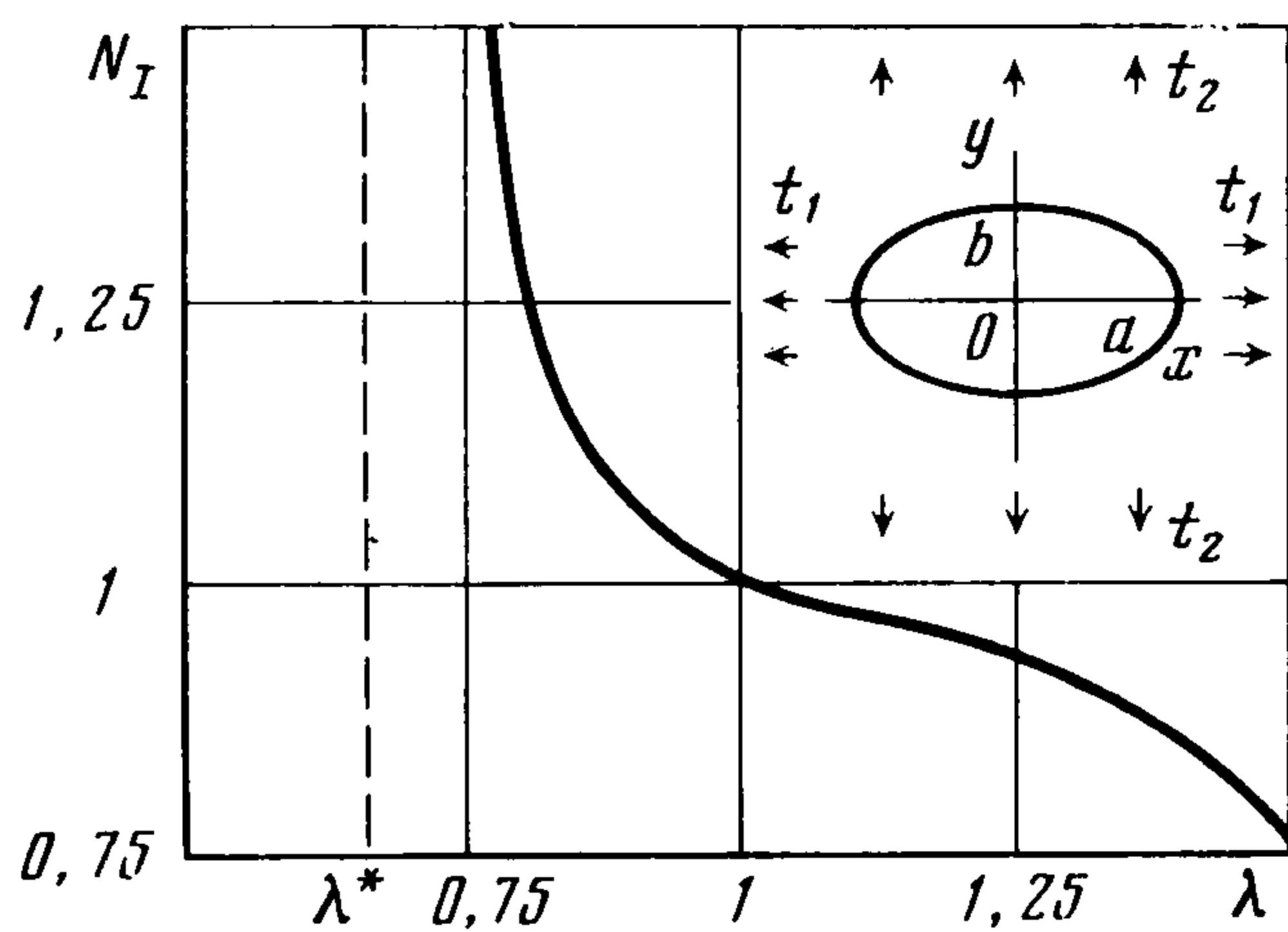


# РАВНОВЕСИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО УПРУГОГО ТЕЛА, ОСЛАБЛЕННОГО ПЛОСКОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ

Александров В. М., Соболев Б. В.

