чаем, Динамический спектр (3.7) будет содержать неограниченно нарастающие во времени составляющие только с четными номерами $a_{2m}(t)$, тогда как $a_{2m-1}(t)=0$. Поэтому при $t>0$ в соотношении (2.3) $\langle\sin 2[\vartheta(z)+\varphi(z,t)]\rangle=0$, но будет происходить монотонное убывание величины $\langle\cos 2[\vartheta(z)+\varphi(z,t)]\rangle$. В результате этого вместо поворота оптической картины на экране будет наблюдаться быстрое увеличение расстояния между соседними гиперболами, потому что соседние гиперболы в одном квадранте отвечают условию изменения фазовой задержки на величину $\Delta\Phi=2\pi$.

Предельное решение физической задачи при $t\to\infty$ должно описываться нормальным спектральным составом искажений (2.2), как и в случае квазистатического возрастания магнитного поля до величины μH_*, т. е. при $t\gg\tau_2$ на экране снова должны появиться повернутые на большой угол $\delta(\mu H_*)$ семейства гипербол.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zocher H.* The effect of a magnetic field on the nematic state.—Trans. Faraday Soc., 1933, v. 29, No. 9, p. 931—949.
2. *Oseen C. W.* The theory of liquid crystals.— Trans. Faraday Soc., 1933, v. 29, No. 9, p. 883—899.
3. *Блинов Л. М.* Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978. 384 с.
4. *Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем.— Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 6, с. 779—782.
5. *Cladis P. E.* New method for measuring the twist elastic constant K_{22}/χ_a and the shear viscosity γ_1/χ_a for nematics.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, No. 25, p. 1629—1631.
6. *Жен П. де.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
7. *Васильев Ю. В., Курицына Е. Ф.* Однонаправленные и двунаправленные скачки конфигурационных состояний нематических жидких кристаллов.— Ж. техн. физики, 1984, т. 54, № 1, с. 189—191.
8. *Жё В. де.* Физические свойства жидкокристаллических веществ. М.: Мир, 1982. 152 с.
9. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н.* Линейная механика жидкокристаллических сред.— Физ. твердого тела, 1971, т. 13, № 6, с. 1701—1714.
10. *Brochard F., Pieranski P., Guyon E.* Dynamics of the orientation of a nematic — liquid — crystal film in a variable magnetic field.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, No. 26, p. 1681—1683.
11. *Pieranski P., Brochard F., Guyon E.* Static and dynamic behavior of a nematic liquid crystal in a magnetic field. Pt II: Dynamics.— J. phys., 1973, v. 34, No. 1, p. 35—48.

Москва

Поступила в редакцию
31.V.1984

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ СОСТАВНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ, ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Паймушин В. Н.

Рассматривается контактная постановка геометрически нелинейных задач сопряжения составных пространственных тел, а также тонких составных оболочек, соединяемых между собой встык (жестко или нежестко, например шарнирно). В соответствии с этой постановкой составное тело (оболочка) расчленяется на отдельные элементы, на общей границе раздела вводятся в рассмотрение соответствующие реакции взаимодействия и для каждого элемента формулируется соответствующая краевая задача. При этом искусственное увеличение числа неизвестных задачи приводит к соответствующему увеличению и числа уравнений за счет замены статических условий сопряжения элементов удвоенным числом статических граничных условий на общей границе раздела. В процессе решения задачи указанные реакции взаимодействия определяются из кинематических условий сопряжения элементов.

Показано, что преимуществом такой постановки задач сопряжения составных тел является существенное упрощение применения для их решения прямых методов вариационного исчисления. С этой целью для пространственных составных тел и составных оболочек построены функционалы, относящиеся к классу обобщенных функционалов Лагранжа для задач, определенных на разрывных полях напряжений, деформаций и перемещений [1—3], в которых наряду с перемещениями к числу функциональных аргументов отнесены также и неизвестные реакции взаимодействия. Доказано, что условия их стационарности доставляют вариационные уравнения, из которых наряду с уравнениями равновесия и статическими граничными условиями на границах, где заданы внешние статические усилия, следуют также статические граничные условия, эквивалентные статическим условиям сопряжения, и кинематические условия сопряжения. Согласно этим уравнениям, применение прямых методов решения задач не требует построения координатных функций для перемещений с предварительным удовлетворением кинематическим условиям сопряжения.

