из вариационной задачи для функционала Лагранжа составного тела

$$I_1 = \sum_{n=1}^{2} \left[\iint\limits_{S^p_{(n)}} \mathbf{P}_{(n)} \mathbf{U}^{(n)} dS_{(n)} + \iiint\limits_{V_{(n)}} (\mathbf{F}_{(n)} \mathbf{U}^{(n)} - W_{(n)})\, dV_{(n)} \right]$$

при ограничении (1.5) на основании известного метода [2, 5] введения неопределенного множителя Лагранжа, механическим аналогом которого и является вектор реактивных усилий взаимодействия $\mathbf{q}$. Такой прием используется, в частности, в смешанных линейных задачах с неизвестными реакциями в связях для системы деформируемых элементов с конечным числом степеней свободы [2].

Отметим также, что в рамках соотношений классической теории оболочек Кирхгофа — Лява при дифференциальной постановке задач сопряжения оболочек вместо (2.9) имеется возможность удовлетворить лишь четырем скалярным условиям сопряжения

(2.10) $$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(2)}, \quad \mathbf{n}_{(1)} \mathbf{m}^*_{(1)} = \mathbf{n}_{(2)} \mathbf{m}^*_{(2)} \quad (x^i_{(n)} \in C^q)$$

Поэтому преобразование при помощи метода неопределенных множителей Лагранжа обычного функционала Лагранжа, записываемого для составной оболочки при дополнительных условиях (2.10), приводит к результату, отличному от полученного.

Область применения сформулированного подхода не ограничивается только задачами сопряжения составных тел и тонких оболочек. На его основе могут быть разработаны эффективные прямые методы для решения трехмерных задач теории упругости и двумерных задач теории оболочек в неканонических областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прагер В.* Вариационные принципы линейной статической теории упругости при разрывных смещениях, деформациях и напряжениях.— Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1969, № 5, с. 139—144.
2. *Розин Л. А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 223 с.
3. *Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 287 с.
4. *Галимов К. З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. 326 с.
5. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.

Казань

Поступила в редакцию
1.III.1983

УДК 531.0(075.8)

О РЕШЕНИИ В НАПРЯЖЕНИЯХ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ ПО МЕТОДУ ВОЗМУЩЕНИЙ

Кунташев П. А., Немировский Ю. В.

На основании общих свойств положительной определенности оператора теории упругости доказывается сходимость в энергетической метрике решения задачи термоупругости по методу возмущений для трехмерного непрерывно неоднородного изотропного тела.

Ранее [1] для плоской задачи теории упругости неоднородных тел на основании свойства представления гармонических функций через интегралы со слабой особенностью и свойств многомерных сингулярных интегралов доказана сходимость решения по методу возмущений. В [2] для одного частного случая плоской задачи дано сравнение известного точного решения и решения, построенного по методу возмущений, и отмечено их совпадение в области сходимости. Другой подход, опирающийся на теорию интегральных уравнений, изложен в [3], где дан анализ трехмерных граничных задач линейной теории упругости и термоупругости для однородных и ку-

кусочно-однородных сред, включая теоремы существования и единственности решений.

1. Рассмотрим линейно-упругое неоднородное изотропное тело, занимающее конечную область V с поверхностью A. Тело закреплено на части A_1 поверхности A, где смещения u_i отсутствуют. На остальной части A_2 поверхности A действует поверхностная нагрузка $p_i(\cdot)$, которая совместно с объемными силами $X_i(\cdot)$ и температурным полем $T(\cdot)$ вызывает упругие напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij}.

Далее, следуя общим методам [4], дадим постановку задачи термоупругости, докажем существование и единственность ее решения.

Обозначим тензор тепловых деформаций $\varepsilon_{ij}^{\circ} = \alpha (T - T^{\circ}) \delta_{ij}$, где α — коэффициент температурного расширения, T_0 — начальная температура в недеформированном состоянии, δ_{ij} — символы Кронекера. Предполагаем, что характер напряженно-деформированного состояния и теплового поля позволяет применить линейные соотношения Коши для деформаций, соотношения Дюгамеля — Неймана

$$\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{\circ} = B_1 \sigma_{nn}, \quad e_{ij} - e_{ij}^{\circ} = B_2 s_{ij} \tag{1.1}$$

