(6) введем приведенный тензор напряжений в твердой фазе $\sigma_{2*}{}^{lk}$

$$\sigma_1{}^{lk} = -\alpha_1 p_1 \delta^{lk}, \quad \sigma_2{}^{lk} = -\alpha_2 p_1 \delta^{lk} + \sigma_{2*}{}^{lk} \tag{8}$$
$$\sigma = \sigma_1{}^{lk} + \sigma_2{}^{lk} = p_1 \delta^{lk} + \sigma_{2*}{}^{lk}$$

Видно, что напряжения σ_{2*}/α_2 характеризуют отличие средних напряжений $\sigma_2{}^{lk}/\alpha_2$ в твердой фазе от давления в порах. Как и ранее в (6), напряжение $\sigma_{2*}{}^{lk}$ можно определять по измерениям σ^{lk} и p_1 [2].

Если каналы в пористой среде гладкие, прямолинейные и ориентированы вдоль относительного ускорения фаз, то в R_{12} нет составляющей $\Delta R_{12}^{(p)}$ из-за мелкомасштабных пульсаций давления. Но появляется составляющая $\Delta R_{12}^{(\tau)}$ из-за вязкого трения жидкости о стенки канала

$$R_{12}{}^k = p\nabla^k\alpha_2 + \Delta_{12}^{(\tau)k}, \quad \Delta R_{12}^{(\tau)k} = F_\mu{}^k \tag{9}$$
$$F_\mu{}^k = \eta_\mu a_*{}^{-2}\mu_1\alpha_1\alpha_2 (v_1{}^k + v_2{}^k)$$

где a_* — радиус пор. В общем случае, когда каналы искривлены, появляется составляющая $\Delta R_{12}^{(p)k}$ из-за инерционного взаимодействия фаз

$$\Delta R_{12}^{pk} = F_m{}^k = \eta_m \left[\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\rho_1{}^0 \left(\frac{d_1 v_1{}^k}{dt} - \frac{d_2 v_2{}^k}{dt} \right) \right] + \tag{10}$$
$$+ \alpha_2 J (v_2 - v_1); \quad 0 \leqslant \eta^m \leqslant 1$$

В результате обобщение уравнения импульсов фаз (7) на пористые и зернистые среды имеет вид

$$\rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} = -\alpha_1 \nabla p_1 - F_m - F_\mu + J_{12}(v_2 - v_1) + \rho_1 g_1, \tag{11}$$
$$\rho_2 \frac{d_2 v_2}{dt} = -\alpha_2 \nabla p_1 + \nabla^k \sigma_{2*}^k + F_m + F_\mu + \rho_2 g_2$$

Уравнения сохранения (1) и (11) замыкаются уравнениями состояния для жидкой фазы и уравнениями состояния для пористой фазы, а именно уравнениями для $\sigma_{2*}{}^{lk}$. Вариант теории для упругого поведения пористой фазы дан в [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
3. *Клебанов Л. А., Крошилин А. Е., Нигматулин Б. И., Нигматулин Р. И.* О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы уравнений двухскоростного движения двухфазных сред.— ПММ, 1982, т. 46, № 1, с. 83—95.

Баку

Поступила в редакцию
29.II.1984

УДК 532.783

ДИНАМИЧЕСКИЙ ГИСТЕРЕЗИС ПРИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ В ИМПУЛЬСНЫХ ПОЛЯХ

Васильев Ю. В.

Показано, что при рассмотрении работы реальных оптических ячеек на основе нематических жидких кристаллов использование метода Лаврентьева — Ишлинского позволяет объяснить причины экспериментально наблюдаемых различий в характере пропускания света оптическими ячейками на переднем и заднем фронте воздействующего на жидкий кристалл магнитного поля большой величины в виде импульса прямоугольной формы значительной длительности.

1. При некоторой критической величине ($H_* \neq 0$) напряженности однородного статического магнитного поля **H** возможна потеря устойчивости однородной ориентации векторного поля директора **n** (**n** $\perp$ **H**) нематического жидкого кристалла (НЖК)

в оптической ячейке, в которой фиксировано расстояние L между ее параллельными плоскими стеклянными подложками. Впервые такая идеализированная теоретическая схема статического эксперимента была выдвинута в работе [1], где в рамках континуальной теории упругости НЖК [2] максимально упрощено рассмотрение перехода Фредерикса и обращено внимание на аналогию с классической проблемой механики — выпучиванием тонкого эйлерова стержня.