1. Дифференциальная и вариационная постановки нелинейных контактных задач теории упругости составных тел. Рассматривается составное тело, состоящее из двух элементов с объемами $V_{(n)}$ $(n = 1, 2)$ и находящееся в равновесии под действием некоторой системы заданных поверхностных $\mathbf{P}_{(n)}$ и объемных $\mathbf{F}_{(n)}$ сил. Предполагается, что пространства $V_{(n)}$ параметризованы криволинейными координатами $x^{\alpha}_{(n)}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ с радиусами-векторами до деформации $\boldsymbol{\rho}_{(n)} = \boldsymbol{\rho}_{(n)}(x^{\alpha}_{(n)})$; деформации считаются малыми, перемещения — конечными, основные обозначения традиционные (см., например, [4]).

Для указанного тела возможны два варианта постановки задач механики.

Первая является естественной и заключается в формулировке для каждого элемента тела уравнений равновесия $(\boldsymbol{\rho}^{*}_{(n)} = \boldsymbol{\rho}_{(n)} + \mathbf{U}^{(n)}$; $\sigma^{\alpha\beta}_{(n)}$ — компоненты тензора напряжений)

$$(1.1)\qquad \nabla^{(n)}_{\alpha}\,(\sigma^{\alpha\beta}_{(n)}\boldsymbol{\rho}^{(n)*}_{\beta}) + \mathbf{F}_{(n)} = 0 \quad (x^{\alpha}_{(n)} \in V_{(n)})$$

соответствующих статических и кинематических граничных условий $(\nu^{(n)}_{\alpha}$ — компоненты вектора единичной нормали $\boldsymbol{\nu}_{(n)}$ к $S_{(n)}$ относительно базисных векторов $\boldsymbol{\rho}^{(n)}_{\alpha})$

$$(1.2)\qquad \sigma^{\alpha\beta}_{(n)}\boldsymbol{\rho}^{(n)*}_{\beta}\nu^{(n)}_{\alpha} - \mathbf{P}_{(n)} = 0 \quad (x^{\alpha}_{(n)} \in S^{p}_{(n)})$$

$$(1.3)\qquad \mathbf{U}^{(n)} = \mathbf{U}^{(n)s} \quad (x^{\alpha}_{(n)} \in S^{u}_{(n)})$$

на тех участках $S^{p}_{(n)}$ и $S^{u}_{(n)}$ граничных поверхностей $S_{(n)}$, на которых заданы векторы поверхностных усилий $\mathbf{P}_{(n)}$ и перемещений $\mathbf{U}^{(n)s}$. Кроме (1.2), (1.3) в точках общей поверхности сопряжения элементов $S^{q}_{(n)} = S^{q}$ должны быть выполнены статические и кинематические условия стыковки

$$(1.4)\qquad \sigma^{\alpha\beta}_{(1)}\boldsymbol{\rho}^{(1)*}_{\beta}\nu^{(1)}_{\alpha} = -\,\sigma^{\alpha\beta}_{(2)}\boldsymbol{\rho}^{(2)*}_{\beta}\nu^{(2)}_{\alpha} \quad (x^{\alpha}_{(n)} \in S^{q})$$

$$(1.5)\qquad \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)} \quad (x^{\alpha}_{(n)} \in S^{q})$$

Вторая постановка является искусственной и соответствует контактной формулировке задачи, согласно которой на S^{q} вводятся в рассмотрение неизвестные реактивные усилия взаимодействия $\mathbf{q}_{(1)} = -\mathbf{q}_{(2)} = \mathbf{q}$. При этом условия (1.4) заменяются удвоенным количеством статических граничных условий вида

$$(1.6)\qquad \sigma^{\alpha\beta}_{(1)}\boldsymbol{\rho}^{(1)*}_{\beta}\nu^{(1)}_{\alpha} = \mathbf{q}, \quad \sigma^{\alpha\beta}_{(2)}\boldsymbol{\rho}^{(2)*}_{\beta}\nu^{(2)}_{\alpha} = -\,\mathbf{q} \quad (x^{\alpha}_{(n)} \in S^{q})$$

Входящий сюда вектор реактивных усилий определяется в процессе решения задачи при помощи условий (1.5).