Здесь s_{ij}, e_{ij} — девиаторные части тензоров напряжений и деформаций; по повторяющимся индексам производится суммирование, а функции B_1, B_2, характеризующие распределение податливости в упругом теле, выражаются через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν в виде

$$B_1 = E^{-1}(1 - 2\nu) > 0, \quad B_2 = E^{-1}(1 + \nu) > 0$$

Функции $B_1(\cdot)$, $B_2(\cdot)$ считаем непрерывными и строго положительными на V. Будем считать, что вместе с внешней нагрузкой задан и характеризующий ее тензор σ_{ij}°, удовлетворяющий условиям

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ji,j} + X_i = 0 \quad \text{на } V; \quad \sigma_{ji}^{\circ} n_j = p_i \quad \text{на } A_2 \tag{1.2}$$

Здесь запятая означает частное дифференцирование по соответствующей координате, n_j — компоненты вектора единичной внешней нормали к поверхности A_2. Относительно характера внешней нагрузки и теплового поля примем, что соответствующие величины σ°_{ij}, ε_{ij}° принадлежат пространству $L_2(V)$ девятимерных вектор-функций, суммируемых с квадратом

$$\| \sigma^{\circ} \|^2 = (\sigma^{\circ}, \sigma^{\circ}) = \int \sigma_{ij}^{\circ} \sigma_{ij}^{\circ} dV < \infty, \quad (\varepsilon^{\circ}, \varepsilon^{\circ}) < \infty \tag{1.3}$$

Для тензоров напряжений из $L_2(V)$ введем скалярное произведение

$$[\bar{\sigma}, \sigma]_B = \int \left(\frac{1}{3} B_1 \bar{\sigma}_{kk} \sigma_{nn} + B_2 \bar{s}_{ij} s_{ij} \right) dV \tag{1.4}$$

Норму, индуцируемую скалярным произведением (1.4), обозначим $\| \ \|_B$ и назовем «энергетической». Можно проверить, что норма $\| \ \|_B$ эквивалентна норме $L_2(V)$ и

$$[\sigma, \sigma]_B \leqslant \beta^2 (\sigma, \sigma), \quad (\sigma, \sigma) \leqslant \alpha^2 [\sigma, \sigma]_B \tag{1.5}$$

$$\left(\alpha^2 = \left(\min_{(\cdot) \in V} \min (B_1(\cdot), B_2(\cdot))\right)^{-1}, \quad \beta^2 = \max_{(\cdot) \in V} \max (B_1(\cdot), B_2(\cdot))\right)$$

Введем пространство D непрерывно дифференцируемых тензоров на V, удовлетворяющих однородным уравнениям равновесия и однородным силовым граничным условиям

$$D = \{\sigma_{ij} \mid \sigma_{ij} \in C^1(V); \ \sigma_{ji,j} = 0 \text{ на } V; \ \sigma_{ji} n_j = 0 \text{ на } A_2\} \tag{1.6}$$

Пополнение пространства D в энергетической метрике будем называть энергетическим пространством Ψ. По построению, $D \subset C^1(V) \subset L_2(V)$. Покажем, что $\Psi \subset L_2(V)$. В самом деле, поскольку в соответствии с условиями (1.5) энергетическая норма и норма $L_2(V)$ эквивалентны, замыкание $[D]$ в той и в другой метрике совпадают и равны Ψ. Тогда искомое включение $\Psi \subset L_2(V)$ вытекает из известного [5] свойства замыканий $M_1 \subset M_2 \Rightarrow [M_1] \subset [M_2]$ и полноты $L_2(V)$

$$D \subset \Psi \subset L_2(V) \tag{1.7}$$

Обобщенным решением задачи термоупругости назовем распределение напряжений $\sigma = \sigma^{\circ} + \tau$, минимизирующее на Ψ функционал Кастильяно [6]

$$K(\tau^*) = \| \sigma^{\circ} + \tau^* \|_B^2 + 2(\varepsilon^{\circ}, \tau^*) \to \min_{\tau^* \in \Psi} \tag{1.8}$$

Необходимое условие минимума этого функционала

$$\tau : [\tau, \tau^*]_B = l(\tau^*), \quad \forall \tau^* \in \Psi \quad l(\tau^*) = -(\varepsilon^{\circ}, \tau^*) - [\sigma^{\circ}, \tau^*]_B \tag{1.9}$$