Известно [3], что приложение к ячейке достаточно большого по величине и длительного во времени управляющего импульсного сигнала прямоугольной формы (в виде электрического или магнитного поля) приводит к существенному различию в характере пропускания света ячейкой на стадиях включения и выключения сигнала (динамический гистерезис). Это явление не имеет надлежащего объяснения.

Цель данной работы — показать, что указанное явление может быть понято в результате анализа динамических форм потери устойчивости упругих систем [4].

2. Декартову систему координат $Oxyz$ выбираем так, что граница раздела мезофазы и контактирующих с ней поверхностей подложек оптической ячейки лежит в плоскостях $z = 0$ и $z = L$, по отношению к которым векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{n}$ всюду компланарны.

В схеме Цохера [1] фиксированные граничные условия

$$\mathbf{n}(x, y, 0) = \mathbf{n}(x, y, L) = (1, 0, 0) \tag{2.1}$$

определяют исходную (однородную) объемную ориентацию директора $\mathbf{n}(x, y, z) = (1, 0, 0)$, $z \in (0, L)$. В статическом магнитном поле $\mathbf{H} = (0, H, 0)$ она не искажается, пока

$$H < H_*;\ H_* = (\pi/L)(K_2/\chi_a)^{1/2}$$

Здесь K_2 — константа Франка упругости кручения, χ_a — анизотропия магнитной восприимчивости единицы объема мезофазы.

При $H \geqslant H_*$ возможны деформации НЖК типа чистого кручения директора $\mathbf{n}(x, y, z) = [\cos\varphi(z), \sin\varphi(z), 0]$. В среднем слое мезофазы ($z = L/2$) физически обусловлено максимальное отклонение ориентации директора от исходной. Поэтому при учете (2.1) имеем

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m-1} \sin\left[(2m-1)\pi\frac{z}{L}\right],\quad a_{2m} = 0 \tag{2.2}$$

Амплитуды a_{2m-1} имеют здесь одинаковый знак, а их величина зависит от напряженности приложенного магнитного поля [1].

Появление современного оптического (коноскопического) метода регистрации деформаций сделало сравнительно простым нахождение экспериментальных значений константы упругости K_2 и твист-вязкости γ_1 [5]. Прохождение сквозь оптическую ячейку расходящегося пучка монохроматического линейно поляризованного света в виде конуса с осью Oz может приводить [5, 6] к образованию интерференционной оптической картины на экране за ячейкой вследствие явления двулучепреломления в оптически одноосном НЖК, который характеризуется двумя значениями показателя преломления света $n_{e,o} > 1$ и их разностью $\Delta n \sim 0{,}2$. Получаемое изображение связано с изменением фазовой задержки $\Delta\Phi$ в разных направлениях волновых векторов $\mathbf{k}$ этого конуса света в ячейке [5]

$$\Delta\Phi = \text{const}\cdot\Big[\Big(\frac{\Delta n}{n_0 + n_e}\Big)(k_x^2 + k_y^2) - \\ - \{(k_x^2 - k_y^2)\langle\cos 2\varphi(z)\rangle + 2k_xk_y\langle\sin 2\varphi(z)\rangle\}\Big] \tag{2.3}$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по $z \in [0, L]$.

Так как $\Delta n/(n_0 + n_e) \ll 1$, то в отсутствие деформаций ($\varphi = 0$) линиям равной фазы на экране соответствуют четыре семейства более или менее одинаковых гипербол. Возникновение малых деформаций, описываемых выражением (2.2), приводит в основном к повороту этой картины вокруг оси Oz на угол [6]

$$\delta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\langle\sin 2\varphi(z)\rangle}{\langle\cos 2\varphi(z)\rangle}$$

В условиях физического эксперимента неизбежны малые отклонения от идеальной схемы Цохера. Например, появление малой составляющей h магнитного поля $\mathbf{H} = (h, H, 0)$ приводит к размытию перехода Фредерикса — деформации НЖК обнаруживаются при любом ненулевом значении $H < H_*$ (это напоминает эффект влияния поперечной нагрузки на поведение тонкого эйлерова стержня, который выпучивается еще до достижения продольной нагрузкой критического значения). Эту погрешность удобно характеризовать величиной угла $\gamma = \arcsin (h / |\mathbf{H}|)$. В оптических экспериментах можно добиться выполнения условия $\gamma \ll 1$, если конструктивно предусмотрена возможность плавного поворота ячейки в своей плоскости в любом направлении [7].