Рассматривается задача о нагружении нормальным давлением берегов плоской эллиптической трещины. Под действием нагрузки трещина находится в раскрытом состоянии. Среда, в которой она расположена, предварительно подвергнута однородному двухосному растяжению или сжатию вдоль плоскости трещины. Рассмотрена модель несжимаемого неогуковского материала [1]. Задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода. В случае, когда интенсивность предварительного нагружения в обоих направлениях одинакова, задача имеет точное решение. Если же коэффициенты предварительного растяжения мало различаются, то возможно построение решения задачи асимптотическим методом [2]. Показано, что, как и в случае равных коэффициентов [3]<sup>1</sup>, начальное напряжение не меняет порядка особенности поля напряжений вблизи ребра трещины и влияет лишь на коэффициент интенсивности нормальных напряжений.

Аналогичные задачи для случая равных коэффициентов предварительной деформации в теле, содержащем круглую трещину, рассмотрены в работах [4, 5]. Построено



Фиг. 1

направлениях действуют равномерные нагрузки  $\sigma_x = t_1$ ,  $\sigma_y = t_2$ , вызывающие конечную деформацию неогуковского тела (фиг. 1). Из соотношений теории малых деформаций, наложенных на конечную деформацию [1], вытекают следующие уравнения равновесия, которые описывают деформацию предварительно нагруженного тела в случае неогуковского материала [7]:

$$(1.1) \quad \lambda_1^2 \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x^2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial y^2} + \lambda_3^2 \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial z^2} + \frac{2}{G} \text{grad } q = 0, \quad \text{div } \mathbf{L} = 0$$

Здесь  $\mathbf{L} = \{u, v, w\}$  — вектор добавочных перемещений,  $x, y, z$  — декартовы координаты в предварительно деформированном состоянии,  $q$  — функция добавочного давления, наличие которой связано с несжимаемостью материала,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — коэффициенты предварительного растяжения вдоль координатных осей,  $G$  — постоянная материала.

Поскольку материал несжимаем, для коэффициентов главных растяжений имеет место соотношение [1]  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ . Предполагается, что в предварительно напряженном состоянии  $\sigma_z = 0$ .

Связь коэффициентов предварительного растяжения с напряжениями имеет вид

$$t_1 = G (\lambda_1^2 - \lambda_3^2), \quad t_2 = G (\lambda_2^2 - \lambda_3^2)$$

Пусть, в частности, область, занимаемая трещиной в ненагруженном состоянии, эллиптическая  $\Omega_1: x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 \leq 1$ . В этом случае, в результате предварительной деформации, трещина займет в плане область  $\Omega: x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ , размеры которой

<sup>1</sup> См. также: Филиппова Л. М. О раскрытии круглой трещины в предварительно напряженном упругом теле. II. Всес. научн. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела». Тез. докл. Днепропетров. гос. ун-т, 1981, с. 80.

связаны с исходными размерами трещины следующим образом:  $a = \lambda_1 a_1$ ,  $b = \lambda_2 b_1$ . В частности, круговая трещина может принять эллиптическую форму (если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ), а при соответствующем подборе коэффициентов предварительной деформации эллиптическая трещина может стать и круговой.

Для нагрузки, приложенной к берегам трещины, введем обозначение  $\sigma_z = -p(x, y)$ .

Краевые условия в плоскости  $z = 0$  в силу симметрии задачи относительно этой плоскости представим в виде

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$q + G\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{p}{2}; \quad (x, y) \in \Omega, \quad w = 0; \quad (x, y) \notin \Omega$$

Следствием уравнений (1.1) является уравнение Лапласа для функции  $q(x, y, z)$ , которым можно воспользоваться для определения функции добавочного давления.