Введем в рассмотрение функционал

$$(1.7)\qquad I = \sum_{n=1}^{2}\Big[\iint\limits_{S^{p}_{(n)}} \mathbf{P}_{(n)}\mathbf{U}^{(n)}dS_{(n)} + \iint\limits_{S^{q}} \mathbf{q}_{(n)}\mathbf{U}^{(n)}dS_{(n)} + \\ + \iiint\limits_{V_{(n)}} (\mathbf{F}_{(n)}\mathbf{U}^{(n)} - W_{(n)})\,dV_{(n)}\Big]$$

представляющий собой полную потенциальную энергию системы элементов составного тела, в котором $W_{(n)}$ — удельная потенциальная энергия деформации n-го элемента.

Данный функционал отличается от традиционного функционала Лагранжа, отвечающего соотношениям (1.1), (1.2), (1.4), вторым слагаемым, выражающим работу неуравновешенного реактивного усилия $\mathbf{q}$ на соответствующих перемещениях. Легко доказывается, что необходимый комплекс соотношений, соответствующий второй постановке задачи, следует из вариационного уравнения ($\varepsilon^{(n)}_{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты тензора деформаций n-го элемента)

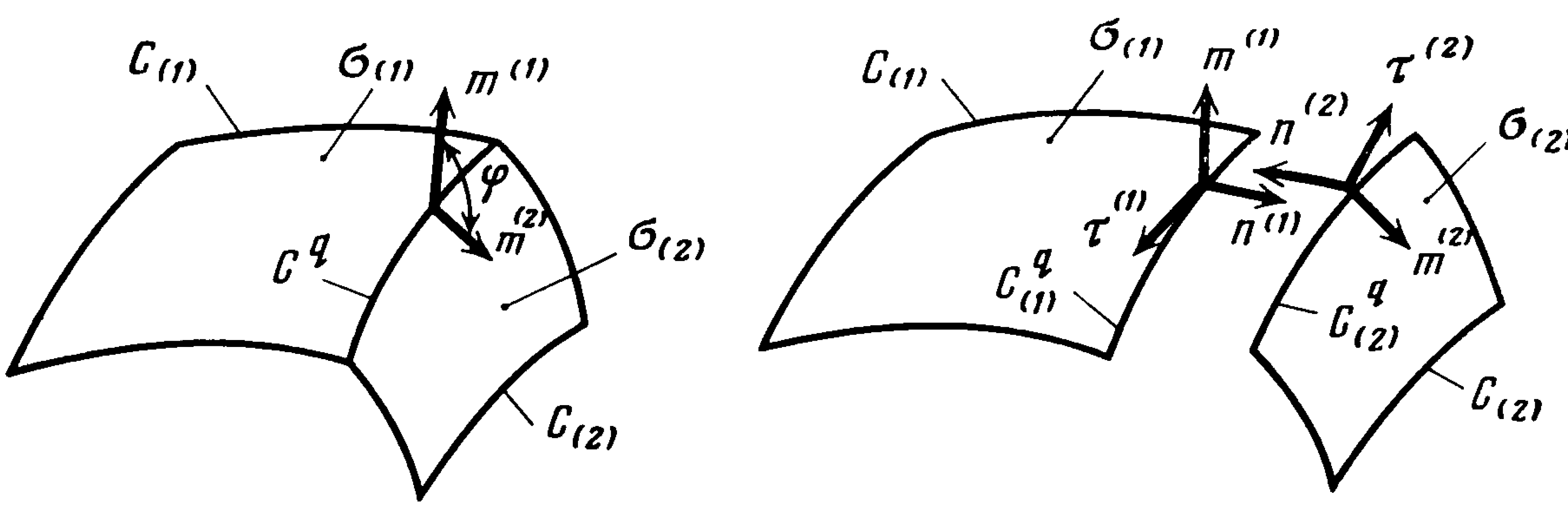
$$(1.8)\qquad \delta I = \sum_{n=1}^{2}\Big[\iint\limits_{S^p_{(n)}} \mathbf{P}_{(n)}\delta\mathbf{U}^{(n)}\,dS_{(n)} + \iint\limits_{S^q_{(n)}} \mathbf{q}_{(n)}\delta\mathbf{U}^{(n)}dS_{(n)} + \iiint\limits_{V_{(n)}} (\mathbf{F}_{(n)}\delta\mathbf{U}^{(n)} - \sigma^{\alpha\beta}_{(n)}\delta\varepsilon^{(n)}_{\alpha\beta})\,dV_{(n)}\Big] + \iint\limits_{S^q} (\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^{(2)})\,\delta\mathbf{q}\,dS^q = 0$$