В реальной оптической ячейке даже в отсутствие магнитного поля ожидаются возмущения в ориентации векторного поля директора. Одни из них имеют локальный характер, довольно малы по величине (например, обусловленные естественными термическими флуктуациями) и на первом этапе рассмотрения могут не учитываться. Но существует неизбежное глобальное возмущение в виде некоторого начального малого кручения директора (это напоминает небольшое начальное искривление эйлерова стержня), возникающее вследствие погрешности в процессе механической сборки оптической ячейки. Ошибка в установке одной подложки относительно другой на некоторый неизвестный малый угол ψ обусловливает необходимость замены идеальных граничных условий (2.1) новыми

$$\mathbf{n}(x, y, 0) = \left[\cos\left(-\frac{\psi}{2}\right), \sin\left(-\frac{\psi}{2}\right), 0\right], \quad \mathbf{n}(x, y, L) = $$
$$= \left[\cos\left(\frac{\psi}{2}\right), \sin\left(\frac{\psi}{2}\right), 0\right]$$

В результате [6] в объеме НЖК возникает малое кручение директора

$$\mathbf{n}(x, y, z) = [\cos\vartheta(z), \sin\vartheta(z), 0]; \quad \vartheta(z) = \frac{\psi}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)$$

Это возмущение может приводить к существенному отличию динамической переориентации НЖК по сравнению с квазистатической и способствовать возникновению динамического гистерезиса.

3. Пусть импульсное магнитное поле $\mathbf{H}$, величина которого в несколько раз превышает H_* ($|\mathbf{H}| = \mu H_*$), воздействует на НЖК в течение столь длительного времени, что все предшествовавшие переходные процессы давно закончились, а директор в среднем слое ячейки ($z = L/2$) отклонен на значительный угол $\varphi \lesssim \pi/2$. В этом случае при обсуждении процессов релаксации деформаций (после мгновенного выключения поля $\mathbf{H}$) допустимо не обращать внимания на малые перекосы в ориентациях, которые определяются погрешностями в виде углов $\gamma \ll 1$ и $\psi \ll 1$ в экспериментальной установке (в точных экспериментах их принято оценивать в диапазоне от нескольких градусов до их долей [8]).

В динамической теории НЖК Озеена [2] движение директора после полного выключения в момент времени $t = 0$ магнитного поля $\mathbf{H}$ находится из уравнения механических моментов, которое в проекции на ось Oz имеет вид

$$\rho d_0^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \gamma_1 \frac{\partial\varphi}{\partial t} - K_2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь ρ — плотность НЖК, d_0^2 — квадрат радиуса инерции векторного поля директора в единице объема мезофазы. Надежных экспериментальных данных о величине d_0 нет. Предлагается [9] рассматривать ее как молекулярную характеристику и ввиду малости последней пренебрегать при расчете времени релаксации деформаций первым членом этого уравнения.

Опыт показывает [5], что по причине очень большой величины вязкости γ_1 в оптической ячейке после выключения магнитного поля имеет место не осцилляционный, а лимитационный процесс установления равновесных состояний директора — наблюдаемая интерференционная картина (в виде гипербол) плавно изменяет угол поворота $\delta(t)$ от некоторого начального значения $\delta(0) \neq 0$ до конечного $\delta(\infty) = 0$. Поэтому [10, 11] справедливо считать $d_0 \approx 0$. В этом случае наиболее медленно затухающая во времени часть решения исходного уравнения моментов практически совпадает с точным решением укороченного уравнения. В результате при начальных условиях (2.2) выполняются следующие приближенные соотношения для спектральных составляющих $\{a_n(t)\}$ ($n \in N$) искажений:

$$a_{2m}(t) = 0, \quad a_{2m-1}(t) = a_{2m-1}(0) \exp\left[-\frac{(2m-1)^2 t}{\eta}\right], \quad \eta = \frac{\gamma_1}{\chi_a H_*^2}$$

Но совершенно иным может быть положение дел в случае включения сильного магнитного поля $\mathbf{H}$.