Применим к уравнениям (1.1), уравнению Лапласа  $\Delta q = 0$  и граничным условиям (1.2) двумерное интегральное преобразование Фурье

$$(1.3) \quad f^*(\alpha, \beta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-i(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$(1.4) \quad \frac{d^2 u^*}{dz^2} - \lambda_1^2 \lambda_2^2 \nu^2 u^* = -\frac{2i\alpha \lambda_1^2 \lambda_2^2}{G} q^*$$

$$\frac{d^2 v^*}{dz^2} - \lambda_1^2 \lambda_2^2 \nu^2 v^* = -\frac{2i\beta \lambda_1^2 \lambda_2^2}{G} q^*$$

$$\frac{d^2 w^*}{dz^2} - \lambda_1^2 \lambda_2^2 \nu^2 w^* = -\frac{2\lambda_1^2 \lambda_2^2}{G} \frac{dq^*}{dz}; \quad \nu^2 = \lambda_1^2 \alpha^2 + \lambda_2^2 \beta^2$$

$$(1.5) \quad i(\alpha u^* + \beta v^*) + dw^*/dz = 0$$

$$(1.6) \quad d^2 q^*/dz^2 - \kappa^2 q^* = 0, \quad \kappa^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Граничные условия при  $z = 0$  в терминах изображений Фурье примут вид

$$(1.7) \quad du^*/dz + i\alpha w^* = 0, \quad dv^*/dz + i\beta w^* = 0, \quad q^* + G\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} \frac{dw^*}{dz} = -\frac{p^*}{2}$$

Из (1.6) непосредственно получим

$$(1.8) \quad q^* = Q(\alpha, \beta) e^{\kappa z}$$

Это позволяет построить общее решение системы дифференциальных уравнений (1.4). Решая каждое из них в отдельности, находим

$$(1.9) \quad (u^*, v^*, w^*) = (U(\alpha, \beta), V(\alpha, \beta), W(\alpha, \beta)) e^{-\lambda_1 \lambda_2 \nu z} +$$

$$+ (-i\alpha, -i\beta, \lambda_1^2 \lambda_2^2 \kappa) Q(\alpha, \beta) \frac{2}{G} \frac{e^{-\kappa z}}{\kappa^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^2 \nu^2}$$

Используя условие несжимаемости в виде (1.5), можно исключить  $W(\alpha, \beta)$  из (1.9):

$$W(\alpha, \beta) = i \frac{\alpha U(\alpha, \beta) + \beta V(\alpha, \beta)}{\lambda_1 \lambda_2 \nu}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.7), получим

$$q^* = \frac{G}{2} N(\alpha, \beta, \lambda_1 \lambda_2) w^*$$

Отсюда, в результате перехода к оригиналам Фурье, вытекает следующее интегральное уравнение для определения функции вертикального перемещения берега трещины:

$$(1.10) \quad \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N(\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2) \exp\{i[\alpha(x - \xi) + \beta(y - \eta)]\} d\alpha d\beta d\Omega =$$

$$= \frac{4\pi^2}{G} p(x, y)$$

$$\gamma(x, y) = w(x, y, 0); (x, y) \in \Omega$$

$$N(\alpha, \beta, \lambda_1 \lambda_2) = \frac{\kappa^4 - \lambda_1^4 \lambda_2^4 v^4 - 2\kappa^2 (\kappa - \lambda_1 \lambda_2 v)^2}{\kappa \lambda_1^2 \lambda_2^2 (\kappa^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^2 v^2)}$$

2. Рассмотрим случай, когда коэффициенты предварительного растяжения в обоих направлениях одинаковы, т. е.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . При этом, очевидно,  $v = \lambda \kappa$  и

$$N(\alpha, \beta, \lambda) = 2T(\lambda) \kappa; \quad T(\lambda) = \frac{\lambda^9 + \lambda^6 + 3\lambda^3 - 1}{2\lambda^4 (\lambda^3 + 1)}$$

В результате непосредственных вычислений [8] интегральное уравнение (1.10) в рассматриваемом случае приводится к виду

$$(2.1) \quad T(\lambda) \Delta \iint_{\Omega} \gamma(x, y) \frac{d\Omega}{R} = -\frac{\pi}{R} p(x, y)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

Как нетрудно заметить, функция  $T(\lambda)$  монотонно возрастает при  $\lambda^* < \lambda < \infty$ ;  $K(\lambda^*) = 0$ ,  $\lambda^* = 0,667$ . Было установлено [3, 7], что при  $\lambda \rightarrow \lambda^*$  сжатое пространство теряет устойчивость. Этот предельный случай в рассматриваемой здесь задаче соответствует разрушению неогуковского тела с трещиной независимо от величины приложенного дополнительного давления.

