ЛИТЕРАТУРА

1. *Гришин А. В., Шифрин Э. Г.* О режиме присоединенного скачка уплотнения на кромках V-образного крыла.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 38—44.
2. *Келдыш В. В.* Исследование течения в окрестности V-образных крыльев, образованных поверхностями тока за плоским скачком уплотнения.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4, с. 50—55.
3. *Зайцев Ю. И., Келдыш В. В.* Особые случаи течения вблизи сверхзвуковой кромки и линии пересечения скачков уплотнения.— Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1, с. 48—59.
4. *Зубин М. А., Остапенко Н. А.* Экспериментальное исследование некоторых особенностей сверхзвукового обтекания V-образных крыльев.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4, с. 130—135.
5. *Лапыгин В. И.* О решении задачи обтекания V-образного крыла с сильной ударной волной на передней кромке.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3, с. 114—119.
6. *Русанов В. В., Шаракшанэ А. А.* Об устойчивости течений около бесконечного клина или конуса, помещенных в сверхзвуковой поток газа.— В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 268—272.
7. *Франкль Ф. И.* К вопросу о единственности решения задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 3, с. 421—424.
8. *Никольский А. А.* О плоских вихревых течениях газа.— В кн.: Аэромеханика. М.: Наука, 1976, с. 55—64.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.XII.1983

УДК 532.529

К ДВУХСКОРОСТНОЙ МЕХАНИКЕ ЗЕРНИСТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

Мусаев Н. Д.

Рассматривается двухфазная смесь пористой или зернистой твердой фазы с жидкостью или газом, заполняющим поры или промежутки между зернами. Выделены две предельные структуры смеси: 1) твердая фаза является плотной упаковкой сферических частиц (зерен), контактирующих через точечные межзеренные контакты, 2) поры являются каналами, по форме близкими к цилиндрическим. В указанных двух структурах рассматриваются выражения для межфазных сил и уравнения двухскоростного движения фаз. Отмечается разное проявление в зависимости от структуры смеси межфазных сил за счет сил инерции, в частности сил Архимеда и присоединенных масс.

Используя представления о многоскоростном континууме, уравнения сохранения масс фаз запишем в виде [1]

$$\partial\rho_1/\partial t + \nabla^k\rho_1 v_1{}^k = J_{21},\quad \partial\rho_2/\partial t + \nabla^k\rho_2 v_2{}^k = J_{12} \tag{1}$$
$$(\rho_i = \rho_i{}^\circ\alpha_i,\ i = 1,\ 2;\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$$

Нижние индексы $i = 1,\ 2$ относятся соответственно к параметрам жидкой (газовой) и твердой фаз, $\rho_i{}^0$ и ρ_i — соответственно истинная и приведенная плотности, связанные через объемную концентрацию α_i, v_i — скорость i-й фазы, J_{ji} — интенсивность фазовых переходов, характеризующая количество массы j-й фазы, перешедшей в i-ю в единице объема смеси и в единицу времени ($i,\ j = 1,\ 2;\ i \neq j$).

Уравнения импульсов фаз можно представить в виде [1]

$$\rho_1\frac{d_1 v_1{}^k}{dt} = \nabla^l\sigma_1{}^{lk} - R_{12}^k - J_{12}(v_2{}^k - v_1{}^k) + \rho_1 g_1{}^k \tag{2}$$
$$\rho_2\frac{d_2 v_2{}^k}{dt} = \nabla^l\sigma_2{}^{lk} + R_{12}^k + \rho_2 g_2{}^k$$

Здесь $\sigma_i{}^{lk}$ — тензор напряжения в i-й фазе, определяющий перенос импульса в i-й фазе через единичное плоское сечение в смеси, $R_{12}{}^k$ — межфазная сила, определяющая перенос импульса из первой во вторую фазу через межфазную поверхность в единице объема смеси, $g_i{}^k$ — векторы внешних массовых сил. При записи члена, связанного с переносом импульса из-за фазовых переходов, полагалось, что масса, претерлевающая фазовый переход, имеет скорость, совпадающую со скоростью твердой (второй) фазы. Кроме того, при задании $\sigma_1{}^{lk}$ и $\sigma_2{}^{lk}$ будем пренебрегать переносом импульса за счет пульсационного (мелкомасштабного) движения фаз.

