и (2.7). Из (2.6) и (2.8) следует, что второе из равенств (2.7) — линейное уравнение первого порядка относительно $I_1^1(\tau)$. Решив его, найдем $I_1^1(\tau)$ и $\varphi_0(\tau)$. Из (2.1) и (2.6) получаем

(2.9) $\varphi_0(0) = a, \quad I_1^1(0) = -I_1^0(a, 0)$

Начальные условия (2.9) и уравнения (2.7), (2.8) определяют φ_0 и I_1^1.

3. Пусть $\varphi_{-1}, \varphi_0, \ldots, \varphi_{j-1}, I_0, I_1, \ldots, I_j$ найдены и уравнение $d\varphi/dt = \omega(I) + \varepsilon f$ (соответственно $dI/dt = \varepsilon g$, см. (1.2)) удовлетворено с точностью до членов порядка ε^{j-1}. Начальные данные задачи Коши (2.1) выполняются для φ, I с точностью до членов порядка ε^{j-1} включительно. Обратимся теперь к членам следующего приближения:

(3.1) $\varphi_j^{\cdot}\omega(I_0) = A_j(t_1, \tau), \quad I_{j+1}^{\cdot}\omega(I_0) = g^{\cdot}\varphi_j + B_j(t_1, \tau)$

Здесь A_j и B_j — 2π-периодические функции t_1, зависящие от φ_{i-1}, I_i, $i \leqslant j$. Для существования периодического решения φ_j, I_{j+1} системы (3.1) необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства

(3.2) $\langle A_j\rangle = 0, \quad \langle -gA_j/\omega(I_0) + B_j\rangle = 0$

Выделим в функциях φ_j, I_{j+1} «быстрые» и «медленные», зависящие лишь от τ, части

(3.3) $$\varphi_j = \varphi_j^0(t_1, \tau) + \varphi_j^1(\tau); \quad \langle\varphi_j^0\rangle = 0$$
$$I_{j+1} = I_{j+1}^0(t_1, \tau) + I_{j+1}^1(\tau); \quad \langle I_{j+1}^0\rangle = 0$$

Интегрируя уравнения (3.1) по t_1 и учитывая равенства (3.3), получим

$$(3.4)\qquad \varphi_j^0(t_1,\tau)=c_j-\langle c_j\rangle,\qquad c_j=\int_0^{t_1}\frac{A_j}{\omega(I_0)}\,dt_1$$

$$I_{j+1}^0(t_1,\tau)=\frac{g-\langle g\rangle}{\omega(I_0)}\,\varphi_j^1+D_j-\langle D_j\rangle,\quad D_j=\int_0^{t_1}\frac{B_j+g^{\cdot}\varphi_j^0}{\omega(I_0)}\,dt_1$$

Функции $\varphi_j^1(\tau)$ и $I_{j+1}{}^1(\tau)$ будут найдены с использованием уравнений следующего приближения и начальных данных. Запишем эти уравнения

$$(3.5)\qquad \dot\varphi_{j+1}\omega(I_0)+\varphi_j'+\varphi_j^{\cdot}\varphi_0'=\omega(I_0)I_{j+1}+f^{\cdot}\varphi_j^1+E_{j+1}$$

$$\dot I_{j+1}\omega(I_0)+I_j^{\cdot}\varphi_0'+I_j'=g^{\cdot}\varphi_{j+1}+\frac{\partial g}{\partial I_0}I_{j+1}+$$

$$+\lambda_j g^{\cdot\cdot}\varphi_1\varphi_j+\frac{\partial g^{\cdot}}{\partial I_0}I_1\varphi_j^1+F_{j+1};\qquad \lambda_1=\frac{1}{2};\qquad \lambda_j=1\qquad (j>1)$$

Здесь E_{j+1}, F_{j+1} — известные функции t_1, τ, периодические по t_1. Усреднив равенства (3.5) по t_1, получим искомые уравнения

$$(3.6)\qquad \varphi_j^{1\prime}=\omega'(I_0)\,I_{j+1}{}^1(\tau)+\langle E_{j+1}\rangle$$

$$I_{j+1}'=\left\langle g^{\cdot\cdot}\varphi_1^0+\frac{\partial g^{\cdot}}{\partial I_0}I_1^0\right\rangle\varphi_j^1+\left\langle\frac{\partial g}{\partial I_0}\right\rangle I_{j+1}^1+\langle c_{j+1}\rangle$$