Покажем, что здесь l — линейный ограниченный на Ψ функционал. Имеем (супремум берется при $\| \tau \|_B = 1$)

$$\| l \|_B = \sup | -(\varepsilon^\circ, \tau) - [\sigma^\circ, \tau]_B | \leqslant \sup | (\varepsilon^\circ, \tau) | + \sup | [\sigma^\circ, \tau]_B | \leqslant$$
$$\leqslant \sup (\| \varepsilon^\circ \|^2 \| \tau \|^2)^{1/2} + \sup (\| \sigma^\circ \|_B^2 \| \tau \|_B^2)^{1/2} \leqslant \alpha \| \varepsilon^\circ \| + \beta \| \sigma^\circ \| < \infty$$

По теореме Риса [7], в гильбертовом пространстве Ψ существует единственный элемент τ, дающий представление линейного ограниченного на Ψ функционала l в виде скалярного произведения (1.9). Функционал Кастильяно подстановкой (1.9) в (1.8) приводится к виду $K(\tau^*) = \| \tau - \tau^* \|_B^2 - \| \tau \|_B^2 + \| \sigma^* \|_B^2$, который показывает, что элемент $\tau \in \Psi$, удовлетворяющий условию (1.9), доставляет абсолютный минимум функционалу Кастильяно.

Таким образом, существование и единственность обобщенного решения задачи термоупругости доказаны.

2. Часто практическое решение задачи термоупругости для неоднородного тела бывает связано с вычислительными трудностями. Во многих случаях удобно воспользоваться процедурой метода возмущений, которая сводит задачу термоупругости неоднородного тела к серии задач термоупругости для однородного тела.

Разобьем заданное неоднородное распределение упругих податливостей $B_i(\cdot)$ на сумму однородного распределения податливостей H_i и возмущающей добавки $-tb_i(\cdot)$ так, чтобы

(2.1) $$B_i(\cdot) = H_i - tb_i(\cdot),\ 0 < t < 1,\ 0 < b_i(\cdot) < H_i,\ i = 1, 2$$

Это всегда можно сделать взяв числа t, H_i удовлетворяющими условиям

$$1 - (\min_{(\cdot) \in V} B_i(\cdot)) (\max_{(\cdot) \in V} B_i(\cdot))^{-1} < t < 1;\ \max_{(\cdot) \in V} B_i(\cdot) < H_i < (1-t)^{-1} \min_{(\cdot) \in V} B_i(\cdot)$$

Обобщенное решение задачи термоупругости (1.9) будем искать в виде ряда по степеням параметра t

(2.2) $$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \tau_{ij}^{(k)}$$

Подставляя выражения (2.1), (2.2) в (1.9), группируя и приравнивая нулю члены при одинаковых степенях t, получим серию задач термоупругости для определения $\tau^{(k)}$

(2.3) $$\tau^{(0)}:\ [\tau^{(0)}, \tau^*]_H = -(\varepsilon^\circ, \tau^*) - [\sigma^*, \tau^*]_H,\ \forall \tau^* \in \Psi$$

(2.4) $$\tau^{(1)}:\ [\tau^{(1)}, \tau^*]_H = l_0(\tau^*),\ \forall \tau^* \in \Psi;\ l_0(\tau^*) = [\sigma^\circ + \tau^\circ, \tau^*]_b$$

(2.5) $$\tau^{(k+1)}:\ [\tau^{(k+1)}, \tau^*]_H = l_k(\tau^*),\ \forall \tau^* \in \Psi;\quad l_k(\tau^*) = [\tau^{(k)}, \tau^*]_b$$

Покажем, что линейные функционалы l_k, $k = 1, 2, \ldots$ ограничены в Ψ. Для этого воспользуемся следующим неравенством, вытекающим из неравенства (2.1):

(2.6) $$[\sigma, \sigma]_b \leqslant [\sigma, \sigma]_H$$

Пусть $\| \tau^{(k)} \|_H < \infty$, тогда (супремум берется при $\| \tau \|_H = 1$) используя (2.6)

$$\| l_k \|_H = \sup | [\tau^{(k)}, \tau]_b | \leqslant \| \tau^{(k)} \|_b \sup \| \tau \|_b \leqslant \| \tau^{(k)} \|_H \sup \| \tau \|_H = \| \tau^{(k)} \|_H < \infty$$

Сходную оценку можно получить и для линейного функционала l_0. При этом $\tau^{(0)}$ ограничено в Ψ как решение задачи термоупругости (2.3), свойства которой изучались в п. 1. Из ограниченности функционала l_0 по упоминавшейся теореме Риса следует, что однозначно определено решение $\tau^{(1)}$ задачи (2.4), и далее по индукции все $\tau^{(k)}$ однозначно определяются из рекуррентной последовательности задач (2.5). Тем самым доказано, что однозначно определено каждое слагаемое ряда (2.2) для напряжений в неоднородном теле.

