

Изучим кривую (13) при значении $h = -0,4104 \cdot 10^{-3} \text{ км}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ и кривых а) $q^{+\circ}(h)$ и б) $q^{-\circ}(h)$ (фиг. 1, кривые 7—12 и фиг. 3). Для этого воспользуемся кривыми $E^{\circ}(U)$ и $N^{\circ}(U)$ (в рассматриваемом случае кривая $E^{\circ}(U)$ вырождается в точку либрации L_1).

Кривые Адамара $H^{\circ}(U)$ и геометрического места соприкосновения траекторий (13), т. е. $U^{\circ\circ}(h)$ с линиями уровня (1) проходят вне кривой $N^{\circ}(U)$. Внутри кривой Адамара $H^{\circ}(U)$ расположено геометрическое место соприкосновения $U^{+\circ}(h)$. С другой стороны, кривая $N^{\circ}(U)$ проходит через точку либрации L_1 и имеет общую касательную с кривой Адамара и кривой $U^{+\circ}(h)$.

При больших значениях h кривая $U^{\circ\circ}$ состоит из кольцеобразных областей, охватывающих внутренние и наружные области Хилла. При $h = h_*$ геометрическое место соприкосновений $U^{\circ\circ}(h)$ вырождается в точку либрации L_1 . При $h = -0,4104 \cdot 10^{-3} \text{ км}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ из точки либрации L_1 в обе стороны выделяются ветви геометрического места соприкосновений траекторий с линиями уровня, имеющие вид лемнискаты $U^{+\circ}(h)$. Между $U^{+\circ}(h)$ и $U^{-\circ}(h)$ расположена область смешанного типа $U^{\pm\circ}(h)$ (фиг. 3).

Область $U^{+\circ}(h)$, внутри которой расположена точка либрации L_1 , является областью наружных контактов траекторий с линиями уровня, т. е. областью чисто периферической.

Область $U^{-\circ}(h)$, имеющая форму круга и охватывающая область смешанного типа $U^{\pm\circ}(h)$ и точку либрации L_1 , является областью чисто внутренних контактов траекторий с линиями уровня, т. е. областью чисто апоцентрической.

Область смешанных типов $U^{\pm\circ}(h)$ есть область периферическая $U^{+\circ}(h)$ и область апоцентрическая $U^{-\circ}(h)$.

Из фиг. 1—3 видно, что, чем больше высота полета над поверхностью Луны (и значение h по абсолютной величине больше критического значения), тем больше становится область Хилла, а кривые Дарвина становятся меньшими по размерам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хасанова М. Х. Качественные исследования свойств движения спутника сферои-
дальной планеты. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 3, с. 561—564.
2. Хасанова М. Х. Об одной форме уравнений движения экваториального спутника
планеты. — Докл. АН ТаджССР, 1977, т. 20, № 5, с. 20—22.
3. Хасанова М. Х. Об областях возможного движения спутников Юпитера и Сатур-
на. — Докл. АН ТаджССР, 1977, т. 20, № 8, с. 16—19.
4. Ибрагимова Х. Б., Хасанова М. Х. Качественные свойства движения звезд на пе-
риферии галактики. — Письма в Астрон. ж., 1980, т. 6, № 7, с. 405—407.
5. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Справочное руковод-
ство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 584 с.
6. Моисеев Н. Д. О некоторых общих методах качественного изучения форм движений
в проблемах небесной механики. Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга,
1936, т. 7, вып. 1, с. 5—125.
7. Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения.
М.: Наука, 1968. 352 с.

Душанбе

Поступила в редакцию
2.XI.1983

УДК 533.6

ОБ ИЗОЛИРОВАННОМ ХАРАКТЕРЕ РЕШЕНИЙ С СИЛЬНЫМ ПРИСОЕДИНЕННЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ НА КРОМКАХ V-ОБРАЗНОГО КРЫЛА И КЛИНА

Гришин А. В.

В рамках околосвукового приближения рассматриваются конические задачи сверхзвукового обтекания бесконечного клина и V-образного крыла на режимах, когда течение за присоединенным скачком уплотнения дозвуковое. Выясняется вопрос о возможности существования течения с сильным скачком в плоскости, перпендикулярной кромке крыла или клина. С этой целью в рамках линейной теории исследуются краевые задачи для возмущений относительно точных решений с плоским скачком. По-

казано, что сформулированные краевые задачи имеют решение, если плоский скачок уплотнения, соответствующий точному решению, является слабым (в плоскости, перпендикулярной кромке) и не имеют решений, если скачок сильный.

