УДК 531.36:534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Тхай В. Н.

Исследуется задача об устойчивости по Ляпунову нулевого решения периодической и автономной гамильтоновых систем. Предполагается, что линеаризованная система устойчива, ее матрица приводится к диагональному виду, а все характеристические показатели (или корни характеристического уравнения) чисто мнимы. Для периодических систем с одной степенью свободы и автономных систем с двумя степенями свободы указанная задача полностью решена [1—7]. Ниже получены условия устойчивости для систем с произвольным числом степеней свободы. Результаты применены для решения вопроса об устойчивости по Ляпунову треугольных точек либрации ограниченной задачи трех тел (плоской эллиптической и пространственной круговой).

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу об устойчивости по Ляпунову нулевого решения канонической системы с аналитической, 2π-периодической по времени t (или не зависящей явно от времени) функцией Гамильтона $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad H(0, 0, t) \equiv 0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n), \quad \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$$

Предполагаем, что линеаризованная система устойчива, все ее характеристические показатели (либо корни характеристического уравнения) чисто мнимы и различны и в системе нет резонансов третьего и четвертого порядков. При этом в автономной задаче исследуем случай, когда гамильтониан H не является знакоопределенной функцией (в случае знакоопределенности H задача об устойчивости решается известной теоремой Лагранжа — Дирихле).

При указанных предположениях гамильтониан системы приводится к виду [8, 9]

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} r_i r_j + H^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \tag{1.2}$$

$$(2r_i = p_i^2 + q_i^2; \ \lambda_i, \ c_{ij} = \mathrm{const}; \ \lambda_i \neq 0)$$

где функция $H^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ содержит члены не ниже пятого порядка от $\mathbf{p}, \mathbf{q}$. Вычисление коэффициентов c_{ij} в (1.2) через коэффициенты форм второго — четвертого порядков в разложении исходного гамильтониана в ряд по $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ проведено в [9].

В соответствии с известными результатами [1—4] при $n = 1$ для периодической системы и $n = 2$ в автономном случае задача (1.1), (1.2) имеет положительное в смысле устойчивости решение, если соответственно $c_{11} \neq 0$ и $c_{11}\lambda_2^2 - 2c_{12}\lambda_1\lambda_2 + c_{22}\lambda_1^2 \neq 0$. Для $n \geqslant 2$ в периодическом случае и $n \geqslant 3$ в автономном вопрос об устойчивости по Ляпунову до настоящего времени оставался открытым.

2. Неустойчивость. Гамильтоновы системы являются частным случаем систем с инвариантной мерой. Для этих систем может быть доказано простое утверждение, тем не менее проливающее свет на структуру окрестности неустойчивой по Ляпунову особой точки. Имея целью, в первую очередь, решение задачи (1.1), (1.2), ограничимся рассмотрением 2π-периодических или автономных систем, заданных дифференциальными уравнениями

$$(2.1) \qquad dx/dt = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{X}(0, t) \equiv 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{X} = 0$$
$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_L), \ \mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_L)$$

Предполагается, что правые части уравнения (2.1) гарантируют существование, единственность и непрерывную зависимость решений от начальных условий в некоторой окрестности нуля.

Будем говорить, что для системы (2.1) выполнено свойство S, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что, каким бы малым ни было $\delta > 0$, в δ-окрестности нуля найдется такая точка, что траектория, начинающаяся в этой точке, покидает ε-окрестность через конечное время как при росте времени t, так и при уменьшении времени t.

Лемма. Для системы (2.1) свойство неустойчивости по Ляпунову нулевого решения при $0 \leqslant t < +\infty$ или $-\infty < t \leqslant 0$ эквивалентно свойству S.

Доказательство. Предположим, что нулевое решение периодической системы (2.1) неустойчиво по Ляпунову при $0 \leqslant t < +\infty$. Тогда в сколь угодно малой δ-окрестности нуля найдется по крайней мере одна точка, которая, двигаясь согласно уравнению (2.1), через конечное время покинет данную ε-окрестность. В силу непрерывной зависимости от начальных условий некоторое множество G точек ненулевой меры, принадлежащее δ-окрестности, также покинет ε-окрестность через конечное время.

Интересуясь теперь «предысторией» множества G, рассмотрим уравнение (2.1) при уменьшении времени t.

При изменении t на величину 2π уравнение (2.1) задает взаимно-однозначное и непрерывное отображение T «фазового» пространства (X) на себя. Это отображение сохраняет фазовый объем. Пусть T^kG ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — образ множества G после $|k|$-кратного отображения T. В силу неустойчивости, при некотором k_* множество $T^{k_*}G$ лежит вне ε-окрестности. Если при уменьшении t все траектории, начинающиеся в G, принадлежат ε-окрестности, то $T^{k_*+k}G$ ($k = -k_*, -2k_*, -3k_*, \ldots$) также принадлежат этой окрестности. Но это невозможно в силу теоремы Пуанкаре о возвращении [10], ибо мера G не равна нулю, а мера ε-окрестности конечна. Более того, почти все, в смысле меры, точки G должны покинуть ε-окрестность.

