УДК 531.36:54.31

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ

Волин Ю. М.

Ставится и решается следующая задача: в каких случаях и как на основании исследования устойчивости стационарного решения «квазистационарной» системы можно судить об устойчивости стационарного решения исходной системы. Доказываются теоремы, формулирующие необходимые и достаточные условия устойчивости. Показывается, как полученные результаты могут быть применены к исследованию тепловой устойчивости химического реактора.

1. Пусть требуется исследовать устойчивость стационарного состояния динамической системы. При помощи первого метода Ляпунова данная задача сводится (если не рассматривать особые случаи) к задаче проверки устойчивости нулевого решения линеаризованной системы. Будем считать, что последняя представлена в виде

$$\frac{dy}{dt} = Ay + Bz, \quad \frac{dz}{dt} = Cy + Dz; \quad y \in R^m, \quad z \in R^l \tag{1.1}$$

Введем также обозначения $x = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_l)^T$, $m + l = n$, где индекс T означает транспонирование.

Заданную матрицу будем называть устойчивой (сильно устойчивой), если все $\operatorname{Re} \lambda_i \leqslant 0$ ($\operatorname{Re}\lambda_i < 0$) и неустойчивой, если существует i, для которого $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, где λ_i — собственные числа матрицы.

Пусть

$$F = \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}$$

Задача состоит в получении условий устойчивости матрицы F. Далее всюду предполагаем, что D и F невырождены.

Выразив z из уравнения $Cy + Dz = 0$ и подставив в первое уравнение (1.1), получим линеаризованную «квазистационарную» систему

$$dy/dt = (A - BD^{-1}C)\, y = (A + BK)\, y = A^* y \tag{1.2}$$

Матрицу A^* будем называть квазистационарной.

Выделим случай $m = 1$, имеющий для практики самостоятельное значение.

Поставим следующую задачу: при каких условиях из устойчивости либо неустойчивости стационарного состояния квазистационарной системы можно сделать вывод об устойчивости либо неустойчивости стационарного состояния исходной системы.

В силу результатов, связанных с теоремой А. Н. Тихонова [1], естественно ожидать, что если стационарное состояние z-системы

$$dz/dt = Dz \tag{1.3}$$

асимптотически устойчиво и система достаточно быстро релаксирует к нему, то устойчивость либо неустойчивость стационарного состояния квазистационарной системы определяет устойчивость либо неустойчивость стационарного состояния исходной системы. Однако представляет интерес получение рабочих оценок, позволяющих из устойчивости либо неустойчивости матрицы A^* сделать вывод об устойчивости либо неустойчивости матрицы F. Получению таких оценок и посвящена настоящая работа. Отметим, что, как будет следовать из полученных далее результатов, оценка быстроты релаксации z-системы не нужна в большом классе случаев для получения необходимых условий устойчивости.

Формулировка части результатов данной работы содержится в [2].

2. Получим сначала необходимые условия устойчивости.

Лемма 1. Четность числа вещественных положительных собственных чисел (с учетом их кратности) матрицы F есть произведение соответствующих четностей для матриц A^* и D, определяемое по правилам булевой алгебры: Ч $\times$ Ч $=$ Н $\times$ Н $=$ Ч, Ч $\times$ Н $=$ Н $\times$ Ч $=$ Н (Ч означает четность, Н — нечетность).

Доказательство. Воспользуемся следующим представлением (см. задачу 2.4 к гл. 1 в [3]):

$$(2.1)\qquad \det F = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A^* \cdot \det D$$

где λ_i — собственные числа матрицы F. Из (2.1) вытекает: $\lambda_1 \ldots \lambda_n = (\lambda_1^* \ldots \lambda_m^*) \times \times (\mu_1 \ldots \mu_l)$, где λ_j^*, μ_k — собственные числа матриц A^* и D. Все $\lambda_i \neq 0$ и, следовательно, все $\lambda_j^* \neq 0$. Пусть числа положительных вещественных собственных чисел матриц F, A^* и D равны соответственно k_1, k_2 и k_3. Имеем (так как число комплексных собственных чисел вещественной матрицы четно)

$$\operatorname{sgn}(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = (-1)^{n-k_1},\quad \operatorname{sgn}(\lambda_1^* \ldots \lambda_m^*) = (-1)^{m-k_2}$$
$$\operatorname{sgn}(\mu_1 \ldots \mu_l) = (-1)^{l-k_3}$$

Следовательно, $(-1)^{k_1} = (-1)^{k_2+k_3}$ и лемма доказана.

Простым следствием леммы 1 является следующая

Теорема 1. Пусть матрица D устойчива. Тогда из неустойчивости квазистационарной матрицы A^* при наличии нечетного числа положительных вещественных собственных чисел вытекает неустойчивость матрицы F. При $m = 1$ неустойчивость F вытекает из неустойчивости A^*.