Если пористую фазу рассматривать как плотную упаковку сферических дисперсных частиц (зерен), контактирующих в точках, то для задания $\sigma_1{}^{lk}$, $\sigma_2{}^{lk}$ и $R_{12}{}^{lk}$ можно использовать представления, сформировавшиеся для дисперсных смесей. Для этого можно ввести приведенные тензоры напряжений в фазах $\sigma_{1*}{}^{lk}$ и $\sigma_{2*}{}^{lk}$, в которые помимо напряжений $\sigma_1{}^{lk}$ и $\sigma_2{}^{lk}$ включается межфазное взаимодействие вдоль межфазных поверхностей частиц dS_{21s}, отсекаемых плоским сечением dS^l и прилегающих к ней [1]

$$(3)\qquad \sigma_{1*}^{lk} = \sigma_1^{lk} + \sigma_{21s}^{lk},\quad \sigma_{2*}^{lk} = \sigma_2^{lk} + \sigma_{12s}^{lk},\quad \sigma_{21s}^{lk} = -\sigma_{12s}^{lk}$$

где $\sigma_{21s}{}^{lk}$ и $\sigma_{12s}{}^{lk}$ — тензоры межфазных напряжений. Если пренебречь действием вязкости в тензорах напряжений, полагая, что она проявляется только через межфазную силу, то для смеси с точечными контактами частиц можно принять

$$(4)\qquad \sigma_{1*}^{lk} = -p_1\delta^{lk},\quad \sigma_1^{lk} = -\alpha_1 p_1\delta^{lk},\quad \sigma_{21s}^{lk} = -\sigma_{21s}^{lk} = -\alpha_2 p_1\delta^{lk}$$
$$\sigma_2^{lk} = -\alpha_2 p_1\delta^{lk} + \sigma_{2*}^{lk}$$

а главный вектор поверхностных сил в фазах представить в виде

$$(5)\qquad \nabla^l\sigma_1^{lk} - R_{12}^k = \nabla^l\sigma_{1*}^{lk} - nf = -\nabla^k p_1 - nf$$
$$\nabla^l\sigma_2^{lk} + R_{12}^k = \nabla^l\sigma_{2*}^{lk} + nf = \nabla^l\sigma_{2*}^{lk} + nf,\qquad n = \frac{3\alpha_2}{4\pi a_2{}^3}$$

Здесь f — межфазная сила со стороны жидкости или газа, приходящаяся на одну частицу или зерно, вся поверхность которого, за исключением нескольких точек контакта, омывается жидкостью или газом, n — числовая концентрация частиц, c_2 — их радиус. Тензор напряжений в смеси равен

$$(6)\qquad \sigma^{lk} \equiv \sigma_1{}^{lk} + \sigma_2{}^{lk} \equiv \sigma_{1*}{}^{lk} + \sigma_{2*}{}^{lk} = -p_1\delta^{lk} + \sigma_{2*}$$

Из этих выражений следует, что приведенное напряжение $\sigma_{2*}{}^{lk}$ определяется через непосредственно измеряемые величины — полное напряжение в смеси σ^{lk} и давление в порах p_1 — и интерпретируется как часть тензора напряжений $\sigma_2{}^{lk}$ в твердой фазе, обусловленная не зависящей от жидкости или газа передачей импульса через контакты частиц. В малоконцентрированных дисперсных смесях, когда такие контакты отсутствуют, имеем $\sigma_{2*}{}^{lk} = 0$.

Учитывая, что вся поверхность дисперсных частиц (за исключением конечного числа точек контактов между частицами) описывается жидкостью (газом), межфазную силу f^k, приходящуюся на одну частицу, можно представить [1] в виде суммы силы Архимеда f_{A1}^k, присоединенных масс $f_m{}^k$ и силы вязкого трения $f_\mu{}^k$ типа силы Стокса (в пренебрежении силой типа силы Бассе) из-за нестационарности «вязкого погранслоя» вокруг частиц. Тогда уравнения импульсов фаз и полная сила межфазного взаимодействия $R_{12}{}^k$ могут быть переписаны в виде

$$(7)\qquad \rho_1\frac{d_1v_1{}^k}{dt} = \alpha_1\nabla^k p_1 - F_m^k - F_\mu{}^k + \alpha_1 J_{12}(v_2{}^k - v_1{}^k) + \rho_1 g^k$$

$$\rho_2\frac{d_2v_2{}^k}{dt} = \alpha_2\nabla^k p_1 + \nabla^k\sigma_{2*}^k + F_\mu{}^k + \alpha_2 J_{12}(v_2{}^k - v_1{}^k) + \rho_2 g^k$$

$$F_m{}^k = \alpha_2 n f_m{}^k = \frac{1}{2}\eta_m\alpha_1\alpha_2\left(\frac{d_1v_1{}^k}{dt} - \frac{d_2v_2{}^k}{dt}\right)$$
$$F_\mu{}^k = \alpha_1 n f_\mu{}^k = \eta_\mu\alpha_1\alpha_2\mu_1 c_2{}^{-2}(v_1{}^k - v_2{}^k)$$
$$R_{12}{}^k = \nabla^k\alpha_2 p_1 + nf_{A1}^k + nf_m{}^k + nf_\mu{}^k = p_1\nabla^k\alpha_2 + F_m{}^k + F_\mu{}^k +$$
$$+ \alpha_2 J_{12}(v_2{}^k - v_1{}^k)$$

Здесь μ_1 — вязкость первой фазы, η_m и η_μ — коэффициенты, учитывающие влияние взаимодействия частиц.