Ранее [1] рассматривалась задача обтекания V -образного крыла со сверхзвуковым течением за присоединенным скачком уплотнения. Экспериментальные исследования [2—4] обтекания V -образного крыла на режимах, близких к течению с сильным плоским скачком, позволили установить [4] изолированность течения с сильным скачком. Численным методом [5] и экспериментально [2—4] показано, что при уменьшении угла атаки V -образного крыла с сильным плоским скачком осуществляется режим обтекания с маховским взаимодействием ударных волн и слабым скачком на кромке. Установлено [4], что увеличение угла атаки приводит к отходу ударной волны. Предложена [6]¹ некоторая нестационарная модель сверхзвукового обтекания бесконечного клина и показано, что течение с сильной волной в рамках этой модели неустойчиво. Несуществование течения с сильным скачком в принципиально отличающемся случае конечного клина доказано [7] методом годографа без учета завихренности (в околосзвуковом приближении). Получено [8] обобщение этого результата на вихревые течения.

1. Считая скорости отнесенными к скорости звука, рассмотрим задачи в околосзвуковом приближении. В качестве невозмущенного течения возьмем обтекание клина равномерным потоком с присоединенным к кромке клина сильным или слабым скачком уплотнения, когда течение за скачком дозвуковое. Выберем связанную с кромкой клина систему координат, в которой ось z направлена вдоль кромки, ось x — по вектору скорости за ударной волной (фиг. 1). Трансзвуковые составляющие скорости $v = (1 + u, v, w)$ можно представить тогда в виде $u = u_{01}, v = v_{01}, w = 0$ — перед волной, $u = u_{02}, v = 0, w = 0$ — за волной.

Течение с плоским присоединенным скачком уплотнения на клине дает точные решения для семейства V -образных крыльев с плоским присоединенным скачком. Действительно, проведем из начала координат по ударной волне прямые линии. Линии тока, выходящие из точек этих прямых, образуют V -образную поверхность, ребро которой лежит на клине и совпадает с осью x . Эту поверхность можно рассматривать как V -образное крыло с плоским скачком на кромках.

Предположим, что в набегающий поток путем небольшого изменения компоненты скорости u внесено возмущение и поверхность присоединенной ударной волны слабо искривилась. Тогда составляющие скорости перед волной будут $u = (1 + \varepsilon) u_{01}, v = v_{01}, w = 0$, где ε — малый параметр, а за волной — $u = u_{02} + u', v = v', w = w'$. Предположим также, что это течение, как и невозмущенное, обладает конической симметрией, и все параметры потока зависят от переменных $\xi = z/x, \eta = y/x$. Уравнение скачка уплотнения запишем в виде $\eta = \eta_0 + \eta'$, где η_0 соответствует исходному положению ударной волны. В качестве независимых параметров течения выберем η_0 и u_{02} . Ограничимся рассмотрением симметричных относительно плоскости xu крыльев. Геометрию крыла зададим параметрами η_0 и β (фиг. 1). Обозначим $u_{02} = -k^2, k\eta_0 = c$.

Аналогично [1] сформулируем краевую задачу для области OAB в плоскости $\xi\eta$, где OA — образ поверхности крыла, AB — ударной волны, BO — плоскости симметрии. Так как задача рассматривается в околосзвуковом приближении, существует конический потенциал. Из уравнения для потенциала, после его линеаризации, получается уравнение для w' [1] в ([1] $u_{02} = k^2$)

$$(1.1) \quad (1 + k^2\xi^2) w'_{\xi\xi} + 2k^2\xi\eta w'_{\xi\eta} + (1 + k^2\eta^2) w'_{\eta\eta} = -2k^2(\xi w'_\xi + \eta w'_\eta)$$

Уравнение ударной поляры и условие непрерывности потенциала после линеаризации распадаются на соответствующие условия для параметров невозмущенного течения и возмущений, из которых вытекает далее условие для w' на ударной волне [1]

$$(1.2) \quad \eta = \eta_0, \quad \frac{\xi}{\eta_0} \frac{1 - c^2}{1 + c^2} w'_\xi - w'_\eta = 0$$

Далее потребуется также условие непрерывности потенциала возмущений [1]

$$(1.3) \quad \eta = \eta_0, \quad \varepsilon u_{01} + \eta' v_{01} = u' + \eta_0 v' + \xi w'$$

¹ См. также: Русанов В. В., Шаракшанэ А. А. Нестационарные модели обтекания конических тел.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, М., 1978, № 27. 53 с.