если ввести сюда кинематические соотношения

$$2\varepsilon^{(n)}_{\alpha\beta} = \nabla^{(n)}_{\alpha}\mathbf{U}^{(n)}\boldsymbol{\rho}^{(n)}_{\beta} + \nabla^{(n)}_{\beta}\mathbf{U}^{(n)}\boldsymbol{\rho}^{(n)}_{\alpha} + \nabla^{(n)}_{\alpha}\mathbf{U}^{(n)}\nabla^{(n)}_{\beta}\mathbf{U}^{(n)}$$

и провести традиционные преобразования с использованием формулы Гаусса — Остроградского. Особенностью применения уравнения (1.8) для решения задач прямыми методами является необходимость построения координатных функций для двумерных неизвестных $q^{\alpha}_{(n)} = \mathbf{q}_{(n)}\boldsymbol{\rho}^{\alpha}_{(n)}$ и трехмерных неизвестных $U^{(n)}_{\alpha} = \mathbf{U}^{(n)}\boldsymbol{\rho}^{(n)}_{\alpha}$, но без предварительного удовлетворения условиям (1.5), (1.6).

2. Вариационная постановка нелинейных контактных задач для тонких составных оболочек. Без ограничения общности будем рассматривать конструкцию, состоящую из двух оболочек со срединными поверхностями $\sigma_{(n)}$ и граничными контурами $C_{(n)} \in \sigma_{(n)}$, которые без эксцентриситета соединены между собой встык на некотором общем участке $C^q_{(n)} = C^q \in C_{(n)}$. Отнесем пространства оболочек $V_{(n)}$, к системам криволинейных координат $x^i_{(n)}$, $x^3_{(n)} = z_{(n)}$, нормально связанных с поверхностями $\sigma_{(n)}$ согласно равенствам $\boldsymbol{\rho}_{(n)} = \mathbf{r}_{(n)} + z_{(n)}\mathbf{m}_{(n)}$, в которых $\mathbf{r}_{(n)} = \mathbf{r}_{(n)}\,(x^i_{(n)})$ — радиусы-векторы точек $M_{(n)} \in \sigma_{(n)}$, $\mathbf{m}_{(n)}$ — векторы единичных нормалей к $\sigma_{(n)}$. Пусть $\mathbf{r}^{(n)}_i$ — координатные векторы на $\sigma_{(n)}$, $a^{(n)}_{ik} = \mathbf{r}^{(n)}_i\mathbf{r}^{(n)}_k$, $b^{(n)}_{ik} = -\mathbf{m}^{(n)}_i\mathbf{r}^{(n)}_k = -\mathbf{r}^{(n)}_k\partial\mathbf{m}_{(n)}/\partial x^i_{(n)}$ — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности $\sigma_{(n)}$, $\mathbf{n}_{(n)}$, $\boldsymbol{\tau}_{(n)}$ — единичные векторы нормали и касательной к линии $C_{(n)}$, лежащие в плоскости, касательной к $\sigma_{(n)}$, $\nabla^{(n)}_i$ — знаки ковариантных производных относительно $a^{(n)}_{ik}$, φ — угол между векторами $\mathbf{m}_{(1)}$ и $\mathbf{m}_{(2)}$ в точках участка $C^q \in C_{(n)}$, в которых согласно фигуре имеют место зависимости



$$\mathbf{n}_{(2)} = -\cos\varphi\,\mathbf{n}_{(1)} + \sin\varphi\,\mathbf{m}_{(1)},\qquad \mathbf{m}_{(2)} = \sin\varphi\,\mathbf{n}_{(1)} + \cos\varphi\,\mathbf{m}_{(1)},\qquad \boldsymbol{\tau}_{(1)} = -\boldsymbol{\tau}_{(2)}$$