Теорема 1 формулирует необходимые условия устойчивости. Наличие дополнительного требования о нечетном числе положительных вещественных собственных чисел матрицы A^* в формулировке теоремы существенно: в общем случае из неустойчивости матрицы A^* не вытекает неустойчивость матрицы F. Соответствующий контрпример может быть построен уже для случая $n = 3$, $m = 2$.

3. Перейдем к достаточным условиям устойчивости. При выводе этих условий ограничимся случаем $m = 1$. Для этого случая B — вектор-строка, K — вектор-столбец, A и A^* — числа.

Пусть далее $z^* = Ky = -D^{-1}Cy$, $\Delta z = z - z^*$, $\delta z = \Delta z / \mid z^* \mid$ при $z^* \neq 0$, где $\mid z \mid$ — евклидова норма z. Предположим, что $C \neq 0$ (следовательно, $K \neq 0$). После преобразований получим

$$(3.1)\qquad dy/dt = (A^* + \operatorname{sgn}(y) \mid K \mid B\delta z)\, y = \bar{A} y$$
$$(3.2)\qquad d\Delta z/dt = D\Delta z - \bar{A} z^*$$
$$(3.3)\qquad d\delta z/dt = D\delta z - \bar{A}\,(\delta z + L)\ (L = \operatorname{sgn}(y)\, K / \mid K \mid)$$

Лемма 2. Пусть при $0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$(3.4)\qquad x(t) = R(t) + \int_0^t S(t,\tau)\,\Phi(x(\tau))\,d\tau;\qquad x, R, \Phi \in R^\beta$$

где S — матрица размером $\beta \times \beta$, а функции $R(\cdot)$, $S(\cdot, \cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы. Пусть также

$$r(t) = |R(t)|, \qquad s = \max_{0 \leqslant \tau_1, \tau_2 \leqslant t_1} |S(\tau_1, \tau_2)|$$

$$|S| = \max_{|x|=1} |Sx|, \qquad |\Phi(x)| \leqslant \varphi(|x|)$$

причем $\varphi(\cdot)$ — неубывающая функция. Тогда, если уравнение

$$\alpha(t) = r(t) + \int_0^t s\varphi(\alpha(\tau))\, d\tau \tag{3.5}$$

имеет решение на $[0, t_1]$, то справедлива оценка

$$|x(t)| \leqslant \alpha(t)$$

Доказательство. Пусть $\alpha_\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению (3.5) с заменой $r(t)$ на $r_\varepsilon(t) = r(t) + \varepsilon$, где ε — малое положительное число. Пусть t' — минимальное t, для которого $\alpha_\varepsilon(t) = |x(t)|$. Тогда $t' > 0$ и $|x(t)| < \alpha_\varepsilon(t)$ при $0 \leqslant t < t'$. Но в силу последнего с учетом (3.4) имеем

$$|x(t')| < r_\varepsilon(t') + \int_0^{t'} s\varphi(\alpha_\varepsilon(\theta))\, d\theta = \alpha_\varepsilon(t')$$

что приводит к противоречию. Поэтому $|x(t)| \leqslant \alpha_\varepsilon(t)$ для всех $t \in [0, t_1]$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получим утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть $\alpha_2(t)$ — скалярная функция, удовлетворяющая на $[0, t_1]$ уравнению

$$\alpha_2(t) = r(t) + \int_1^t f_2(\alpha_2(\tau))\, d\tau \tag{3.6}$$

и пусть $f_2(\alpha)$ — неубывающая функция α, причем $0 \leqslant f_1(\alpha) \leqslant f_2(\alpha)$ и функции $r(t)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда существует на $[0, t_1]$ решение уравнения

$$\alpha_1(t) = r(t) + \int_0^t f_1(\alpha_1(\tau))\, d\tau \tag{3.7}$$

и для всех $t \in [0, t_1]$ имеет место неравенство

$$\alpha_1(t) \leqslant \alpha_2(t)$$

Доказательство. Пусть сначала $f_1(\alpha) < f_2(\alpha)$ для всех α. В некоторой окрестности $[0, t')$ существует $\alpha_1(t)$ и $\alpha_1(t) < \alpha_2(t)$ при $t > 0$. Очевидно, что $\alpha_1(t)$ можно продолжать, пока выполняется неравенство $\alpha_1(t) < \alpha_2(t)$. Пусть t'' — минимальное $t > t'$, для которого $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$. Но из условий леммы вытекает $\alpha_1(t'') < \alpha_2(t'')$, что означает противоречие.