Русанов В. В., Шаракшанэ А. А. Исследование линеаризованной нестационарной модели обтекания бесконечного клина.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, М., 1980, № 103. 29 с.

На поверхности крыла ставится условие непротекания $v' = w' \operatorname{tg} \beta$, после дифференцирования которого вдоль поверхности крыла получим

$$(1.4) \quad \eta - \xi \operatorname{tg} \beta = 0, \quad \left(2 + \frac{k^2 \xi^2}{\cos^2 \beta}\right) \operatorname{tg} \beta w'_\xi - \left(1 - \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{k^2 \xi^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{\cos^2 \beta}\right) w'_\eta = 0$$

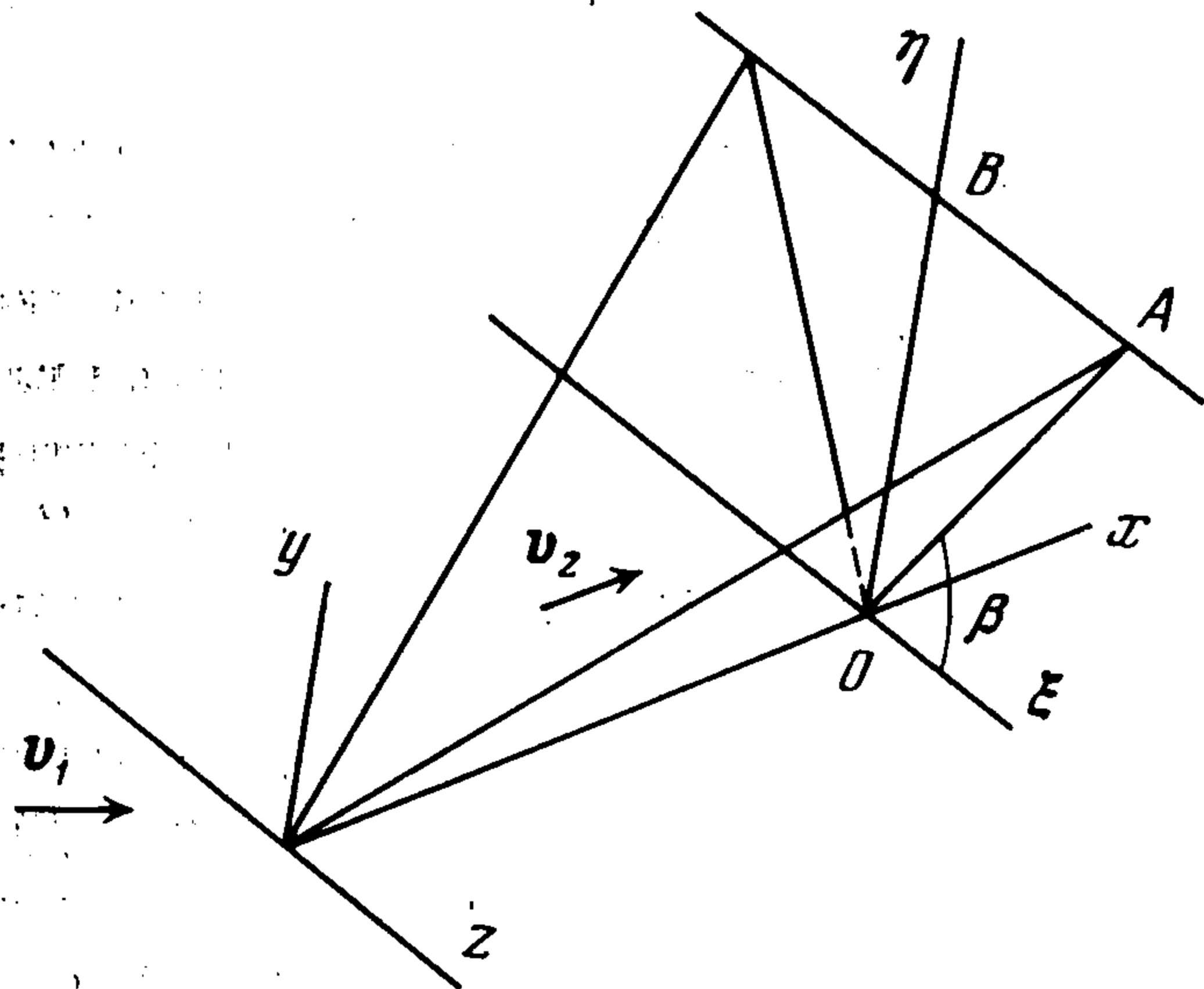
На плоскости симметрии $w' = 0$, следовательно