Здесь c_{j+1} — известная функция. Коэффициент при φ_j^1 преобразуется:

$$-\frac{1}{\omega(I_0)}\langle g^{\cdot}f\rangle+\frac{\omega(I_0)}{2}\,\frac{\partial}{\partial I_0}\left(\frac{\langle g\rangle^2-\langle g^2\rangle}{\omega^2(I_0)}\right)$$

Потребуем теперь, чтобы начальные данные выполнялись для φ (1) с точностью до членов порядка ε^j (ε^{j+1})

$$(3.7)\qquad \varphi_j^1(0)+\varphi_j^0(a,\ 0)=0,\quad I_{j+1}{}^1(0)+I_{j+1}{}^0(a,\ 0)=0$$

Формулы (3.7) определяют начальные данные для системы (3.6). Из уравнений (3.6) однозначно найдутся φ_j^1 и $I_{j+1}{}^1$. Уравнения (3.5) теперь принимают вид (3.1) с заменой j на $j+1$, причем условия (3.2) (с заменой j на $j+1$) тоже имеют место. Процесс построения I_{j+1}, φ_j можно продолжать.

Заметим, что медленная переменная I на каждом шаге определяется с точностью, на один порядок по ε большей, чем быстрая переменная φ. Такая ситуация характерна при применении метода возмущений в теории колебаний.

4. Теперь, когда двухмасштабные разложения задачи Коши (1.1) (2.1) построены, возникает проблема их обоснования, состоящая в доказательстве разрешимости задачи (1.1), (2.1) на асимптотически большом интервале времени и оценке остаточных членов. Для получения этих результатов удобен классический метод последовательных приближений (см. в этой связи работу [7]). В частности, в [7] обоснован (иначе, чем здесь) метод усреднения для уравнения (1.1). Другие подходы к обоснованию можно найти в [1, 6].

Перейдем к формулировке полученных результатов. Считаем, что f, g — 2π-периодические функции φ и

$$f,\ g,\ \omega\in C^\infty\ (-\infty<\varphi<+\infty,\ \ |I-b|\leqslant\alpha,\ \ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\beta,$$

$$I\,|_{t=0}=b,\ \ 0<\alpha=\text{const},\ \ 0<\beta-\text{const})$$

Пусть задача (2.3), (2.4) разрешима для $I_0(\tau)$ при $0\leqslant\tau\leqslant\tau_0<+\infty$, причем $|I_0(\tau)-b|<\alpha$, $0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$. В этих условиях все члены рядов (1.2) можно построить при $0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$.

Теорема. Существует ε_0, $0 < \varepsilon_0 \leqslant \beta$, такое, что при $0 \leqslant t \leqslant \tau_0/\varepsilon$ задача (1.1), (2.1) разрешима, причем для ее решения $|I(t) - b| < \alpha$.

Построенные выше ряды (1.2) дают асимптотику решения задачи Коши в следующем смысле: пусть φ и I — решение задачи Коши (1.1), (2.1). Введем остаточные члены R_φ и R_I равенствами

$$\varphi = t_1 + \sum_{j=1}^{r} \varepsilon^j \varphi_j + R_\varphi, \quad I = \sum_{j=0}^{r} \varepsilon^j I_j + R_I \tag{4.1}$$

При $0 \leqslant t \leqslant \tau_0/\varepsilon$ выполняются неравенства

$$|R_\varphi| \leqslant \text{const } \varepsilon^{r+1}; \ |R_I| \leqslant \text{const } \varepsilon^{r+1}, \ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \tag{4.2}$$

Оказывается, рассмотрение упрощается, если вместо R_φ и R_I ввести остаточные члены S_φ и S_I, так, что

$$\varphi = t_1 + \sum_{j=1}^{r+2} \varepsilon^j \varphi_j + S_\varphi, \quad I = \sum_{j=0}^{r+2} \varepsilon^j I_j + S_I \tag{4.3}$$

вывести для S_I и S_φ систему интегральных уравнений и доказать на интервале $0 \leqslant t \leqslant \tau_0/\varepsilon$ сравнительно слабую оценку

$$|S_\varphi| \leqslant \text{const } \varepsilon^{r+1}, \ |S_I| \leqslant \text{const } \varepsilon^{r+1} \tag{4.4}$$