Таким образом, множество G содержит по крайней мере одну точку, такую, что траектория, начинающаяся в этой точке, покинет через конечное время ε-окрестность как при росте времени t, так и при уменьшении t. Очевидно, что такая точка существует и при неустойчивости на $-\infty < t \leqslant 0$, а также для неустойчивой автономной системы.

3. Основная идея доказательства теоремы об устойчивости системы (1.1), (1.2). Для использования метода от противного выведем интегральное соотношение, которое будет основным при получении соответствующего противоречия. В случае периодической системы такое противоречие достигается при условии знакоопределенности квадратичной формы

$$(3.1) \qquad H_4 = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} r_i r_j$$

в положительном конусе $r_i \geqslant 0$ ($i = 1, \ldots, n$).

Итак, рассмотрим неустойчивую периодическую систему с знакоопределенной функцией H_4. Определим γ-окрестность нуля неравенством $|H_4| \leqslant \gamma^4$.

Производная $H_4^{\bullet}$ от функции H_4 в силу уравнения движения (1.1), (1.2) делит фазовое пространство (p, q) при каждом t на три области:

$H_4^{\cdot} < 0$, $H_4^{\cdot} = 0$, $H_4^{\cdot} > 0$. В силу сохранения фазового объема и предположения о неустойчивости каждая из этих областей не пуста. Для всех точек поверхности $|H_4| = \gamma^4$ из области $H_4 H_4^{\cdot} < 0$ интегральные кривые входят внутрь этой поверхности с ростом t.

Обозначим через $S_1(\gamma)$ кривую, определенную на поверхности $|H_4| = \gamma^4$ следующим образом. На $S_1(\gamma)$ справедливо неравенство $H_4 H_4^{\cdot} \leqslant 0$, причем $H_4^{\cdot} = 0$ только на одном из концов кривой $S_1(\gamma)$ — в точке $C(\gamma)$. Все интегральные кривые, проходящие через $S_1(\gamma)$[1] и входящие в область $|H_4| < \gamma^4$, покидают эту область через конечное время. Через второй конец кривой $S_1(\gamma)$ — точку $A(\gamma)$ — проходит интегральная кривая $S(\gamma)$.

Интегральная кривая $S(\gamma)$ пересекает поверхность $|H_4| = \gamma^4$ в точках $A(\gamma)$ и $B(\gamma)$ и на ней выполнено условие $\tau_1 > \tau/2$. Здесь τ — время движения по $S(\gamma)$ от точки $A(\gamma)$ до точки $B(\gamma)$, а τ_1 — время движения в области $|H_4| \leqslant \gamma^4/4$.

Для любого γ $(0 < \gamma \leqslant \varepsilon)$ кривая $S(\gamma)$ всегда существует. В самом деле, в предположении о неустойчивости выполнено свойство S. Значит, обязательно существует интегральная кривая, которая входит в область $|H_4| < \gamma^4$, проходит в δ-окрестности нуля и через конечное время покидает область $|H_4| < \gamma^4$. Число δ может быть сколь угодно малым и, кроме того, производная от функции $r = r_1 + \ldots + r_n$ в силу (1.1), (1.2) порядка $r^{5/2}$. Поэтому чем меньше δ, тем больше τ_1 при данном γ.

Согласно свойству S, для некоторого γ $(0 < \gamma \leqslant \varepsilon)$ кривую $S_1(\gamma)$ также можно построить.

Действительно, обозначим через $Q(\varepsilon)$ связное множество точек на поверхности $|H_4| = \varepsilon^4$, на котором при $t = 0$ начинаются траектории, входящие и покидающие через конечное время область $|H_4| < \varepsilon^4$. Пусть $S_1(\gamma)$ не удалось построить при $\gamma = \varepsilon$. Тогда каждое множество $Q(\varepsilon)$, содержащее точки $A_1(\varepsilon)$, не имеет граничных точек, где $H_4^{\cdot} = 0$. Рассмотрим $Q_1(\varepsilon)$ — произвольное замкнутое связное множество точек, принадлежащее $Q(\varepsilon)$. Траектории, начинающиеся на $Q_1(\varepsilon)$, при некотором γ дадут на поверхности $|H_4| = \gamma^4$ связное замкнутое множество $Q_1(\gamma)$, которое содержит точки $H_4^{\cdot} = 0$. Поэтому построение кривой $S_1(\gamma) \subset Q_1(\gamma)$ будет завершено, если $Q_1(\varepsilon)$ выбрано таким образом, что $Q_1(\gamma)$ содержит точку $A(\gamma)$. Последнее всегда возможно в силу свойства S.❙