Известно [4], что в упругих системах при импульсном нагружении принципиально важен учет малых, но весьма существенных физических факторов, которые в значительной степени определяют характер развития процессов при выходе систем из состояния равновесия. Поэтому при рассмотрении движения директора после мгновенного включения ($t = 0$) сильного магнитного поля $\mathbf{H}$ ($|\mathbf{H}| = \mu H_*$, $\mu \gg 1$) следует учитывать глобальные погрешности в экспериментальной установке, характеризуемые малыми углами ψ и γ. При $t > 0$ директор подвергается вынужденному переориентирующему влиянию со стороны механического крутящего момента, который в классическом приближении [1, 2] равен величине

$$\mathbf{\Gamma} = \chi_a (\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}) [\mathbf{n}\times\mathbf{H}]$$

Директор в процессе развития искажений имеет составляющие

$$n_x = \cos [\vartheta (z) + \varphi (z, t)], \quad n_y = \sin [\vartheta (z) + \varphi (z, t)], \quad n_z = 0$$

Здесь предполагается

$$\varphi (z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (t) \sin \frac{n\pi z}{L} \tag{3.2}$$

так как приходится учитывать все типы возможных движений, отвечающих граничным условиям — жесткому закреплению ориентации директора на подложках в плоскостях $z = 0$ и $z = L$ при начальных условиях $a_n |_0 = 0$, $da_n/dt |_0 = 0$.

После мгновенного включения магнитного поля динамическое уравнение в проекции на ось Oz имеет вид равенства левой части (3.1) величине Γ_z, причем с точностью до $O(\gamma)$

$$\Gamma_z = \chi_a \mu^2 H_*^2 \{{}^1/_2 \sin 2 [\vartheta (z) + \varphi (z, t)] + \gamma \cos 2[\vartheta (z) + \varphi (z, t)]\}$$

Ограничиваясь рассмотрением малых промежутков времени после момента включения магнитного поля, в начальной фазе движения директора можно пренебречь нелинейностью уравнения моментов. Тогда после простых преобразований получается следующее дифференциальное уравнение, моделирующее начальную фазу движений:

$$\iota \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \mu^2 \varphi = \mu^2 s (z) \tag{3.3}$$

$$(\iota = \rho d_0^2/(\chi_a H_*^2), \quad s (z) = \gamma + \vartheta (z))$$

Подстановка (3.2) в (3.3) приводит к уравнениям

$$\iota \frac{d^2 a_n}{dt^2} + \eta \frac{da_n}{dt} + (n^2 - \mu^2) a_n = \mu^2 s_n \tag{3.4}$$

в которых

$$s_n = \frac{2}{L} \int_0^L s (z) \sin \frac{n\pi z}{L} dz = \frac{4}{n\pi} \times \begin{cases} \gamma, & n = 2m - 1 \\ (-\psi/2), & n = 2m \end{cases} \tag{3.5}$$

При выполнении условия $n < \mu$ можно ожидать появления неограниченно нарастающих решений уравнения (3.4)

$$a_n (t) = \frac{\mu^2 s_n}{\Delta_n} \left[\frac{\exp (\lambda_n^+ t) - 1}{\lambda_n^+} - \frac{\exp (\lambda_n^- t) - 1}{\lambda_n^-}\right] \tag{3.6}$$

$$\Delta_n = [\eta^2 + 4\iota (\mu^2 - n^2)]^{1/2}$$

так как показатели экспонент $\lambda_n^\pm = \pm (\Delta_n \mp \eta)/(2\iota)$ в одном случае положительны ($\lambda_n^+ > 0$), в другом — отрицательны ($\lambda_n^- < 0$) и интереса не представляют.