В силу очевидных равенств

$$\varepsilon^{r+1}\varphi_{r+1} + \varepsilon^{r+2}\varphi_{r+2} + S_\varphi = R_\varphi, \quad \varepsilon^{r+1} I_{r+1} + \varepsilon^{r+2} I_{r+2} + S_I = R_I \tag{4.5}$$

оценки (4.4) достаточны для получения оценок (4.2). Из равенств (1.1) и (4.3) следует уравнение для S_φ и S_I

$$\frac{dS_\varphi}{dt} = -\frac{d}{dt}(t_1 + \ldots + \varepsilon^{r+2}\varphi_{r+2}) + \omega(I_0 + \ldots + S_I) + \\ + \varepsilon f(t_1 + \ldots + S_\varphi, I_0 + \ldots + S_I, \varepsilon) \tag{4.6}$$

$$\frac{dS_I}{dt} = -\frac{d}{dt}(I_0 + \ldots + \varepsilon^{r+2}\varphi_{r+2}) + \varepsilon g(t_1 + \ldots + S_\varphi, I_0 + \ldots + S_I, \varepsilon)$$

Начальные данные для S_φ и S_I нулевые

$$S_\varphi|_{t=0} = 0, \quad S_I|_{t=0} = 0 \tag{4.7}$$

так как суммы

$$t_1 + \sum_{j=1}^{r+2} \varepsilon^j \varphi_j, \quad \sum_{j=0}^{r+2} \varepsilon^j I_j$$

удовлетворяют начальным данным (2.1). В правых частях уравнений (4.6) выделим свободные члены Φ_0, Ψ_0, члены Φ_1, Ψ_1, линейные по S_φ и S_I (в разложении правых частей в ряд Маклорена по степеням S_φ и S_I), и остаточные члены Φ_2, Ψ_2, имеющие квадратичную оценку при малых S_φ и S_I. Учитывая сказанное и нулевые начальные данные (4.6) для S_φ и S_I, уравнения (4.7) заменим интегральными

$$S_\varphi = \int (\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2)\, dt', \quad S_I = \int (\Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2)\, dt'. \tag{4.8}$$

Здесь и далее интегрирование по t' ведется в пределах от $t' = 0$ до $t' = t$.

В предположении, что

$$0 \leqslant t \leqslant \tau_0/\varepsilon, \ |S_\varphi| \leqslant A_0, \ |S_I| \leqslant A_0, \ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \beta_1 \leqslant \beta \tag{4.9}$$

(числа A_0 и β_1 должны быть столь малыми, чтобы (см. (4.3)) не нарушалось неравенство $|I - b| < \alpha$), имеем

$$|\Phi_0| \leqslant A_1 \varepsilon^{r+3}, \ |\Phi_2| \leqslant A_1 (S_I^2 + S_\varphi^2) \tag{4.10}$$

$$|\Psi_0| \leqslant A_1\varepsilon^{r+3}, \quad |\Psi_2| \leqslant A_1\varepsilon(S_I^2 + S_\varphi^2), \quad A_1 = \mathrm{const} > 0$$
$$\Phi_1 = \omega' S_I + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial\varphi}S_\varphi + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial I}S_I, \quad \Psi_1 = \varepsilon\left(\frac{\partial g}{\partial\varphi}S_\varphi + \frac{\partial g}{\partial I}S_I\right)$$

Аргументами функций ω', f_φ', f_I', g_φ', g_I' служат

$$t_1 + \ldots + \varepsilon^{r+2}\varphi_{r+2}, \quad I_0 + \ldots + \varepsilon^{r+2}I_{r+2}, \varepsilon$$

Метод последовательных приближений будем применять не к системе (4.8), а к результату ее некоторого тождественного преобразования. Члены $\int\Phi_1 dt'$ и $\int\Psi_1 dt'$ недостаточно «слабы» для простого обоснования метода последовательных приближений. Попытаемся найти такое преобразование уравнений (4.8), которое уничтожит линейные члены. Преобразования начнем со второго уравнения (4.8). Главный член (из группы линейных членов), содержащих S_φ, таков:

$$\int\frac{\partial g(t_1, I_0, 0)}{\partial\varphi}S_\varphi dt' = \int\frac{\partial g(t_1, I_0, 0)}{\partial t'}\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^{-1}S_\varphi dt'$$

Применим к этому интегралу интегрирование по частям, освобождая от производной по t' функцию g. Заменим в линейных по S_φ членах, стоящих в правой части второго уравнения (4.8), функцию S_φ на ее выражение из первого уравнения (4.8).