Для доказательства леммы в общем случае введем $f_{2,\varepsilon}(\alpha) = f_2(\alpha) + \varepsilon$ и затем перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Лемма 4. Пусть при $t \in [0, t_1]$

$$\alpha(t) = r(t) + \int_0^t s\alpha(\tau)\, d\tau \tag{3.8}$$

и $s \geqslant 0$, $r(t) \geqslant 0$ и функция $r(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Тогда

$$\alpha(t) \leqslant r(t) + r_{\max}(e^{st} - 1); \qquad r_{\max} = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t_1} r(\tau) \tag{3.9}$$

Утверждение леммы 4 вытекает из известного представления решения уравнения (3.8)

$$\alpha(t) = e^{st}\alpha_0 + \int_0^t e^{s(t-\tau)} r^{\bullet}(\tau)\, d\tau \tag{3.10}$$

Пусть далее $A^* < 0$. Рассмотрим решение уравнения (3.3) на интервале $[0, t_1]$, на котором $|y(t)| > 0$ (на таком интервале $\delta z(t)$ остается конечным). В силу известных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений [4] имеем

$$(3.11)\qquad \delta z(t) = F_D(t)\,\delta z_0 - \int_0^t F_D(t-\theta)\bar{A}(\delta z(\theta))(\delta z(\theta)+L)\,d\theta; \qquad F_D(t) = z(t)\,z(0)^{-1}$$

где $z(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы (1.3), $\delta z_0 = \delta z(0)$.

Пусть матрица D сильно устойчива. Введем следующие параметры, характеризующие процессы релаксации однородной системы к стационарному состоянию:

$$(3.12)\qquad t_D = \max_{z_0}\ \min_{t>0} t\colon\ |F_D(t)z_0| = {}^1/_2\,|z_0|$$

$$(3.13)\qquad q = \max_{0\leqslant t\leqslant t_D} |F_D(t)z_0|, \qquad |z_0| = |z(0)| = 1$$

Параметр t_D — минимальное время гарантированного половинного уменьшения нормы начального фазового вектора z_0 (рассматриваемое здесь как время релаксации z-системы), а q — максимальная «раскачка» фазового вектора при релаксации в соответствии с уравнением (1.3) к состоянию $z = 0$ в течение времени t_D. В силу сильной устойчивости матрицы D величины t_D и q конечны, причем $q \geqslant 1$.

Для облегчения понимания дальнейшего дадим сначала эскиз последующих рассмотрений и логических переходов.

Рассмотрим движение, для которого $y > 0$. В некоторый момент $t_1 \leqslant t_D$ имеет место равенство $|F_D(t_1)\,\delta z_0| = {}^1/_2\,|\delta z_0|$. Найдем условия на $c_0 > 0$, при которых любое $\delta z(t)$ с $|\delta z_0| \leqslant c_0$ ограничено на $[0, t_1]$ и

$$\left|\int_0^{t_1} F(t-\theta)\bar{A}(\delta z(\theta))(\delta z(\theta)+L)\,d\theta\right| \leqslant {}^1/_2 c_0$$

При выполнении этих условий величина $\delta z(t)$ с $\delta z_0 \leqslant c_0$ ограничена на всем интервале $[0, +\infty)$ и, по крайней мере, периодически попадает в шар V_{c_0} радиуса c_0 с центром в начале координат. При этом оказывается, что для всех $\delta z_0 \in V_{c_0}$, за исключением δz_0 из некоторого подпространства пространства E^l, $\delta z(t) \to \delta z_*$ при $t \to +\infty$ и $\delta z_* \in V_{c_0}$ — стационарная точка системы (3.3). Отсюда следует, что $\bar{A}(\delta z_*)$ — собственное число матрицы F и $\bar{A}(\delta z_*) = \max_i \operatorname{Re}\lambda_i$. Дополним найденные условия условием, обеспечивающим выполнение неравенства $\bar{A}(\delta z) < 0$ при $\delta z \in V_{c_0}$. Тогда из выполнения введенных условий вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1.1) и получаются оценки для собственного числа с максимальной действительной частью.

Приведем выкладки. Применив лемму 2 к уравнению (3.11), получим: $|\delta z(t)| \leqslant \alpha_1(t)$ для $t \leqslant t_1 = t(\delta z_0) \leqslant t_D$, где

$$(3.14)\qquad \alpha_1(t) = d(t) + q\,|A^*|\,t + q\int_0^t (|K|\,|B|\,\alpha_1^2(\theta) + |K|\,|B|\,\alpha_1(\theta) + |A^*|\,\alpha_1(\theta))\,d\theta; \qquad d(t) = |F_D(t)\,\delta z_0|$$

(в предположении, что уравнение (3.14) имеет решение). В силу леммы 3, если $\alpha(t)$ удовлетворяет на $[0, t_1)$ уравнению

$$\alpha(t) = d(t) + q|A^*|t + \int_0^t p\alpha(\theta)\,d\theta \tag{3.15}$$

$$p = q(2|B||K| + |A^*|)$$

и справедливо неравенство

$$\alpha(t) \leqslant 1, \quad t \in [0, t_1] \tag{3.16}$$

то уравнение (3.14) имеет решение и $|\delta z(t)| \leqslant \alpha_1(t) \leqslant \alpha(t)$.