Если предварительная деформация отсутствует ( $\lambda = 1$ ), то из интегрального уравнения (2.1) вытекает соответствующее уравнение классической задачи в случае несжимаемого материала (т. е. коэффициент Пуассона равен  $1/2$ ).

Предположим далее, что коэффициенты растяжения в направлениях координатных осей  $Ox$  и  $Oy$  различны, но при этом  $\lambda_1 = \lambda + \varepsilon$ ;  $\lambda_2 = \lambda - \varepsilon$  и предполагается, что  $\varepsilon/\lambda \ll 1$ . В этом случае возможно следующее асимптотическое разложение:

$$(2.2) \quad N(\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2) = D(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = 2T(\lambda) \kappa + 2M(\lambda) \varepsilon \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\kappa} + O(\varepsilon^2)$$

$$M(\lambda) = \frac{\lambda^9 + 2\lambda^6 + \lambda^3 + 2}{\lambda^2 (\lambda^3 + 1)^2}.$$

Такое представление, как и в предыдущем случае, позволяет вычислить ядро интегрального уравнения (1.10). Пользуясь результатами [8], заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\kappa} \exp\{i[\alpha(x - \xi) + \beta(y - \eta)]\} d\alpha d\beta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\pi}{R}$$

Таким образом получим в рассматриваемом случае следующее интегральное уравнение относительно функции  $\gamma(x, y)$ :

$$(2.3) \quad T(\lambda) \Delta \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) \frac{d\Omega}{R} - \frac{M(\lambda)}{2} \varepsilon \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) \frac{d\Omega}{R} +$$

$$+ O(\varepsilon^2) = -\frac{\pi}{G} p(x, y); \quad (x, y) \in \Omega$$

Интегральное уравнение (2.2) получается из (2.3) в результате предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

3. Перейдем к построению асимптотического решения уравнения (2.3) в случае эллиптической области  $\Omega$ . При этом функцию вертикальных перемещений берега трещины будем искать в виде

$$(3.1) \quad \gamma(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(x, y) \varepsilon^n$$

Подставляя (3.1) в (2.3) и приравнявая выражения при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим для определения первых двух членов разложения (3.1) систему интегральных уравнений

$$(3.2) \quad T(\lambda) \Delta \iint_{\Omega} \gamma_0(\xi, \eta) \frac{d\Omega}{R} = -\frac{\pi}{G} p(x, y); \quad (x, y) \in \Omega$$

$$T(\lambda) \Delta \iint_{\Omega} \gamma_1(\xi, \eta) \frac{d\Omega}{R} = \frac{M(\lambda)}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{\Omega} \gamma_0(\xi, \eta) \frac{d\Omega}{R}$$

Используя результат, полученный в [9], можно показать, что при

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^l p_{ij} x^i y^j \left( \begin{matrix} r+l=n \\ p_{ij} = \text{const} \end{matrix} \right)$$

решение первого из уравнений (3.2) для эллиптической области  $\Omega$  имеет вид

$$\gamma_0(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^m g_{ij} x^i y^j \left( \begin{matrix} s+m=n \\ g_{ij} = \text{const} \end{matrix} \right)$$

Коэффициенты  $g_{ij}$  выражаются через  $p_{ij}$  по схеме, изложенной, например, в [2].

Рассмотрим случай равномерного давления на берега трещины  $p(x, y) = p = \text{const}$ . Решая последовательно систему уравнений (3.2) аналогично тому, как это сделано, например, в [2], получим

$$(3.3) \quad \gamma(x, y) = \frac{1}{T(\lambda)} \frac{bp}{2GE(k)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} [1 - \varepsilon A(\lambda) B(k)] + O(\varepsilon^2)$$

$$A(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{2T(\lambda)}, \quad B(k) = \frac{(2 - k^2)E(k) - 2(1 - k^2)K(k)}{k^2E(k)}; \quad k = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

Для определенности здесь считаем, что  $a \geq b$ ;  $K(k)$ ,  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Таким образом, результат (3.3) позволяет заключить, что в случае, когда коэффициенты предварительного растяжения в обоих направлениях достаточно близки, как и при их равенстве, предварительная деформация не меняет порядка особенности в окрестности контура трещины. При этом коэффициент интенсивности нормальных напряжений пропорционален соответствующей величине классической задачи ( $\lambda = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ ).