В рамках гипотез классической теории Кирхгофа — Лява векторы конечных перемещений $\mathbf{U}^z_{(n)}$ и ковариантные компоненты тензоров тангенциальных деформаций $\varepsilon^{z(n)}_{ik}$ в точках $(x^i_{(n)}, z_{(n)})$ оболочки определяются выражениями [4]

$$(2.1)\qquad \mathbf{U}^z_{(n)} = \mathbf{U}^{(n)} = \mathbf{v}^{(n)} + z_{(n)}\,(\mathbf{m}^{(n)}_{*} - \mathbf{m}_{(n)}),\quad -h_{(n)}/2 \leqslant z_{(n)} \leqslant h_{(n)}/2$$

$$(2.2)\qquad \varepsilon^{z(n)}_{ik} = \varepsilon^{(n)}_{ik} + z_{(n)}\varkappa^{(n)}_{ik}$$

$$(2.3)\qquad 2\varepsilon^{(n)}_{ik} = \mathbf{r}^{(n)}_i\nabla^{(n)}_k\mathbf{v}^{(n)} + \mathbf{r}^{(n)}_k\nabla^{(n)}_i\mathbf{v}^{(n)} + \nabla^{(n)}_i\mathbf{v}^{(n)}\nabla^{(n)}_k\mathbf{v}^{(n)}$$

$$(2.4)\qquad 2\varkappa^{(n)}_{ik} = b^{(n)}_{ik} - b^{(n)*}_{ik} = b^{(n)}_{ik} + \mathbf{r}^{(n)*}_i\mathbf{m}^{(n)*}_k + \mathbf{r}^{(n)*}_k\mathbf{m}^{(n)*}_i$$

где $\mathbf{r}_*^{(n)} = \mathbf{r}^{(n)} + \mathbf{v}^{(n)}$ и $\mathbf{r}_i^{(n)*}$ — радиусы-векторы точек деформированных срединных поверхностей $\sigma_{(n)}^*$ и координатные векторы на них, $\mathbf{v}^{(n)}$ — векторы перемещений точек $\sigma_{(n)}$, $\mathbf{m}_{(n)}^*$, $\mathbf{m}_i^{(n)*}$ — единичные векторы нормалей к $\sigma_{(n)}^*$ и их частные производные по $x_{(n)}^i$.

С использованием (2.1) объемные силы $\mathbf{F}_{(n)}$ и поверхностные усилия, действующие на ограничивающих поверхностях $z_{(n)} = \pm h_{(n)}/2$, приводятся [4] к векторам поверхностных усилий и моментов

$$\mathbf{X}_{(n)} = X_{(n)}^i \mathbf{r}_i^{(n)*} + X_{(n)}^3 \mathbf{m}_{(n)}^*, \quad \mathbf{M}_{(n)} = M_{(n)}^i \mathbf{r}_i^{(n)*} \tag{2.5}$$

отнесенных к единицам площадей $\sigma_{(n)}$, а внешние поверхностные усилия, действующие на граничные срезы, приводятся к векторам контурных усилий и моментов

$$\mathbf{\Phi}_{(n)}^s = \Phi_n^{(n)} \mathbf{n}_{(n)}^* + \Phi_{n\tau}^{(n)} \boldsymbol{\tau}_{(n)}^* + \Phi_m^{(n)} \mathbf{m}_{(n)}^*, \quad \mathbf{M}_n^{(n)} = L_{n\tau}^{(n)} \mathbf{n}_{(n)}^* + L_n^{(n)} \boldsymbol{\tau}_{(n)}^* \tag{2.6}$$

действующих на участках $C_{(n)}^p \in C_{(n)}$, которые отнесены к единице длины $C_{(n)}$ и развернуты по соответствующим осям деформированных триэдров $\{\mathbf{n}_{(n)}^*, \boldsymbol{\tau}_{(n)}^*, \mathbf{m}_{(n)}^*\}$.