$$(1.5) \quad \xi = 0, \quad w'_\eta = 0$$

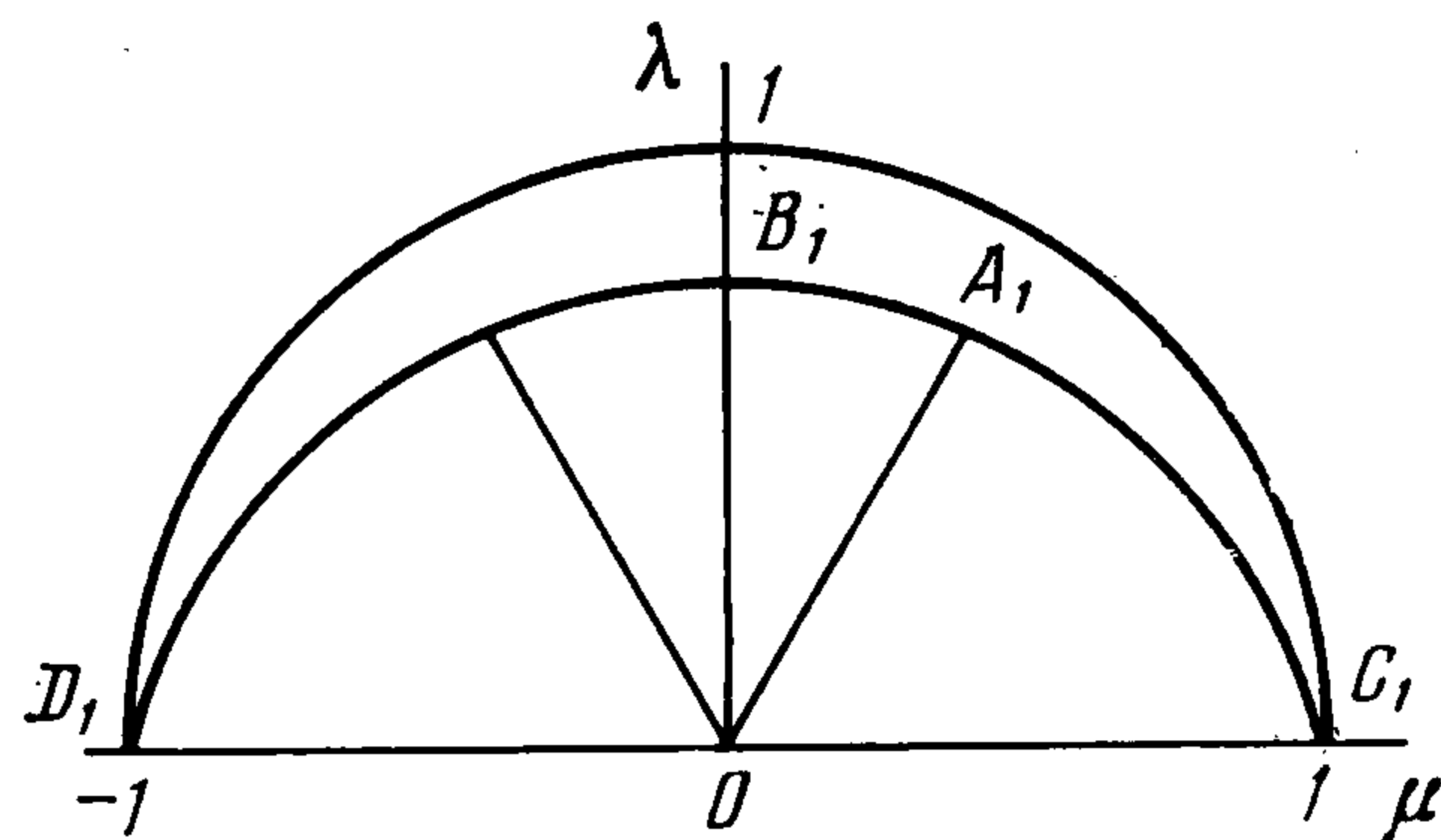
Преобразование координат

$$(1.6) \quad \xi = \frac{2}{k} \frac{\mu}{1 - \mu^2 - \lambda^2}, \quad \eta = \frac{2}{k} \frac{\lambda}{1 - \mu^2 - \lambda^2}$$