Новое уравнение, имеющее S_I в качестве левой части, преобразуем следующим образом: считая в правой части все члены, кроме линейных, однородных, содержащих S_I, известными, решим это уравнение относительно S_I. Придем к уравнению для S_I, не содержащему в правой части линейных вольтерровых операторов по S_I. Полученное выражение для S_I подставим на соответствующее место в линейные по S_I члены первого уравнения (4.8). Линейные члены этого уравнения уже теперь не будут содержать S_I. Пришли к системе уравнений для S_φ и S_I, линейные однородные члены которых (в правых частях равенств) представляют собой вольтерровы операторы, имеющие вид

$$KF = \varepsilon\int K(t, t', \varepsilon)F(t')dt', \quad 0 \leqslant t' \leqslant t \leqslant \frac{\tau_0}{\varepsilon}$$

Ядра $K(t, t', \varepsilon)$ ограничены.

Решая последовательными приближениями эту систему, считая все члены справа, кроме линейных, однородных по S_φ и S_I, известными, придем к системе интегральных уравнений следующего вида:

$$S_\varphi = \int(\Phi_4 + \Phi_5)dt', \quad S_I = \int(\Psi_4 + \Psi_5)dt', \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\tau_0}{\varepsilon} \tag{4.11}$$

Здесь Φ_4 и Ψ_4 не зависят от S_φ и S_I, причем при выполнении неравенств (4.9) имеют место оценки

$$\begin{gathered}|\Phi_4| \leqslant A_2\varepsilon^{r+3}, \quad |\Psi_4| \leqslant A_2\varepsilon^{r+3} \\ |\Phi_5| \leqslant A_2(S_I^2 + \varepsilon S_\varphi^2), \quad |\Psi_5| \leqslant A_2\varepsilon(S_I^2 + S_\varphi^2)\end{gathered} \tag{4.12}$$

В процессе преобразований следует иметь в виду, что композиция интегральных операторов вида

$$K_jF = \sqrt{\varepsilon}\int K_j(t, t', \varepsilon)F(t')dt', \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\tau_0}{\varepsilon}, \quad j = 1, 2$$

с равномерно ограниченными ядрами K_j дает интегральный оператор K_1K_2, ядро которого равномерно ограничено при $0 \leqslant t' \leqslant t \leqslant \tau_0/\varepsilon$.

5. Систему интегральных уравнений (4.12) будем решать обычным методом последовательных приближений, положив

$$\begin{aligned}S_\varphi^{n+1} &= \int(\Phi_4 + \Phi_5(S_\varphi^n, S_I^n, t', \varepsilon))dt', \quad S_\varphi^{-1} = 0 \\ S_I^{n+1} &= \int(\Psi_4 + \Psi_5(S_\varphi^n, S^n{}_I, t', \varepsilon))dt', \quad S_I^{-1} = 0\end{aligned} \tag{5.1}$$

Можно показать, что если $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где ε_0 — достаточно малое число, то последовательные приближения не выйдут за пределы квадрата

$$(5.2) \qquad | S_\varphi | \leqslant A_3 \varepsilon^{r+1}, \quad | S_I | \leqslant A_3 \varepsilon^{r+1}$$

где A_3 — произвольное, но фиксированное число.

Для доказательства оценки (5.2) воспользуемся неравенствами

$$(5.3) \qquad | S_\varphi^{n+1} | \leqslant A_2 \int (\varepsilon^{r+3} + (S_I{}^n)^2 + \varepsilon (S_\varphi{}^n))\, dt'$$

$$| S_I^{n+1} | \leqslant A_2 \int (\varepsilon^{r+3} + \varepsilon (S_I{}^n)^2 + \varepsilon (S_\varphi{}^n)^2)\, dt'$$

имеющими место при выполнении неравенств (4.9) и вытекающими из оценок (4.12)

Дальнейший шаг к получению оценок (5.2) основан на следующем соображении (близкий прием применялся ранее ([8], гл. 3)): пусть L и M — неотрицательные решения системы интегральных уравнений

$$(5.4) \qquad L = A_2 \int (\varepsilon^{r+3} + M^2 + \varepsilon L^2)\, dt', \quad M = A_2 \int (\varepsilon^{r+3} + \varepsilon M^2 + \varepsilon L^2)\, dt'$$