Пусть далее $|\delta z_0| \leqslant c_0$, $c_0 > 0$. Воспользовавшись леммой 4 применительно к уравнению (3.15), получим оценку

$$\alpha(t) \leqslant d(t) + c_0 q(e^{pt} - 1) + qt|A^*|e^{pt} \tag{3.17}$$

Из (3.17) следует, что неравенство (3.16) будет выполнено, если

$$c_0 \leqslant q^{-1}e^{-pt_1} - |A^*|t_1 \tag{3.18}$$

Пусть в момент t_1

$$|\delta z(t_1)| \leqslant c_0 \tag{3.19}$$

Так как по определению t_1 справедливо условие $d(t_1) = {}^1/_2|\delta z_0| \leqslant {}^1/_2 c_0$, то неравенство (3.19) выполняется, если

$$c_0 q(e^{pt_1} - 1) + qt_1|A^*|e^{pt_1} \leqslant {}^1/_2 c_0 \tag{3.20}$$

Из (3.20) и условия $c_0 > 0$ следует

$$c_0 \geqslant \frac{qt_1|A^*|e^{pt_1}}{{}^1/_2 - q(e^{pt_1} - 1)}, \quad q(e^{pt_1} - 1) \leqslant \frac{1}{2} \tag{3.21}$$

Пусть выполнены неравенства

$$0 < c_1 = \frac{qt_D|A^*|e^{pt_D}}{{}^1/_2 - q(e^{pt_D} - 1)} < \frac{1}{q}e^{-pt_D} - |A^*|t_D = c_2 \tag{3.22}$$

Тогда при $c_1 \leqslant c_0 \leqslant c_2$ выполнены неравенства (3.18) и (3.21).

Рассматривая проделанные выкладки в обратном порядке, можно проверить, что при выполнении условия (3.22), если $c_1 \leqslant c_0 \leqslant c_2$ и $|\delta z_0| \leqslant c_0$, то $\delta z(t)$ на всем интервале $[0, +\infty)$ остается все время в шаре единичного радиуса и, по крайней мере периодически, попадает в шар V_{c_0}.

Определим

$$R_0 = \frac{|A^*|}{|K||B|}(K = -D^{-1}C, \ A^* = A + BK) \tag{3.23}$$

Так как (при $y > 0$) $\bar{A}(\delta z) = A^* + |K|B\delta z$, то выполнено условие

$$\bar{A}(\delta z) < 0 \text{ при } |\delta z| < R_0 \tag{3.24}$$

$$\bar{A}(\delta z) = 0 \text{ при } \delta z = R_0 B^T/|B|$$

Потребуем выполнения неравенства

$$c_1 < R_0 \tag{3.25}$$

Тогда для $\delta z(t)$ периодически выполняется условие $\bar{A}(\delta z) < 0$.

Теорема 2. Пусть матрица D сильно устойчива, $C \neq 0$, $A^* < 0$ и выполнено неравенство

$$t_D|A^*| < \chi(R_0, q) \tag{3.26}$$

где t_D, q и R_0 определяются условиями (3.12), (3.13) и (3.23), а $\chi(R_0, q)$ — единственный корень (для переменной χ) уравнения

$$P(\varkappa, R_0, q) = \min\left(R_0, \frac{1}{q}\exp\left(-\chi q\left(\frac{2}{R_0} + 1\right)\right) - \chi\right) - \tag{3.27}$$

$$- q\chi\exp\left(\chi q\left(\frac{2}{R_0} + 1\right)\right)\left[\frac{1}{2} - q\left(\exp\left(\chi q\left(\frac{2}{R_0} + 1\right)\right) - 1\right)\right]^{-1} = 0$$

на интервале

$$(3.28)\qquad 0<\chi<\frac{\ln(1/(2q)+1)}{2/R_0+1}=\chi_1$$

Тогда матрица F сильно устойчива, причем величина λ_{i*} ($\mathrm{Re}\,\lambda_{i*} = \max_i \mathrm{Re}\,\lambda_i$) действительна и удовлетворяет оценкам

$$(3.29)\qquad A^* - |K||B|c_1 \leqslant \lambda_{i*} \leqslant A^* + |K||B|c_1 < 0$$