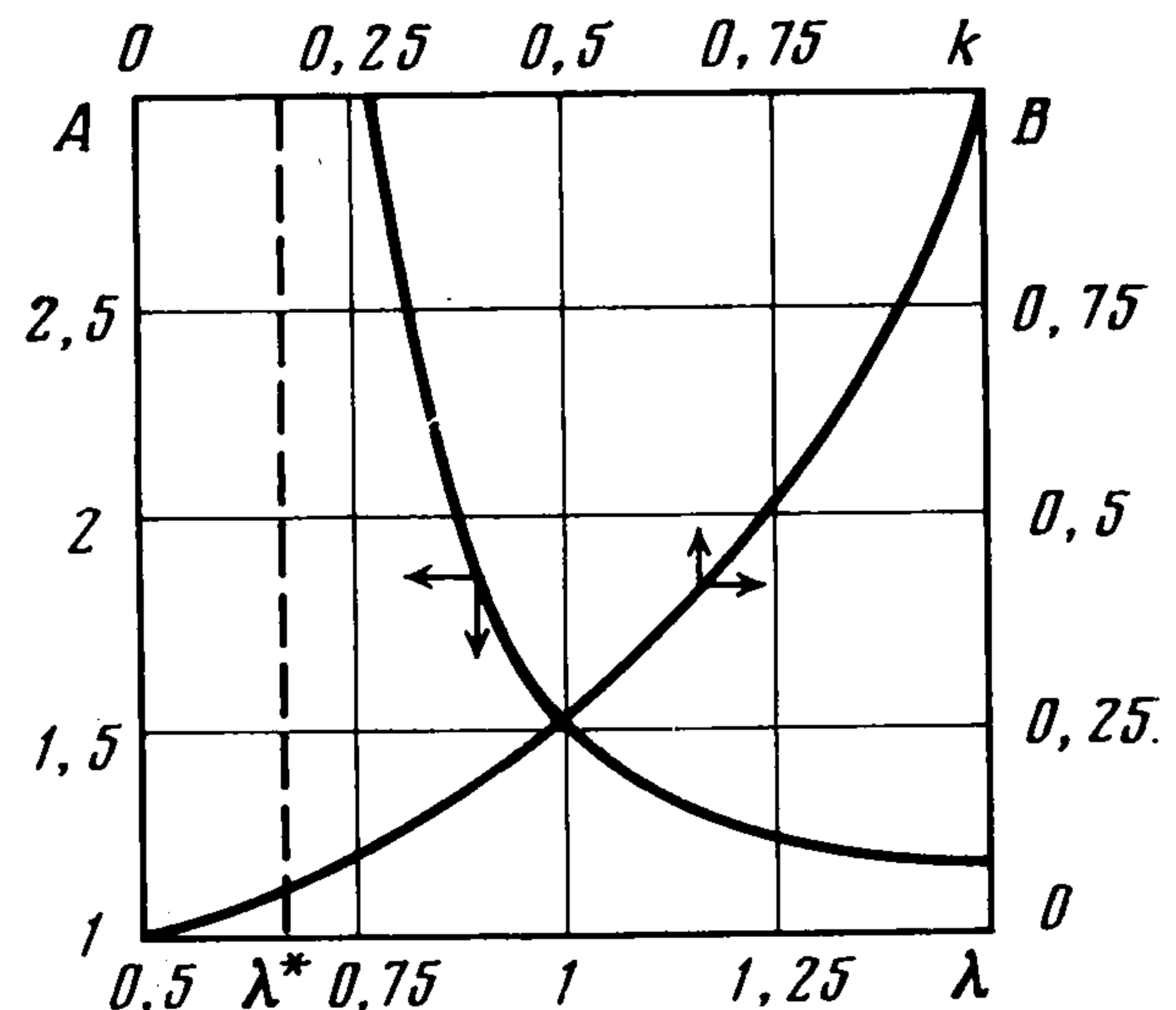
В качестве параметра, характеризующего изменение коэффициента интенсивности нормальных напряжений в результате предварительной деформации, удобно рассматривать  $N_I = K_{I0}/K_{I*}$ , где  $K_{I0}$  — коэффициент интенсивности нормальных напряжений в окрестности контура эллиптической трещины в случае, когда тело подвергнуто предварительной конечной деформации. Интенсивность растяжения в обоих направлениях одинакова ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ). Величина  $K_{I*}$  соответствует случаю отсутствия предварительной деформации ( $\lambda = 1$ ).