Если при каком-нибудь n будет $| S_\varphi{}^n | \leqslant L$, $| S_I{}^n | \leqslant M$, то, как следует из (5.3) и (5.4), для всех $n' > n$ будут иметь место неравенства $| S_\varphi{}^{n'} | \leqslant L$, $| S_I{}^{n'} | \leqslant M$. Таким образом, достаточно доказать существование решения L, M системы (5.4), такого, что

$$(5.5) \qquad 0 \leqslant L \leqslant A_3 \varepsilon^{r+1}, \; 0 \leqslant M \leqslant A_3 \varepsilon^{r+1}$$

Докажем, что такие L и M существуют. Сделаем в (5.4) подстановку $L = \varepsilon^{r+1} l$, $M = \varepsilon^{r+1} m$. Квадрат (5.2) перейдет в квадрат $| l | \leqslant A_3$, $| m | \leqslant A_3$.

Уравнения для l и m, очевидно, запишутся в виде

$$l = A_2 \left(\varepsilon^2 t + \varepsilon^{r+1} \int (m^2 + \varepsilon l^2)\, dt'\right)$$

$$m = A_2 \left(\varepsilon^2 t + \varepsilon^{r+2} \int (m^2 + l^2)\, dt'\right)$$

Эта система интегральных уравнений равносильна системе дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями

$$(5.6) \qquad \frac{dl}{d\tau} = A_2 (\varepsilon + \varepsilon^2 (m^2 + \varepsilon l^2)), \quad \frac{dm}{d\tau} = A_2 (\varepsilon + \varepsilon^{r+1} (m^2 + l^2))$$

$$\tau = \varepsilon t; \quad l(0) = m(0) = 0$$

Будем рассматривать эти уравнения при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$; $| l | \leqslant A_3$, $| m | \leqslant A_3$ и считать, что $r > 0$. Последнее требование не ограничивает общности. Из теоремы Пикара следует существование неотрицательного решения этой системы при $| l | \leqslant A_3$, $| m | \leqslant A_3$ с нулевыми начальными условиями при $0 \leqslant \tau \leqslant \min \{\tau_0, A_3/N\}$, где N — максимум модуля правой части при $| l | \leqslant A_3$, $| m | \leqslant A_3$. Так как $0 \leqslant N \leqslant \text{const} + \varepsilon$, то при достаточно малых ε_0 $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ величина A_3/N превосходит τ_0 и решение существует при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$.

Итак, существование неотрицательных l и m в квадрате $| l | \leqslant A_3$, $| m | \leqslant A_3$ (и следовательно, $L = \varepsilon^{r+1} l$, $M = \varepsilon^{r+1} m$ в квадрате (5.5)) доказано. Вместе с тем доказаны и неравенства

$$(5.7) \qquad | S_\varphi{}^n | \leqslant L \leqslant A_3 \varepsilon^{r+1}, \quad | S_I{}^n | \leqslant M \leqslant A_3 \varepsilon^{r+1}$$

при любых n, так как они с очевидностью выполняются при $n = -1$.

Доказательство равномерной сходимости последовательных приближений $S_\varphi{}^n$ и $S_I{}^n$ к пределам при $n \to \infty$, после того как обоснованы неравенства (5.7), затруднений не вызывает и проводится так же, как и в теореме Пикара.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенствах (5.7), получим оценки (4.4) с $\mathrm{const} = A_3$, что и завершает обоснование метода двухмасштабных разложений.

Обобщение результатов этой статьи на случай, когда $I = (I^1, I^3, \ldots, I^s)$, $s > 1$, тривиально. Для многочастичного случая $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^s)$, $s > 1$ столь простой и полной теории, как при $s = 1$, заведомо не существует.

Авторы благодарят А. М. Ильина, указавшего прием выделения остаточных членов, использованный при доказательстве теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
2. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
3. *Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.* Конечнозонные почти-периодические решения в ВКБ-приближении.— В кн.: Итоги науки и техники. Сер. современные проблемы математики. Т. 15. М.: ВИНИТИ, 1980, с. 3—94.
4. *Кузмак Г. Е.* Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 3, с. 515—526.
5. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
6. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
7. *Акуленко Л. Д.* Применение методов усреднения и последовательных приближений для исследования нелинейных колебаний.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 771—777.
8. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 28.XII.1983