Доказательство. Существование и единственность корня уравнения (3.27) вытекает из непрерывности и монотонности $P(\chi, R_0, q)$, если учесть, что $P(0, R_0, q) = \min(R_0, 1)$, $P(\chi_1, R_0, q) = -\infty$. Далее, как можно проверить

$$(3.30)\qquad c_1 = \frac{qt_D|A^*|\exp(t_D|A^*|(2/R_0+1))}{{}^1/_2 - q(\exp(t_D|A^*|(2/R_0+1))-1)}$$

$$c_2 = \frac{1}{q}\exp(-t_D|A^*|(2/R_0+1)) - t_D|A^*|$$

Следовательно, $P(t_D|A^*|, R_0, q) = \min(R_0, c_2) - c_1$ и условие (3.26) эквивалентно условию

$$(3.31)\qquad 0 < c_1 < \min(R_0, c_2)$$

Пусть собственные числа матрицы F различны. Рассмотрим движение точки x системы (1.1) с начальными условиями, удовлетворяющими соотношениям

$$y(0) > 0,\quad \delta z_0 = (z(0) - Ky(0))/(|K|y(0)) \leqslant c_0 = c_1$$

и отвечающее ему движение $\delta z(t)$. По ранее доказанному величина $\delta z(t)$ остается ограниченной при $0 \leqslant t < +\infty$ и, следовательно, $y(t) > 0$. (Если для некоторого t имеет место $y(t) = 0$, то для этого t будет $|\delta z(t)| = +\infty$.) Будем такие движения называть выделенными. Пусть ξ — единичный собственный вектор, отвечающий λ_{i*} ($\mathrm{Re}\,\lambda_{i*} = \max_i \mathrm{Re}\,\lambda_i$). Величина $\xi_1 \neq 0$, так как при $\xi_1 = 0$ существуют выделенные движения, для которых $\delta z(t)$ не есть ограниченная функция. Следовательно, λ_{i*} и ξ действительны (в противном случае существовали бы выделенные движения, для которых $y(t)$ при достаточно больших t совершало бы колебания вокруг нуля).

Можно считать, что $\xi_1 > 0$. Для всех выделенных движений, за исключением тех, которые совершаются в некоторой гиперплоскости, определяемой собственными векторами, отличными от ξ, $x(t)/|x(t)| \to \xi$ при $t \to +\infty$. Для таких движений

$$\delta z(t) \to \delta z_* = \frac{\eta - \xi_1 K}{\xi_1 |K|}$$

и, значит, в шаре V_{c_0} система (3.3) имеет стационарную точку. Но $\bar{A}(\delta z_*) = \lambda_{i*}$ (см. (3.1)). Поэтому, учитывая (3.25), заключаем, что справедливы оценки (3.29) и матрица F сильно устойчива.

Для доказательства теоремы в общем случае введем семейство матриц $F(\sigma)$: $F(\sigma)$ непрерывным образом зависит от σ, $F(0) = F$, $F(\sigma)$ имеет различные собственные числа при $\sigma \neq 0$. Как можно показать, q, t_D, A^*, K и B — непрерывные функции параметра σ (пока $F(\sigma)$ остается сильно устойчивой). Поэтому при достаточно малых σ выполнены неравенства (3.31) и, следовательно, справедливы оценки (3.29). Переходя к пределу при $\sigma \to 0$, получим утверждение теоремы для $F(0) = F$. Теорема доказана.

Величина $1/\,|A^*|$ характеризует инерционность квазистационарной системы, а t_D — инерционность z-системы. Поэтому неравенство (3.26) показывает, что из неравенства $A^* < 0$ можно сделать вывод об устойчивости матрицы F в тех случаях, когда инерционность z-системы достаточно мала по сравнению с инерционностью квазистационарной системы.

Отметим, что функция $\chi\,(R_0,\, q)$ убывает с ростом q и уменьшением R_0.

Замечание 1. В формулировке теоремы 2 предполагается, что $C \neq 0$ и, следовательно, $K \neq 0$. Если $C = 0$, то, как можно убедиться, собственные числа матрицы F включают $A = A^*$ и собственные числа матрицы D. Поэтому для такого случая сильная устойчивость F при условии сильной устойчивости D и $A^* < 0$ тривиальна.

Замечание 2. Утверждение теоремы 2 остается в силе, если параметры t_D и q заменить их верхними оценками, а параметр R_0 — нижней оценкой. Справедливость данного утверждения вытекает из того, что (см. (3.30)) c_1 — возрастающая, а c_2 — убывающая функции параметров t_D и q.

Для применения теоремы 2 нужно знать t_D и q или верхние оценки этих параметров. Для получения данных оценок эффективным оказывается аппарат функций Ляпунова.