Траектории, проходящие через $S_1(\gamma)$, при последующем пересечении с поверхностью $|H_4| = \gamma^4$ дадут кривую $S_2(\gamma)$ с концами в точках $B(\gamma)$ и $C(\gamma)$. Кривые $S(\gamma)$, $S_1(\gamma)$ и $S_2(\gamma)$ принадлежат двумерной поверхности в расширенном фазовом пространстве, и эта поверхность образована интегральными линиями 1-формы $\mathbf{p}\, d\mathbf{q} - H dt$. Поэтому при надлежащем выборе направления интегрирования от точки $A(\gamma)$ к точке $B(\gamma)$ имеем

$$\int\limits_{S(\gamma)} \mathbf{p}\, d\mathbf{q} - H\, dt = \int\limits_{S_1(\gamma)+S_2(\gamma)} \mathbf{p}\, d\mathbf{q} - H\, dt \tag{3.2}$$

Изменим масштаб, заменив переменные p, q на $p\gamma$, $q\gamma$, и в дальнейшем будем рассматривать гамильтониан, зависящий от малого параметра γ

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i + \gamma^2 H_4 + \gamma^3 H^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \gamma, t) \tag{3.3}$$

Для системы с гамильтонианом (3.3) кривые $S(\gamma)$, $S_1(\gamma)$ и $S_2(\gamma)$ определены на поверхности $|H_4| = 1$. Опуская в обозначении этих кривых индекс γ, всюду ниже вместо соотношения (3.2) будем использовать

[1] За исключением проходящей через $C(\gamma)$.

эквивалентное соотношение

$$(3.4)\qquad \int\limits_S \mathbf{p}\,d\mathbf{q}-\mathbf{q}\,d\,\mathbf{p}-2H\,dt=\int\limits_{S_1+S_2}\mathbf{p}\,d\mathbf{q}-\mathbf{q}\,d\mathbf{p}-2H\,dt$$

4. Устойчивость. Пусть при $t=0$ на поверхности $|H_4|=\omega^4$ (ω — const, $\omega\geqslant 1$) определена кривая S_ω, такая, что интегральные кривые, начинающиеся на S_ω, дают на поверхности $|H_4|=1$ кривую S_1. При $t=0$ рассмотрим двумерное многообразие начальных условий σ_0, содержащее кривую S_ω. Траектории, начинающиеся на σ_0, при каждом t определяют двумерное многообразие σ_t и на конечном интервале времени принадлежат трехмерному интегральному многообразию Σ в расширенном фазовом пространстве. При каждом значении параметра t имеем [11]

$$\sum_{i=1}^n (p_i\,dq_i-q_i\,dp_i)=2\eta\,d\xi$$

где переменные ξ, η независимы между собой на Σ, если они независимы на σ_0[2]. В последнем случае на Σ получим

$$(4.1)\qquad \sum_{i=1}^n (p_i\,dq_i-q_i\,dp_i)-2H\,dt=2(\eta\,d\xi-\Gamma\,dt)$$

где функция Γ зависит от ξ, η, t и γ. Тем самым на Σ в переменных ξ, η построена каноническая система с одной степенью свободы и гамильтонианом Γ.

Выберем теперь σ_0 таким образом, чтобы на σ_0 были определены независимые переменные R, φ:

$$\sum_{i=1}^n (p_i\,dq_i-q_i\,dp_i)=2R\,d\varphi,\qquad R^2=|H_4|$$

Такой выбор σ_0 всегда возможен бесконечным числом способов.

На траекториях исходной системы, принадлежащих Σ, имеем

$$\frac{dR}{dt}=-\frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi},\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\Gamma}{\partial R}$$

Первое из этих уравнений можно также получить, продифференцировав R в силу исходных уравнений (1.1), (3.3). Откуда найдем

$$\partial\Gamma/\partial\varphi=\gamma^3R^{5/2}F\,(R,\varphi,\gamma,t)$$

где функция F в области $R\leqslant\omega^2$ не превышает по модулю некоторой постоянной M, не зависящей от γ.

Для определения $\partial\Gamma/\partial R$ воспользуемся соотношением

$$\sum_{i=1}^n\left(p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}+q_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)-2H=2\left(R\frac{\partial\Gamma}{\partial R}-\Gamma\right)$$

полученным из (4.1) и справедливым вдоль траекторий системы. Рассматривая его при каждом (φ, t) как дифференциальное уравнение относительно R и учитывая выражение для $\partial\Gamma/\partial\varphi$, получим

$$\Gamma=a\,(\gamma,t)\,R\pm\gamma^2R^2+\gamma^3R\Gamma_1\,(R,\varphi,\gamma,t)$$

где функция Γ_1 в области $R\leqslant\omega^2$ ограничена по модулю конечным числом M_1, а знак при γ^2R^2 соответствует знаку квадратичной формы (3.1). Ясно, что всегда можно полагать $a\,(\gamma,t)\equiv 0$, ибо в противном случае каноническое преобразование: $(R,\varphi)\to(R,\psi)$; $\psi=\varphi-\int a\,(\gamma,t)\,dt$

[2] В рассматриваемом случае задача приведения состоит в определении интегрирующего множителя для уравнения $M\,(x,y)\,dx+N\,(x,y)\,dy=0$, заданного в ограниченной замкнутой области на плоскости.