В соответствии со сформулированным подходом разделим конструкцию на две оболочки и на общей поверхности контакта S^q вектор реактивных усилий $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{(1)}$ по аналогии с (2.6) приведем к главному вектору $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{(1)}$ и главному моменту $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{(1)}$

$$\mathbf{Q} = Q_n \mathbf{n}_{(1)}^* + Q_{n\tau} \boldsymbol{\tau}_{(1)}^* + Q_m \mathbf{m}_{(1)}^*, \quad \mathbf{R} = R_{n\tau} \mathbf{n}_{(1)}^* + R_n \boldsymbol{\tau}_{(1)}^* \tag{2.7}$$

отнесенным к единице длины линии раздела C^q.

При принятых предположениях для рассматриваемой оболочечной системы вариационное уравнение (1.8) может быть приведено к виду

$$\begin{gathered}
\delta I = \sum_{n=1}^{2} \Bigg[\int\limits_{C_{(n)}^p} (\mathbf{\Phi}_{(n)}^s \delta \mathbf{v}^{(n)} + \mathbf{L}_{(n)}^s \delta \mathbf{m}_{(n)}^*)\, dC_{(n)} + \\
+ \int\limits_{C_{(n)}^q} (\mathbf{Q}_{(n)} \delta \mathbf{v}^{(n)} + \mathbf{H}_{(n)} \delta \mathbf{m}_{(n)}^*)\, dC_{(n)} + \iint\limits_{\sigma_{(n)}} (\mathbf{X}_{(n)} \delta \mathbf{v}^{(n)} + \mathbf{M}_{(n)} \delta \mathbf{m}_{(n)}^* - \\
- T_{(n)}^{ik} \delta \varepsilon_{ik}^{(n)} - M_{(n)}^{ik} \delta \varkappa_{ik}^{(n)})\, d\sigma_{(n)} + \int\limits_{C^q} (\mathbf{m}_{(n)}^* - \mathbf{m}_{(n)})\, \delta \mathbf{H}_{(n)}\, dC_{(n)} \Bigg] + \\
+ \int\limits_{C_{(1)}^q} (\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)})\, \delta \mathbf{Q}\, dC_{(1)} = 0 \\
\mathbf{Q}_{(2)} = -\mathbf{Q}, \quad \mathbf{L}_{(n)}^s = L_n^{(n)} \mathbf{n}_{(n)}^* - L_{n\tau}^{(n)} \boldsymbol{\tau}_{(n)}^*, \quad \mathbf{H}_{(n)} = R_n^{(n)} \mathbf{n}_{(n)}^* - R_{n\tau}^{(n)} \boldsymbol{\tau}_{(n)}^* \\
\mathbf{H}_{(2)} = -\mathbf{H}_{(1)}
\end{gathered} \tag{2.8}$$

в котором $T_{(n)}^{ik}$, $M_{(n)}^{ik}$ — контравариантные компоненты тензоров внутренних тангенциальных усилий и изгибающих моментов, причем на C^q в силу $\boldsymbol{\tau}_{(1)}^* = -\boldsymbol{\tau}_{(2)}^*$ и $\mathbf{Q}_{(2)} = -\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}_{(2)} = -\mathbf{R}$ имеют место равенства $Q_{n\tau}^{(2)} = Q_{n\tau}$, $R_n^{(2)} = R_n$.