Теорема 3. Пусть $V(z)$ — определенно-положительная однородная функция Ляпунова z-системы (1.3) (тем самым для $V(z)$ выполнено условие $V(az) = aV(z)$ при $a > 0$), удовлетворяющая условиям

$$\frac{\max|z| \text{ при } V(z)=1}{\min|z| \text{ при } V(z)=1} = q' \tag{3.32}$$

$$dV/dt \leqslant eV \quad (e < 0) \tag{3.33}$$

Тогда q' и $t_D' = \ln(2q')/\,|e|$ — верхние оценки для q и t_D.

Утверждение теоремы для q' очевидно. Утверждение для t_D' вытекает из леммы 3.

Замечание 3. Отметим, что при асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.3) всегда существует однородная функция Ляпунова, удовлетворяющая неравенству (3.33) с $e = (\mathrm{Re}\,\mu)_{\max}$, где $(\mathrm{Re}\,\mu)_{\max} = \max_i \mathrm{Re}\,\mu_i$ (μ_i — собственные числа матрицы D). В самом деле, ограничившись неособым случаем, будем считать, что все μ_i различны. Невырожденным линейным преобразованием S приведем D к диагональной форме. Непосредственной проверкой можно убедиться, то $V = (Sz, \overline{Sz})^{1/2}$ — однородная функция Ляпунова, для которой выполнено неравенство (3.33) с $e = (\mathrm{Re}\,\mu)_{\max}$.

Из сказанного вытекает, что условие (3.26) в теореме 2 может быть также записано в следующей форме:

$$\frac{|A^*|\ln(2q^*)}{|(\mathrm{Re}\,\mu)_{\max}|} < \chi\,(R_0,\, q^*) \tag{3.34}$$

где q^* — параметр, удовлетворяющий условию (3.32) для функции Ляпунова z-системы, для которой выполнено неравенство (3.33) с $e = (\mathrm{Re}\mu)_{\max}$.

При отсутствии прямых аналитических результатов в ряде случаев верхние оценки для t_D и q могут быть найдены из опытных данных или на основе смешанного подхода, сочетающего аналитические и опытные результаты.

4. В теории теплового взрыва хорошо известен критерий устойчивости, определяемый знаком производной dQ/dT [5, 6], где $Q = Q_1 - Q_2$, Q_1 — количество выделяемого, а Q_2 — количество отводимого в реакторе тепла. Стационарные состояния, для которых $dQ/dT < 0$, устойчивы, а состояния с $dQ/dT > 0$ неустойчивы.

Этот результат, строго говоря, предполагает, что динамика процесса определяется одним дифференциальным уравнением. Попытки аналитического обоснования данного критерия применительно к более широкому классу случаев делались только для систем второго порядка (для реактора идеального смешения, динамический процесс в котором определяется температурой и одной концентрацией). Было показано, что для таких систем критерий знака dQ/dT дает в общем случае необходимые, но не достаточные условия устойчивости [7]. Достаточные условия устойчивости данный критерий дает тогда, когда время релаксации концентрационной модели существенно меньше времени релаксации тепловой модели [7, 8]. С другой стороны, многочисленные вычислительные эксперименты показывают, что критерий знака dQ/dT, по-видимому, справедлив в весьма широком классе случаев.

Применим к исследованию тепловой устойчивости стационарного состояния экзотермического реактора идеального смешения результата пп. 2 и 3. Будем рассматривать следующую динамическую модель реактора:

$$H_T \frac{dT}{dt} = Q(T, C) = Q_1(T, C) - Q_2(T, C) = \tag{4.1}$$
$$= \sum_i (-\Delta H_i) r_i(T, C) - \frac{C_p (T - T_0)}{\tau} - K_T S (T - T_c)$$

$$H_c \frac{dC_j}{dt} = w_j(T, C) - \frac{C_j - C_{j0}}{\tau}, \quad j = 1, 2, \ldots, l \tag{4.2}$$

$$w_j = \sum_i \gamma_{ij} r_i \tag{4.3}$$

Здесь C и T — вектор концентраций и температура в реакторе, C_{j0} — концентрация j-го вещества на входе в реактор, T_0 — температура на входе в реактор, t — время, H_T, H_c — удерживающие способности по теплу и веществу, ΔH_i — тепловой эффект i-й реакции, C_p — теплоемкость, K_T — коэффициент теплопередачи, S — удельная поверхность теплоотвода, T_c — температура хладоагента, τ — условное время контакта, r_i — скорость i-й реакции, w_j — скорость образования j-го вещества, (γ_{ij}) — стехиометрическая матрица.

Концентрационной моделью будем называть систему (4.2) с фиксированной температурой T.

Пусть (T_s, C_s) — стационарное решение системы (4.1), (4.2). Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующая

Теорема 4. Пусть стационарное решение C_s концентрационной модели (при $T = T_s$) асимптотически устойчиво. Тогда условие

$$dQ/dT\ (T_s,\ C\ (T_s)) \leqslant 0 \tag{4.4}$$

является необходимым условием устойчивости решения (T_s, C_s).