приводит Γ к виду, в котором $a(\gamma, t) \equiv 0$. Поэтому вдоль траекторий

$$\partial\Gamma/\partial R = \pm 2\gamma^2 R + \gamma^3 \Phi(R, \varphi, \gamma, t), \quad |\Phi| < M_2$$

где постоянная M_2, как и M_1, не зависит от γ.

Теперь можно вычислить интегралы в соотношении (3.4). Вдоль траектории S имеем

$$\Delta\varphi = \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau} d\varphi = \pm 2\gamma^2 \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau} R(t)\, dt + \gamma^3\Phi_1, \quad |\Phi_1| < M_2\tau$$

где через $R(t)$ обозначено значение переменной R на траектории S, а t_1 и $t_1 + \tau$ — значение t соответственно в точках A и B. Поэтому

$$\int\limits_{S_1+S_2} \sum_{i=1}^{n} (p_i\, dq_i - q_i\, dp_i) - 2H\, dt = 2\gamma^2 \Big[\pm \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau} (2R(t) - 1)\, dt\Big] + \gamma^3 V_1$$

$$\int\limits_{S} \sum_{i=1}^{n} (p_i\, dq_i - q_i\, dp_i) - 2H\, dt = \pm 2\gamma^2 \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau} R^2(t)\, dt + \gamma^3 V_2, \quad |V_{1,2}| < M_3\tau$$

где конечное число M_3 не зависит от γ, τ.

После этих вычислений соотношение (3.4) можно переписать в виде

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau} [1 - R(t)]^2\, dt = \gamma V, \quad |V| < M_3\tau$$

Отсюда и в силу выбора кривой S окончательно получим

$$\frac{\tau}{8} < \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau} [1 - R(t)]^2\, dt < \gamma M_3 \tau$$

Постоянная M_3 конечна и не зависит от γ, τ. Поэтому при достаточно малом γ полученное двойное неравенство не может быть выполнено.

Достигнутое противоречие доказывает, что при знакоопределенной квадратичной форме (3.1) система не может быть неустойчивой и, следовательно, справедлива следующая

Теорема 1. Периодическая система (1.1), (1.2) неустойчива по Ляпунову, если квадратичная форма (3.1) знакоопределена в положительном конусе: $r_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Замечания. 1°. Из доказательства следует, что условие знакоопределенности квадратичной формы (3.1) гарантирует устойчивость по Ляпунову на всей числовой оси: $-\infty < t < +\infty$ (перманентная устойчивость [8]).

2°. Для систем с одной степенью свободы ($n = 1$) отсюда следует результат теоремы Арнольда—Мозера [1—4].

5. Автономная система. Ясно, что знакоопределенность квадратичной формы (3.1) гарантирует также и устойчивость автономной системы. Однако в этом случае результат можно усилить. В самом деле, автономная система допускает интеграл энергии $H = h = \text{const}$ и кривые S, S_1 и S_2 можно выбрать на интегральной поверхности $H = h$. Если кривая S содержит точки из δ-окрестности нуля, то для соответствующей интегральной поверхности $h \sim \delta$. Число δ всегда можно полагать меньшим γ^3, а на интегральной поверхности — построить периодическую систему с $n - 1$ степенями свободы. Все оценки в п. 4 проведены с точностью до членов γ^3. Поэтому, учитывая соотношение $H = h$ ($|h| \leqslant \gamma^3$), получим, что условием устойчивости будет знакоопределенность квадратичной формы (3.1) на линейном многообразии

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i = 0 \tag{5.1}$$

Доказательство можно провести и без построения соответствующей периодической системы с $n-1$ степенями свободы, находясь в рамках рассуждений пп. 3, 4.

В самом деле, при условии знакоопределенности квадратичной формы (3.1) на линейном многообразии (5.1) кривую S_1 и многообразие σ_0 можно выбрать в области $|h| \leqslant \gamma^3$. Тогда на Σ справедлива оценка

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i\Big| < \gamma^2 \Big|\sum_{i,\, j=1}^{n} c_{ij} r_i r_j\Big| + \beta\gamma^3 \tag{5.2}$$

где конечное число β не зависит от γ и h.

Выражение

$$\Lambda = \sum_{i,\, j=1}^{n} c_{ij} r_i r_j \pm \varkappa \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i\Big)^2$$

(знак перед $\varkappa$ соответствует знаку квадратичной формы (3.1) при условии (5.1) и $r \neq 0$; $\varkappa$ — надлежащим образом выбранная постоянная) в области $|h| \leqslant \gamma^3$ не обращается в нуль при $r \neq 0$. Поэтому σ_0 можно выбрать таким образом, чтобы на Σ были определены независимые переменные R, φ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i dq_i - q_i dp_i) = 2R d\varphi, \qquad R^2 = |\Lambda|$$

Функцию Гамильтона системы перепишем в виде

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i \pm \gamma^2 R^2 \mp \varkappa\gamma^2 \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i\Big)^2 + \gamma^3 H^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \gamma, t)$$

Теперь с учетом оценки (5.2) в области $|h| \leqslant \gamma^3$ функция Γ на многообразии Σ определяется, как в п. 4. Дальнейшие рассуждения, также не зависящие от конкретного значения постоянной энергии, повторяют рассуждения п. 4, если кривые S_1 и S_2 выбраны в области $|h| \leqslant \gamma^3$ на поверхности $R = 1$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Автономная система (1.1), (1.2) устойчива по Ляпунову, если система уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i = 0, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} r_i r_j = 0, \qquad r_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{5.3}$$

не имеет иного решения, кроме тривиального.