Полученное уравнение (2.8) в скалярном представлении служит для решения задач контактного взаимодействия оболочек методом Ритца в случае жесткого их соединения на линии стыка, в соответствии с которым строятся пять одномерных координатных функций для компонент векторов $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ и шесть двумерных координатных функций для компонент векторов перемещений $\mathbf{v}^{(n)}$ без предварительного удовлетворения кинематическим условиям сопряжения оболочек

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(2)}, \ [\mathbf{m}_{(1)}^*, \mathbf{m}_{(1)}^* - \mathbf{m}_{(1)}] = [\mathbf{m}_{(2)}^*, \mathbf{m}_{(2)}^* - \mathbf{m}_{(2)}] \quad (x_{(n)}^i \in C^q) \tag{2.9}$$

В случае шарнирного соединения оболочек в уравнении (2.8) достаточно положить $R_n = 0$, что приводит к сокращению числа искомых неизвестных задачи на единицу.

Если в (2.8) внести соотношения (2.3), (2.4) и выполнить традиционные [4] преобразования, то можно прийти к другому виду построенного вариационного уравнения, являющегося векторной записью уравнения метода Бубнова — Галеркина.

Замечания. Вариационная задача для функционала (1.8) может быть получена из вариационной задачи для функционала Лагранжа составного тела

$$I_1 = \sum_{n=1}^{2} \Big[\iint\limits_{S^p_{(n)}} \mathbf{P}_{(n)} \mathbf{U}^{(n)} dS_{(n)} + \iiint\limits_{V_{(n)}} (\mathbf{F}_{(n)} \mathbf{U}^{(n)} - W_{(n)})\, dV_{(n)} \Big]$$

при ограничении (1.5) на основании известного метода [2, 5] введения неопределенного множителя Лагранжа, механическим аналогом которого и является вектор реактивных усилий взаимодействия $\mathbf{q}$. Такой прием используется, в частности, в смешанных линейных задачах с неизвестными реакциями в связях для системы деформируемых элементов с конечным числом степеней свободы [2].

Отметим также, что в рамках соотношений классической теории оболочек Кирхгофа — Лява при дифференциальной постановке задач сопряжения оболочек вместо (2.9) имеется возможность удовлетворить лишь четырем скалярным условиям сопряжения

$$(2.10) \qquad \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(2)}, \quad \mathbf{n}_{(1)} \mathbf{m}^*_{(1)} = \mathbf{n}_{(2)} \mathbf{m}^*_{(2)} \quad (x^i_{(n)} \in C^q)$$

Поэтому преобразование при помощи метода неопределенных множителей Лагранжа обычного функционала Лагранжа, записываемого для составной оболочки при дополнительных условиях (2.10), приводит к результату, отличному от полученного.

Область применения сформулированного подхода не ограничивается только задачами сопряжения составных тел и тонких оболочек. На его основе могут быть разработаны эффективные прямые методы для решения трехмерных задач теории упругости и двумерных задач теории оболочек в неканонических областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прагер В.* Вариационные принципы линейной статической теории упругости при разрывных смещениях, деформациях и напряжениях.— Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1969, № 5, с. 139—144.
2. *Розин Л. А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 223 с.
3. *Абовский Н. П.*, *Андреев Н. П.*, *Деруга А. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 287 с.
4. *Галимов К. З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. 326 с.
5. *Экланд И.*, *Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.

Казань

Поступила в редакцию 1.III.1983

УДК 531.0(075.8)

О РЕШЕНИИ В НАПРЯЖЕНИЯХ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ ПО МЕТОДУ ВОЗМУЩЕНИЙ

Кунташев П. А., Немировский Ю. В.

На основании общих свойств положительной определенности оператора теории упругости доказывается сходимость в энергетической метрике решения задачи термоупругости по методу возмущений для трехмерного непрерывно неоднородного изотропного тела.

Ранее [1] для плоской задачи теории упругости неоднородных тел на основании свойства представления гармонических функций через интегралы со слабой особенностью и свойств многомерных сингулярных интегралов доказана сходимость решения по методу возмущений. В [2] для одного частного случая плоской задачи дано сравнение известного точного решения и решения, построенного по методу возмущений, и отмечено их совпадение в области сходимости. Другой подход, опирающийся на теорию интегральных уравнений, изложен в [3], где дан анализ трехмерных граничных задач линейной теории упругости и термоупругости для однородных и ку-