В формуле (4.4) $C(T)$ — квазистационарная концентрация, определяемая уравнениями

$$w_j\ (T,\ C) - (C_j - C_{j0})/\tau = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l \tag{4.5}$$

Следовательно, критерий знака dQ/dT дает в общем случае необходимое условие устойчивости, если стационарное решение концентрационной модели асимптотически устойчиво. Подчеркнем, что этот результат справедлив без всяких требований к времени релаксации концентрационной модели.

Асимптотическая устойчивость концентрационной модели, которая требуется для применения теоремы 4, выполняется в широком классе случаев (этим и определяется, в первую очередь, оправданность выделения задачи тепловой устойчивости из общей задачи устойчивости реактора). При этом часто наличие концентрационной устойчивости удается доказать глобально для целого класса кинетических зависимостей [9, 10].

Для применения теоремы 2 (формулирующей достаточные условия устойчивости) необходимо иметь кроме доказательства асимптотической устойчивости стационарного решения концентрационной модели и верхние оценки параметров t_D и q. Эффективный подход к получению этих оценок (и доказательству устойчивости концентрационной модели) дает метод функций Ляпунова. Запишем уравнения концентрационной модели

$$\frac{d\Delta C_j}{dt} = \sum_{k=1}^{l} p_{jk}\Delta C_k - \frac{\Delta C_j}{H_c \tau} \tag{4.6}$$

$$\left(p_{jk} = \frac{1}{H_c}\frac{\partial w_j(T_s, C_s)}{\partial C_k}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, l$$

Укороченной моделью будем называть систему

$$\frac{d\Delta C_j}{dt} = \sum_{k=1}^{l} p_{jk}\Delta C_k, \quad j = 1, 2, \ldots, l \tag{4.7}$$

Теорема 5. Пусть асимптотически устойчиво нулевое решение системы

$$\frac{d\Delta C_j}{dt} = \sum_{k=1}^{l} p_{jk}\Delta C_k - \frac{\Delta C_j}{H_c \tau_1}, \quad \tau_1 > \tau, \ j = 1, 2, \ldots, l \tag{4.8}$$

существует однородная определенно-положительная функция Ляпунова для этой системы, удовлетворяющая оценке (3.32) (с заменой z на ΔC), и выполнены неравенства (4.4) и

$$\left|\frac{dQ}{dT}(T_s, C(T_s))\right| \frac{\tau H_c \ln(2q')}{1 - \tau/\tau_1} < \chi(R_0, q') \tag{4.9}$$

Тогда стационарное состояние системы (4.1)—(4.3) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из однородности $V(\Delta C)$ вытекает, что $V(\Delta C) = (\partial V/\partial \Delta C\,(\Delta C))\,\Delta C$. Получим оценку для dV/dt в силу уравнений (4.6)

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial \Delta C} P\Delta C - \frac{V}{H_c \tau_1}\right) - \frac{(\tau_1 - \tau)V}{H_c \tau\tau_1} \leqslant -\frac{(\tau_1 - \tau)V}{H_c \tau\tau_1} < 0$$

Утверждение теоремы теперь оказывается непосредственным следствием теоремы 3.

Рассмотрим класс кинетических зависимостей, удовлетворяющих соотношениям

$$p_{jj} < 0, \quad p_{jk} \geqslant 0 \text{ при } j \neq k, \quad \sum_{j=1}^{l} p_{jk} \leqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l \tag{4.10}$$

Отметим, что соотношения (4.10) выполняются, если нет автокатализа и каждая скорость реакции в каждом направлении определяется одним «ведущим» компонентом.

Для данного класса, как хорошо известно и легко проверяемо, $V = \Sigma\,|\,\Delta C_j\,|$ — функция Ляпунова укороченной модели (4.7). Можно убедиться также, что $q' = l^{1/2}$. Таким образом, для данного класса кинетических зависимостей условие (4.9) принимает вид

$$\left|\frac{dQ}{dT}\right| \tau H_c \ln(2l^{1/2}) < \chi(R_0, l^{1/2})$$

Условие (4.9) (в предположении, что $dQ/dT < 0$) эквивалентно условию

$$\frac{T''}{T'} < \chi(R_0, q')\left[\ln(2q')\left(1 + \frac{K_T S\tau}{C_p} - \frac{\tau}{C_p}\frac{dQ_1}{dT}\right)\right]^{-1} \tag{4.11}$$

где $T' = H_T\tau/C_p$, $T'' = H_c\tau$ (эти величины можно рассматривать как постоянные времени тепловой и концентрационной моделей).