Замечания. 1°. При применении теоремы 2 к исследованию устойчивости стационарного движения механической системы с циклическими координатами гарантируется безусловная устойчивость, ибо приведенное доказательство не зависит от конкретного значения Δc_α ($\alpha = n+1, \ldots, N$)-возмущений циклических постоянных; нужно только иметь в виду, что $|\Delta c_\alpha| \leqslant \gamma^3$.

2°. В случае $n = 2$ условие устойчивости имеет вид

$$c_{11}\lambda_2^2 - 2c_{12}\lambda_1\lambda_2 + c_{22}\lambda_1^2 \neq 0$$

что совпадает с условием теоремы Арнольда—Мозера [1—4].

6. Некоторые обобщения. Метод, примененный при доказательстве теорем 1, 2, позволяет естественным образом обобщить эти теоремы на канонические системы с неаналитической функцией H. Соответствующие условия на H легко вывести.

С другой стороны, условия устойчивости по Ляпунову можно получить и в тех случаях аналитической функции H, когда условия теорем 1, 2 не выполняются. Например, при отсутствии в системе резонансов до $2l_*$-го порядка включительно гамильтониан можно привести к виду [8, 9]

$$H=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i r_i+\sum_{l=2}^{l_*}H_{2l}+H^{(1)}(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$$

$$H_{2l}=\sum_{l_1+\ldots+l_n=l}c_{l_1\ldots l_n}r_1^{l_1}\ldots r_n^{l_n},\quad H^{(1)}=O\left(\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\right)^{l_*+1/2}\right)$$

$$(2r_i=p_i^2+q_i^2;\ \lambda_i,c_{l_1\ldots l_n}\text{ — const};\ \lambda_i\neq 0)$$

и условиями устойчивости будут:

для периодической системы — знакоопределенность

$$H^{(0)}=\sum_{l=2}^{l_*}(l-1)H_{2l}$$

для автономной системы — знакоопределенность $H^{(0)}$ на линейном многообразии (5.1).

Теоремы 1, 2 — частные случаи этих утверждений при $l_*=2$.

Дальнейшее обобщение связано с исследованием системы при наличии резонанса

(6.1) $$m_1\lambda_1+\ldots+m_n\lambda_n=m_*,\quad |m_1|+\ldots+|m_n|=m$$

где m_i, m_* — целые числа, $m_*=0$ для автономной задачи, а число m — порядок резонанса [12]. Отметим, что для резонансов выше четвертого порядка гамильтониан системы приводится к виду (1.2) [9, 12] и вопрос об устойчивости в этих случаях решают теоремы 1, 2. Поэтому дополнительного рассмотрения требуют только резонансы второго — четвертого порядков.

Для резонансов третьего порядка резонансная форма третьей степени $H_3{}^*$ в нормализованном гамильтониане, вообще говоря, не равна нулю. Однако для случая, когда в ряду чисел $m_1,\ldots,m_n$ нет перемены знака, условие $H_3{}^*\not\equiv 0$ приводит к неустойчивости по Ляпунову [9, 12]. При выполнении условия $H_3{}^*\equiv 0$ вопрос об устойчивости решают, как и выше теоремы 1, 2.

При резонансе второго или четвертого порядка резонансная форма четвертой степени $H_4{}^*$ в нормализованном гамильтониане содержит помимо членов тождественного резонанса (3.1) дополнительные резонансные члены. Независимо от конкретного вида этих слагаемых, определенных в [9, 12], вопрос об устойчивости в рассматриваемых случаях также решают теоремы 1 и 2, если в их формулировках заменить функцию H_4 на $H_4{}^*$.

7. Резонанс четвертого порядка. Получим достаточные условия устойчивости на коэффициенты формы $H_4{}^*$ для резонансов четвертого порядка. Для данного случая имеем [9, 12]

(7.1) $$H_4{}^*=H_4(r_1,\ldots,r_n)+gz(r_1,\ldots,r_n)\cos\nu$$
$$z(r_1,\ldots,r_n)=r_1{}^{|m_1|/2}\ldots r_n{}^{|m_n|/2},\quad \nu=m_1\varphi_1+\ldots$$
$$\ldots+m_n\varphi_n-m_*t$$

где g — постоянная, r_i, φ_i $(i=1,\ldots,n)$ — полярные координаты, а функция $H_4{}^*(r_1,\ldots,r_n)$ определяется равенством (3.1).