Докажем, что ряд (2.2) сходится в энергетической метрике Ψ. В силу полноты Ψ для этого достаточно проверить, что

(2.7) $$\left\| \sum_{k=m}^{n} t^k \tau^{(k)} \right\|_H^2 \to 0 \quad \text{при } m \to \infty,\quad n \to \infty$$

Прежде установим некоторые полезные свойства функций $\tau^{(k)}$. Раскрывая выражение $[\tau^{(m-1)}, \tau^{(n-1)}]_b$, с помощью (2.5) получаем свойство $[\tau^{(m)}, \tau^{(n-1)}]_H = [\tau^{(m-1)}, \tau^{(n)}]_H$, применяя которое p раз будем иметь

(2.8) $$[\tau^{(m)}, \tau^{(n)}]_H = [\tau^{(m-p)}, \tau^{(n+p)}]_H$$

В неравенстве $2 \mid [\sigma, \tau]_b \mid \leqslant [\sigma, \sigma]_b + [\tau, \tau]_b$, следующем из неотрицательности выражения $\| \sigma - \tau \|_b^2$, заменим слагаемые справа большими величинами по (2.6). Получим оценку

$$2 \mid [\sigma, \tau]_b \mid \leqslant [\sigma, \sigma]_H + [\tau, \tau]_H \tag{2.9}$$

Далее в соотношении (2.5) возьмем $\tau^* = \tau^{(k+1)}$, используя неравенство (2.9), получим

$$\| \tau^{(k+1)} \|_H^2 \leqslant \| \tau^{(k)} \|_H^2 \tag{2.10}$$

Имеет место также свойство

$$\mid [\tau^{(k)}, \tau^{(p)}]_H \mid \leqslant \| \tau^{(1)} \|_H^2, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad p = 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

которое вытекает из неравенства Шварца и неравенства (2.10).

Для доказательства свойства (2.7) сходимости ряда (2.2) метода возмущений построим следующую цепочку неравенств, используя свойства (2.8), (2.11)

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} t^k \tau^{(k)} \right\|_H^2 = \sum_{p=2m}^{2n} t^p \sum_{i \geqslant m,\ j \geqslant m,\ i+j=p} [\tau^{(i)}, \tau^{(j)}]_H =$$

$$= \sum_{p=2m}^{2n} t^p (p - 2m + 1) [\tau^{(p-1)}, \tau^{(1)}]_H \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=2m}^{2n} t^p (p - 2m + 1) \mid [\tau^{(p-1)}, \tau^{(1)}]_H \mid \leqslant$$

$$\leqslant \| \tau^{(1)} \|_H^2 \sum_{p=2m}^{2n} (p - 2m + 1) t^p \leqslant \| \tau^{(1)} \|_H^2 \textstyle\sum_{2m,\, 2n}, \quad \left(\textstyle\sum_{n,\, p} = \displaystyle\sum_{k=n}^{p} k t^k \right)$$

При принятом условии $0 < t < 1$ числовой ряд $\sum_{1,\, \infty}$ сходится, поэтому последовательность его частичных сумм фундаментальна. Следовательно, в приведенной цепочке оценок последнее выражение стремится к нулю при $m \to \infty$, $n \to \infty$.

В итоге решение задачи термоупругости неоднородного тела можно искать по методу возмущений в виде ряда (2.2), сходящегося в метрике энергетического пространства и в эквивалентной метрике $L_2(V)$. При этом напряжения $\tau^{(k)}$ однозначно определяются из рекуррентной последовательности задач (2.3), (2.4), (2.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mazilu P.* Sur un probleme plan de la theorie de l'elasticité des milieux heterogenes.— C. r. acad. sci. Ser. A et B, 1969, v. 268, No. 14, p. 778—780.
2. *Ломакин В. А.*, *Шейнин В. И.* О применимости метода малого параметра для оценки напряжений в неоднородных упругих средах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3, с. 33—39.
3. *Купрадзе В. Д.*, *Гегелиа Т. Г.*, *Башелейшвили М. О.*, *Бурчеладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
4. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 216 с.
5. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.

Красноярск

Поступила в редакцию 4.X.1983