Для каталитического реактора часто

$$1+\frac{K_T S\tau}{C_p}-\frac{\tau}{C_p}\frac{dQ_1}{dT}<2, \quad R_0\geqslant 1, \quad q'\leqslant 2$$

Тогда условие (4.11) будет выполнено, если $T''/T' < 0{,}0095$. Последнее условие обычно выполняется (в работе [8] разобран пример, для которого $l = 1$ и $T''/T' = 0{,}0027$).

В случаях, когда аналитические результаты отсутствуют, для обоснования использования теорем 1 и 2 могут быть привлечены опытные данные. Пусть кинетические исследования проводились в проточном лабораторном реакторе, работавшем в режиме, близком к режиму идеального смешения [11]. В таком реакторе условия теплоотвода обычно очень хорошие и можно применительно к определению устойчивости ограничиться концентрационными уравнениями, которые для лабораторного аппарата в данном случае такие же, как у промышленного. Поэтому из устойчивости стационарного режима лабораторного реактора вытекает, что концентрационная модель промышленного процесса (при равенстве τ и C_{j0}) устойчива. При этом по динамическим опытным данным лабораторного аппарата могут быть оценены величины t_D и q.

Если концентрационные модели лабораторного и промышленного реакторов различны, дело обстоит сложнее. Однако и здесь в некоторых случаях опыты в лабораторном реакторе могут дать полезную информацию для применения теорем 1 и 2. Так, например, для случая проточно-циркуляционного лабораторного реактора, как можно показать, справедлива следующая формула связи характеристических значений:

$$\frac{1+\tau\gamma H_c p'}{\gamma}-\frac{1-\gamma}{\gamma}g(p')=1+\tau H_c p'' \tag{4.12}$$

где p', p'' — характеристические значения p для передаточных функций лабораторного и промышленного реакторов, $g(P)\,I$ — передаточная функция звена обратной связи в лабораторном реакторе (I — единичная матрица), γ — отношение потока на входе в лабораторный реактор к потоку, проходящему через реакционный объем. Предполагается, что промышленный реактор работает при тех же C_{j0}, что и лабораторный, и имеет $\tau = \tau_0/\gamma$, где τ_0 — условное время контакта для реакционного объема лабораторного реактора.

5. Значение полученных условий устойчивости определяется следующим.

Условия устойчивости, найденные на основе принципа квазистационарности, в ряде случаев имеют физический смысл и позволяют получить оценки общего характера. В частности, физическим смыслом обладает критерий знака производной dQ/dT в задаче оценки тепловой устойчивости реактора.

Можно отметить также вычислительную простоту исследования устойчивости на основе условий, определяемых теоремами 1 и 2, которая особенно полезна при большой размерности z-системы и необходимости многократных расчетов устойчивости стационарных состояний процесса (с разными параметрами). Последнее имеет место, например, если производится оптимизация процесса и условие устойчивости фигурирует в качестве одного из оптимизационных ограничений [12].

Наконец, полученные условия устойчивости могут быть использованы в определенной мере и тогда, когда динамические уравнения объекта известны не полностью. Для применения теорем 1 и 2 достаточно знать динамические уравнения только для y_i. Остальные уравнения могут быть стационарными, если из опытных данных или по аналогии с другими процессами звестны оценки параметров t_D и q.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
2. *Волин Ю. М., Масчева Л. А.* Оценка устойчивости химического реактора на основе принципа квазистационарности.— В кн.: Динамика процессов и аппаратов химической технологии. Матер. 1-й Всес. конф., Воронеж: Изд-е Воронеж. политехн. ин-та, 1983, с. 155—163.
3. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968, 547 с.
4. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
5. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 491 с.
6. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
7. *Слинько М. Г.* Определение условий устойчивости для экзотермических контактных процессов в псевдоожиженном слое.— Кинетика и катализ, 1960, т. 1, № 1, с. 153—161.
8. *Горин В. Н., Буровой И. А., Ромм Р. Ф.* О динамике одного класса химических процессов.— Теорет. основы химич. технологии, 1971, т. 5, № 3, с. 476—480.
9. *Clarke B. L.* Graph theoretic approach to the stability analysis of steady state chemical reaction networks.— J. Chem. Phys., 1974, v. 60, No. 4, p. 1481—1492.
10. *Clarke B. L.* Stability analysis of a model reaction network using graph theory.— J. Chem. Phys., 1974, v. 60, No. 4, p. 1493—1501.
11. *Carberry J. J.* Designing laboratory catalytic reactors.— Indust. and Engng Chem., 1964, v. 56, No. 11, p. 39—46.
12. *Волин Ю. М., Масчева Л. А., Слинько М. Г.* Вопросы устойчивости химических процессов в задачах оптимизации.— Теорет. основы химич. технологии, 1981, т. 15, № 6, с. 897—904.

Поступила в редакцию
24.V.1984

Москва