Условия неустойчивости по Ляпунову в этой задаче имеют вид [9, 12]

$$|g|\,m_1{}^{m_1/2}\ldots m_n{}^{m_n/2}>|H_4(m_1,\ldots,m_n)|,\quad m_i\geqslant 0$$
$$(i=1,\ldots,n)$$

В случае, когда это неравенство не выполнено, достаточные условия устойчивости по Ляпунову можно вывести применяя обобщения теорем 1 и 2. Получение таких условий требует, вообще говоря, анализа знакоопределенности однородной функции четвертого порядка H_4^* от переменных p_i, q_i $(i = 1, \ldots, n)$. Однако в исследуемой задаче функция H_4^* имеет вполне определенный вид (7.1) и зависит от $n + 1$ переменных $r_1, \ldots, r_n, \nu$. Из смысла этих переменных следует, что задача состоит в получении условий знакоопределенности функции H_4^* относительно переменных $r_1, \ldots, r_n$ в положительном конусе.

Можно видеть, что необходимым условием знакоопределенности функции H_4^* является знакоопределенность квадратичной формы H_4. Предположим, что H_4 — знакоопределенная функция. Тогда справедлива

Лемма. Функция H_4^* положительно (отрицательно) определена тогда и только тогда, когда положительно (отрицательно) определена функция

$$H_4^\circ = H_4 - |g|z \quad (H_4^0 = H_4 + |g|z)$$

Доказательство. Из неравенств, справедливых в положительном конусе при $r \neq 0$

$$H_4 > 0 \ (H_4 < 0), \quad |g| \geqslant g\cos\nu, \quad z \geqslant 0$$

следует положительная (отрицательная) определенность функции H_4^* при положительной (отрицательной) определенности функции H_4°. Обратное утверждение вытекает из того, что при знакоопределенности H_4^* функция H_4° не может не быть знакоопределенной, ибо $H_4^* = H_4^\circ$ на множестве $g\cos\nu = -|g|$ $(g\cos\nu = |g|)$.

Лемма оказывается весьма полезной при получении достаточных условий устойчивости на коэффициенты c_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ и g формы H_4^*, что важно для решения конкретных механических задач. Так, в случае резонансов $4\lambda_1 = m_*$ и $2(\lambda_1 \pm \lambda_2) = m_*$ лемма немедленно сводит задачу знакоопределенности H_4^* к соответствующей задаче для квадратичной формы от переменных $r_1, \ldots, r_n$ в положительном конусе.

Ниже на основе леммы проведем подробное исследование периодических систем с двумя степенями свободы и автономных систем с тремя степенями свободы. При этом для простоты изложения рассмотрим только случай, когда в ряду чисел $m_1, \ldots, m_n$ нет смены знака. Кроме того, ограничимся получением только условий положительной определенности функции H_4^*. Отметим, что случай, когда имеется m_i и m_j противоположного знака $(m_i m_j < 0)$, исследуется совершенно аналогично.

Периодическая система с двумя степенями свободы. В данной системе возможны следующие резонансы четвертого порядка:

$$4\lambda_1 = m_*, \quad 2(\lambda_1 + \lambda_2) = m_*, \quad \lambda_1 + 3\lambda_2 = m_*$$

Согласно лемме, для первых двух резонансов задача положительной определенности функции H_4^* сводится к положительной определенности квадратичной формы

$$H_4^\circ = b_{11}r_1^2 + 2b_{12}r_1r_2 + b_{22}r_2^2 \tag{7.2}$$

в положительном конусе. При этом для резонанса $4\lambda_1 = m_*$ имеем

$$b_{11} = c_{11} - |g|, \quad b_{12} = c_{12}, \quad b_{22} = c_{22}$$

а в случае резонанса $2(\lambda_1 + \lambda_2) = m_*$

$$b_{11} = c_{11}, \quad b_{12} = c_{12} - |g|/2, \quad b_{22} = c_{22}$$

Условия положительной определенности (7.2) легко получить: необходимым и достаточным условием будет выполнение одной из групп неравенств

а) $b_{11} > 0, \quad b_{12} \geqslant 0, \quad b_{22} > 0$

б) $b_{11} > 0, \quad b_{12} < 0, \quad b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$

По-иному решается вопрос для резонанса $\lambda_1 + 3\lambda_2 = m_*$, для которого имеем

$$H_4^0 = c_{11}r_1^2 + 2c_{12}r_1r_2 + c_{22}r_2^2 - |g|\, r_1^{1/2}r_2^{3/2} \tag{7.3}$$

Как указывалось выше, необходимым условием положительной определенности функции H_4^*, а значит H_4°, является положительная определенность H_4. Поэтому в (7.3) необходимо должны выполняться неравенства: $c_{11} > 0$, $c_{22} > 0$. При этих условиях на прямых $r_1 = 0$ и $r_2 = 0$ функция H_4° положительно определена. Вне прямой $r_1 = 0$ введем новую переменную $y = r_2/r_1$. Тогда при $r_1 \neq 0$ имеем

$$H_4^\circ = r_1^2 f(y), \quad f(y) = c_{11} + 2c_{12}y + c_{22}y^2 - |g| y\sqrt{y}$$

Значит, необходимым и достаточным условием положительной определенности H_4^* в этом случае является отсутствие неотрицательного корня у уравнения $f(y) = 0$.