Все остальные составляющие спектра $\{a_n (t)\}$ с номерами $n > \mu$ не дают нарастающих решений и поэтому ниже не рассматриваются. Если не учитывать самой начальной стадии развития процессов, по современным оценкам не превышающей нескольких микросекунд, то справедлива замена точного решения (3.6) следующими приближенными соотношениями:

$$a_n (t) = \frac{\mu^2 s_n}{\mu^2 - n^2} \left[\exp \frac{t}{\tau_n} - 1\right], \quad \tau_n = \frac{\eta}{\mu^2 - n^2} \tag{3.7}$$

Пусть выполняется условие $\gamma \ll \psi$ (в результате тщательной оптической юстировки системы в магнитном поле [7]). Тогда в (3.5) можно положить $\gamma = 0$, $\psi \neq 0$. В этом случае может иметь место интересное физическое явление — динамическая инверсия спектра развивающихся искажений по сравнению с квазистатическим случаем, Динамический спектр (3.7) будет содержать неограниченно нарастающие во времени составляющие только с четными номерами $a_{2m}(t)$, тогда как $a_{2m-1}(t) = 0$. Поэтому при $t > 0$ в соотношении (2.3) $\langle \sin 2[\vartheta(z) + \varphi(z, t)] \rangle = 0$, но будет происходить монотонное убывание величины $\langle \cos 2[\vartheta(z) + \varphi(z, t)] \rangle$. В результате этого вместо поворота оптической картины на экране будет наблюдаться быстрое увеличение расстояния между соседними гиперболами, потому что соседние гиперболы в одном квадранте отвечают условию изменения фазовой задержки на величину $\Delta\Phi = 2\pi$.

Предельное решение физической задачи при $t \to \infty$ должно описываться нормальным спектральным составом искажений (2.2), как и в случае квазистатического возрастания магнитного поля до величины μH_*, т. е. при $t \gg \tau_2$ на экране снова должны появиться повернутые на большой угол $\delta(\mu H_*)$ семейства гипербол.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zocher H.* The effect of a magnetic field on the nematic state.—Trans. Faraday Soc., 1933, v. 29, No. 9, p. 931—949.
2. *Oseen C. W.* The theory of liquid crystals.— Trans. Faraday Soc., 1933, v. 29, No. 9, p. 883—899.
3. *Блинов Л. М.* Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978. 384 с.
4. *Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем.— Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 6, с. 779—782.
5. *Cladis P. E.* New method for measuring the twist elastic constant K_{22}/χ_a and the shear viscosity γ_1/χ_a for nematics.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, No. 25, p. 1629—1631.
6. *Жен П. де.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
7. *Васильев Ю. В., Курицына Е. Ф.* Однонаправленные и двунаправленные скачки конфигурационных состояний нематических жидких кристаллов.— Ж. техн. физики, 1984, т. 54, № 1, с. 189—191.
8. *Жё В. де.* Физические свойства жидкокристаллических веществ. М.: Мир, 1982. 152 с.
9. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н.* Линейная механика жидкокристаллических сред.— Физ. твердого тела, 1971, т. 13, № 6, с. 1701—1714.
10. *Brochard F., Pieranski P., Guyon E.* Dynamics of the orientation of a nematic — liquid — crystal film in a variable magnetic field.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, No. 26, p. 1681—1683.
11. *Pieranski P., Brochard F., Guyon E.* Static and dynamic behavior of a nematic liquid crystal in a magnetic field. Pt II: Dynamics.— J. phys., 1973, v. 34, No. 1, p. 35—48.

Москва

Поступила в редакцию
31.V.1984

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ СОСТАВНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ, ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Паймушин В. Н.

Рассматривается контактная постановка геометрически нелинейных задач сопряжения составных пространственных тел, а также тонких составных оболочек, соединяемых между собой встык (жестко или нежестко, например шарнирно). В соответствии с этой постановкой составное тело (оболочка) расчленяется на отдельные элементы, на общей границе раздела вводятся в рассмотрение соответствующие реакции взаимодействия и для каждого элемента формулируется соответствующая краевая задача. При этом искусственное увеличение числа неизвестных задачи приводит к соответствующему увеличению и числа уравнений за счет замены статических условий сопряжения элементов удвоенным числом статических граничных условий на общей границе раздела. В процессе решения задачи указанные реакции взаимодействия определяются из кинематических условий сопряжения элементов.