На фиг. 1 представлен график изменения параметра  $N_I = 1/T(\lambda)$ . Если тело подвергнуто предварительному растяжению ( $\lambda > 1$ ), то  $N_I < 1$ . Это свидетельствует о том, что предварительное двухосное растяжение в плоскости трещины способствует упрочнению тела по сравнению с классическим случаем  $\lambda = 1$ . Иными словами, предварительное двустороннее конечное растяжение снижает значение коэффициента интенсивности нормальных напряжений. В случае же, когда тело подвергнуто двустороннему сжатию в плоскости трещины  $\lambda^* < \lambda < 1$ , значение коэффициента интенсивности нормальных напряжений возрастает. Этот случай соответствует снижению несущей способности тела, содержащего плоскую трещину.

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений  $K_{I\varepsilon}$  в случае, когда коэффициенты предварительной деформации  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  мало различаются, следует вычислять по формуле  $K_{I\varepsilon} = N_I [1 - \varepsilon B(k) A(\lambda)] K_{I*} + O(\varepsilon^2)$ .

Изменения коэффициентов  $A(\lambda)$  и  $B(k)$  по соответствующим параметрам изображены на фиг. 2.

Отметим, что хотя результаты получены для неогукковского материала, предложенный метод исследования пространственных задач о трещинах в преднапряженных геометрически нелинейных упругих средах применим для любого гиперупругого несжимаемого материала. При этом также сохраняются основные качественные выводы.



Фиг. 2

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. *Гузъ А. Н.* Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (пространственные статические задачи).— Прикл. механика, 1981, т. 17, № 6, с. 3—20.
4. *Dhaliwal R. S., Singh B. M., Rokne J. G.* Axisymmetric contact and crack problems for an initially stressed neo-Hookean elastic layer.— Internat. J. Engng Sci., 1980, v. 18, No. 1, p. 169—179.
5. *Haughton D. M.* Penny-shaped cracks in a finitely deformed elastic solid.— Internat. J. Solid and Structure, 1982, v. 18, No. 8, p. 699—704.
6. *Selvadurai A. R. S.* The penny-shaped crack problem for a finitely deformed incompressible elastic solid.— Internat. J. Fracture, 1980, v. 16, No. 4, p. 327—333.
7. *Филиппова Л. М.* Пространственная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 1080—1084.
8. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
9. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
21.VI.1983

## ОБЪЯВЛЕНИЕ

### III ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА» БУДЕТ ПРОВЕДЕНА В ИЮНЕ 1985 Г. В ХАРЬКОВЕ

Конференцию организуют: Научный совет АН СССР по проблемам прочности и пластичности, Институт проблем машиностроения АН УССР, Харьковский политехнический институт и Харьковское областное правление научно-технического общества «Машпром».

Работа конференции будет проходить в пяти секциях.

1. Контактные задачи механики упругого и вязкоупругого тела.
2. Физические и геометрические нелинейные задачи контактного взаимодействия.
3. Смешанные задачи теории стержней, пластин и оболочек.
4. Смешанные задачи теории концентрации напряжений.
5. Динамические контактные задачи.

Адрес оргкомитета: 310046, Харьков-46, ул. Пожарского, 2/10. Институт проблем машиностроения АН УССР. Телефоны: 94-37-43, 94-34-87, 94-29-32.

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 24.01.85      Подписано к печати 20.03.85      Т-00970      Формат бумаги 70×108<sup>1/16</sup>  
Высокая печать      Усл. печ. л. 15,4      Усл. кр.-отг. 34,7      Уч.-изд. л. 15,8      Бум. л. 5,5  
Тираж 2231 экз.      Зак. 1024

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,  
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21  
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 6