Таким образом получены условия положительной определенности функции H_4^* для всех случаев резонанса четвертого порядка в периодической системе с двумя степенями свободы. Аналогично выводятся условия отрицательной определенности. Понятно, что если коэффициенты c_{ij} $(i, j = 1, 2)$ и g зависят аналитически от параметра ε и при $\varepsilon = 0$ форма H_4^* знакоопределена, а $g = 0$, то при достаточно малом $\varepsilon \neq 0$ форма H_4^* также будет знакоопределенной.

Согласно обобщению теоремы 1, выполнение полученных условий знакоопределенности функции H_4^* гарантирует устойчивость системы по Ляпунову.

Автономная система с тремя степенями свободы. Согласно обобщению теоремы 2, достаточным условием устойчивости по Ляпунову для этой системы является знакоопределенность формы H_4^* на линейном многообразии (5.1) при $n = 3$. Как и выше, ограничимся получением условий положительной определенности функции H_4^*; условия отрицательной определенности выводятся совершенно аналогично.

Все возможные резонансы четвертого порядка в рассматриваемой системе сводятся к двум резонансам

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

Для первого из этих резонансов необходимо должно выполняться неравенство $\lambda_1\lambda_2 < 0$, а функция H_4^* имеет вид

$$H_4^* = H_4(r_1, r_2, r_3) + g r_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos \nu$$

Поэтому на многообразии (5.1) получим

$$H_4^\circ = D(r_1, r_2) - |g| r_1^{1/2} r_2^{3/2} \tag{7.4}$$

$$D(r_1, r_2) = d_{11}r_1^2 + 2d_{12}r_1r_2 + d_{22}r_2^2 \tag{7.5}$$

$$d_{ii} = c_{ii} + c_{33}\frac{\lambda_i^2}{\lambda_3^2} - 2c_{i3}\frac{\lambda_i}{\lambda_3} \quad (i = 1, 2)$$

$$d_{12} = c_{12} - c_{13}\frac{\lambda_2}{\lambda_3} - c_{23}\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + c_{33}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3^2}$$

Функция (7.4) имеет такой же вид, как и функция (7.3). Поэтому дальнейший анализ знакоопределенности H_4° совпадает с аналогичным анализом для (7.3). При этом нужно только учесть дополнительное условие

$$r_3 = -\frac{1}{\lambda_3}(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2) \geqslant 0$$

Приведем полученный результат.

Необходимым и достаточным условием положительной определенности H_4^* на многообразии (5.1) является

$$f_0(y) - |g| y\sqrt{y} \neq 0, \quad f_0(y) = d_{11} + 2d_{12}y + d_{22}y^2$$

где $y \geqslant 3$, если $\lambda_1\lambda_3 > 0$, и $0 \leqslant y \leqslant 3$, если $\lambda_1\lambda_3 < 0$.

Анализ резонанса $\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$ проводится аналогично предыдущему. При этом в зависимости от знаков постоянных λ_1, λ_2, λ_3 получим три группы условий.

Сформулируем конечный результат.

Функция H_4° на многообразии (5.1) имеет вид

$$H_4^\circ = D(r_1, r_2) + |g|\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} r_1^{3/2} r_2^{1/2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} r_1^{1/2} r_2^{3/2}\right)$$

в котором $D(r_1, r_2)$ определяется формулами (7.5). Необходимым и достаточным условием положительной определенности H_4^* на многообразии (5.1) является

$$f_0(y) + |g|\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\sqrt{y} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} y\sqrt{y}\right) \neq 0$$

где в зависимости от знаков постоянных λ_1, λ_2, λ_3 переменная y меняется в следующих пределах:

а) $\lambda_1\lambda_2 > 0, \quad y \geqslant 0$

б) $\lambda_1\lambda_2 < 0, \quad \lambda_1\lambda_3 > 0, \quad y \geqslant -\lambda_1/\lambda_2$

в) $\lambda_1\lambda_2 < 0, \quad \lambda_1\lambda_3 < 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant -\lambda_1/\lambda_2$

8. Устойчивость треугольных точек либрации ограниченной задачи трех тел. Постановка задачи, ее решение в линейном приближении, а также фундаментальные результаты по нелинейному анализу этой задачи изложены в [9]. Пользуясь этими результатами, ограничимся рассмотрением двух частных случаев.

Плоская эллиптическая задача трех тел. В этом случае система имеет две степени свободы, а уравнения возмущенного движения принимают вид (1.1) с гамильтонианом, зависящим периодически от времени. Кроме того, гамильтониан H зависит от двух параметров: μ — отношения массы одного из двух притягивающих тел к суммарной массе обоих тел и e — эксцентриситета.