Рассмотрим другую структуру пористой среды, насыщенной жидкостью, которая занимает поры в виде каналов, форма которых близка к цилиндрической. При такой структуре тензоры $\sigma_{12s}^{lk}\sigma_{21s}^k$, сила f^k и числовая концентрация частиц не имеют смысла и выражения (3)—(7) не могут быть использованы. В этом случае напряжение в жидкой фазе зададим давлением по тем же соображениям, что и в (4). Аналогично

(6) введем приведенный тензор напряжений в твердой фазе $\sigma_{2*}{}^{lk}$

$$\sigma_1{}^{lk} = -\alpha_1 p_1 \delta^{lk}, \quad \sigma_2{}^{lk} = -\alpha_2 p_1 \delta^{lk} + \sigma_{2*}{}^{lk} \tag{8}$$
$$\sigma = \sigma_1{}^{lk} + \sigma_2{}^{lk} = p_1 \delta^{lk} + \sigma_{2*}{}^{lk}$$

Видно, что напряжения σ_{2*}/α_2 характеризуют отличие средних напряжений $\sigma_2{}^{lk}/\alpha_2$ в твердой фазе от давления в порах. Как и ранее в (6), напряжение $\sigma_{2*}{}^{lk}$ можно определять по измерениям σ^{lk} и p_1 [2].

Если каналы в пористой среде гладкие, прямолинейные и ориентированы вдоль относительного ускорения фаз, то в R_{12} нет составляющей $\Delta R_{12}^{(p)}$ из-за мелкомасштабных пульсаций давления. Но появляется составляющая $\Delta R_{12}^{(\tau)}$ из-за вязкого трения жидкости о стенки канала

$$R_{12}{}^k = p\nabla^k \alpha_2 + \Delta_{12}^{(\tau)k}, \quad \Delta R_{12}^{(\tau)k} = F_\mu{}^k \tag{9}$$
$$F_\mu{}^k = \eta_\mu a_*{}^{-2} \mu_1 \alpha_1 \alpha_2 (v_1{}^k + v_2{}^k)$$

где a_* — радиус пор. В общем случае, когда каналы искривлены, появляется составляющая $\Delta R_{12}^{(p)k}$ из-за инерционного взаимодействия фаз

$$\Delta R_{12}^{pk} = F_m{}^k = \eta_m \left[\frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 \rho_1{}^0 \left(\frac{d_1 v_1{}^k}{dt} - \frac{d_2 v_2{}^k}{dt} \right) \right] + \tag{10}$$
$$+ \alpha_2 J (v_2 - v_1); \quad 0 \leqslant \eta^m \leqslant 1$$

В результате обобщение уравнения импульсов фаз (7) на пористые и зернистые среды имеет вид

$$\rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} = -\alpha_1 \nabla p_1 - F_m - F_\mu + J_{12}(v_2 - v_1) + \rho_1 g_1, \tag{11}$$
$$\rho_2 \frac{d_2 v_2}{dt} = -\alpha_2 \nabla p_1 + \nabla^k \sigma_{2*}^k + F_m + F_\mu + \rho_2 g_2$$

Уравнения сохранения (1) и (11) замыкаются уравнениями состояния для жидкой фазы и уравнениями состояния для пористой фазы, а именно уравнениями для $\sigma_{2*}{}^{lk}$. Вариант теории для упругого поведения пористой фазы дан в [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
3. *Клебанов Л. А., Крошилин А. Е., Нигматулин Б. И., Нигматулин Р. И.* О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы уравнений двухскоростного движения двухфазных сред.— ПММ, 1982, т. 46, № 1, с. 83—95.

Баку

Поступила в редакцию
29.II.1984

УДК 532.783

ДИНАМИЧЕСКИЙ ГИСТЕРЕЗИС ПРИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ В ИМПУЛЬСНЫХ ПОЛЯХ

Васильев Ю. В.

Показано, что при рассмотрении работы реальных оптических ячеек на основе нематических жидких кристаллов использование метода Лаврентьева — Ишлинского позволяет объяснить причины экспериментально наблюдаемых различий в характере пропускания света оптическими ячейками на переднем и заднем фронте воздействующего на жидкий кристалл магнитного поля большой величины в виде импульса прямоугольной формы значительной длительности.

1. При некоторой критической величине ($H_* \neq 0$) напряженности однородного статического магнитного поля **H** возможна потеря устойчивости однородной ориентации векторного поля директора **n** (**n** $\perp$ **H**) нематического жидкого кристалла (НЖК)