Согласно [9], при достаточно малом эксцентриситете и всех значениях μ из интервала

$$(8.1) \qquad 0{,}02429433\ldots = \mu_1 < \mu < \mu^* = 0{,}0385208\ldots$$

за исключением отвечающих резонансам

$$(8.2) \qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \; 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \; 3\lambda_2 = -2$$

в нормализованном гамильтониане форма $H_3^* \equiv 0$, а форма четвертого порядка H_4^* имеет вид

$$(8.3) \qquad H_4^* = c_{11}(\mu, e)\, r_1^2 + 2c_{12}(\mu, e)\, r_1 r_2 + c_{22}(\mu, e)\, r_2^2 + \\ + g(\mu, e)\, r_1^{|m_1|/2} r_2^{|m_2|/2} \cos\nu$$

При этом $g(\mu, e) \equiv 0$, если отсутствуют резонансы четвертого порядка, а на других возможных в интервале (8.1) резонансных кривых

$$(8.4) \qquad 3\lambda_1 + \lambda_2 = 2, \quad 3\lambda_1 - \lambda_2 = 3, \quad \lambda_1 - 2\lambda_2 = 2, \quad \lambda_1 + 3\lambda_2 = -1, \\ 4\lambda_1 = 3$$

функция g зависит только от e, обращаясь в нуль при $e = 0$. Коэффициенты c_{ij} $(i, j = 1, 2)$ также являются аналитическими функциями e и при $e = 0$ принимают положительные значения, причем: $c_{11}(\mu, 0) > 0{,}5$, $c_{12}(\mu, 0) > 10{,}0$, $c_{22}(\mu, 0) > 7{,}5$. Поэтому при достаточно малом эксцентриситете $0 \leqslant e \ll 1$ функция (8.3) положительно определена независимо от наличия резонансов (8.4). Из теоремы 1 и ее обобщения следует

Теорема 3. Треугольные точки либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел при достаточно малом эксцентриситете устойчивы по Ляпунову для всех значений μ из интервала (8.1), за исключением отвечающих резонансам (8.2).

Замечание. Для значений μ, принадлежащих интервалу (8.1), и малых e неисследованным остался резонанс $3\lambda_2 = -2$, требующий анализа членов порядка e^2 и выше в коэффициентах нормализованного гамильтониана; согласно [9], резонансы $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, $3\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ приводят к неустойчивости.

Для произвольных нерезонансных, в смысле отсутствия резонансов второго — четвертого порядков, значений μ, e в результате проведенного в [13] численного исследования в области устойчивости в первом приближении выделены области МС (Маркеева — Сокольского), где форма (3.1) является знакоопределенной (см. также [9], с. 168—169, рис. 18, 19) Применение к этим результатам теоремы 1 устанавливает

Теорема 4. Треугольные точки либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел устойчивы по Ляпунову для всех нерезонансных значений параметров μ, e из областей МС.

Пространственная круговая задача трех тел. В этой задаче гамильтониан не зависит явно от времени и $n = 3$. В [9] показано, что для всех значений μ из интервалов

$$0 < \mu < 0{,}010913\ldots;\quad 0{,}016376\ldots < \mu < \mu_1 = 0{,}024293\ldots \quad \mu_1 < \mu < 0{,}038520\ldots \tag{8.5}$$

система (5.3) не имеет другого решения, кроме тривиального. Следовательно, из теоремы 2 вытекает

Теорема 5. Треугольные точки либрации пространственной ограниченной задачи трех тел устойчивы по Ляпунову для всех значений параметра μ из интервалов (8.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Устойчивость положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае.— Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 2, с. 255—257.
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движений в классической и небесной механике.— Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 6, с. 91—192.
3. *Moser J.* On invariant curves of area-preserving mapping of annulus.— Nachr. Akad. Wiss Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1962, No. 1, p. 1—20.
4. *Moser J.* Lectures of Hamiltonian system.— Mem. Amer. Math. Soc., 1968, v. 81, p. 1—60.
5. *Маркеев А. П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса.— ПММ, 1963, т. 32, вып. 4, с. 738—744.
6. *Маркеев А. П.* К задаче об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 6, с. 997—1004.
7. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 5, с. 791—799.
8. *Биркгоф Д.* Динамические системы. М.— Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
9. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
10. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики.— Избр. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972, с. 9—356.
11. *Darboux G.* Sur le probleme de Pfaff.— Bul. math. astron., 1882, t. 6, p. 14—36 et 49—68.
12. *Куницын А. Л.*, *Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях.— Итоги науки и техники. Общая механика, 1979, т. 4, с. 58—139.
13. *Маркеев А. П.*, *Сокольский А. Г.* Численное исследование устойчивости лагранжевых решений эллиптической ограниченной задачи трех тел.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 1, с. 49—55.

Москва

Поступила в редакцию
19.VI.1984