сводит (1.1) к уравнению Лапласа. Прямая $\eta = \eta_0$ переходит в дугу окружности $k\eta_0(1 - \mu^2 - \lambda^2) = 2\lambda$, область OAB отображается на область OA_1B_1 , а верхняя полу-



Фиг. 1



Фиг. 2

плоскость — на половину единичного круга (фиг. 2). Краевые условия (1.2), (1.4), (1.5) принимают соответственно вид

$$(1.7) \quad (1 - c^2 + 2c\lambda) w'_\mu - [2c\mu + (1 + c^2)\lambda\mu^{-1}] w'_\lambda = 0$$

$$(1.8) \quad 2 \operatorname{tg} \beta \cos^4 \beta w'_\mu - [(1 - \operatorname{tg}^2 \beta) \cos^4 \beta - \mu^2] w'_\lambda = 0$$

$$(1.9) \quad w'_\lambda = 0$$

Сформулированная в области OA_1B_1 краевая задача является однородной задачей Гильберта для аналитической функции $f + ig = w_\mu - iw_\lambda$ с разрывным в угловых точках области краевым условием вида $Sf + Lg = 0$. Разрешимость задачи устанавливается путем конформного отображения $r = R(\omega) = R(\mu + i\lambda)$ области на круг с последующим подсчетом индекса соответствующей задачи для функции $f_1(r) + ig_1(r) = f(\omega) + ig(\omega)$ с краевым условием $S_1(t)f_1(t) + L_1(t)g_1(t) = 0$, $S_1(t) = S(\tau)$, $L_1(t) = L(\tau)$ на окружности.

Индекс задачи κ определяется формулой $\kappa = \sum \kappa_k$, где κ_k — целые числа, вычисляемые в точках разрыва краевого условия в зависимости от требуемого в этих точках класса функций (имеется в виду индекс эквивалентной задачи Римана с непрерывным коэффициентом, разрешимость которой устанавливается по известным теоремам ([9], с. 110—113)). Класс функций $f + ig$ задается физическим условием ограниченности скорости w' , которое эквивалентно интегрируемости $f + ig$ в плоскости $\mu\lambda$. Для выбора класса $f_1 + ig_1$ в точках разрыва аргумента вектора (S_1, L_1) на окружности необходимо учесть асимптотики отображения $r = R(\omega)$, определяемые внутренними углами α_k в угловых точках области OA_1B_1 . Для ограниченности w' числа κ_k надо выбирать исходя из условий [1]

$$\kappa_k = \begin{cases} 1, & \pi - \alpha_k < \theta_k < \pi \\ 0, & -\alpha_k < \theta_k < \pi - \alpha_k \\ -1, & -\pi < \theta_k < -\alpha_k \end{cases}$$

где θ_k — скачок аргумента вектора (S_1, L_1) в рассматриваемой точке разрыва (аргумент вычисляется, как $\operatorname{arctg}(L_1/S_1)$, при этом $|\theta_k| < \pi$). Выбранные таким образом ветви аргумента в силу (1.7) — (1.9) имеют разрывы только в точках O и A_1 .

Вычисляя теперь индекс в зависимости от значений параметров η_0, u_{02}, β , найдем, что при $2 \sin^2 \beta > 1 - c^2$ будет $\kappa = -1$ и, следовательно [9], не существует нетривиального решения задачи. При $2 \sin^2 \beta < 1 - c^2$ имеем $\kappa = 0$, т. е. в соответствии с [9] задача имеет единственное решение, определяемое с точностью до постоянного множителя. Этот множитель вычисляется затем из условия присоединения скачка уплотнения ($\eta' = 0$ в точке A) и условия $w' = 0$ в плоскости симметрии.

Из уравнения ударной поляры в плоскости, перпендикулярной кромке крыла [1], получим, что при $2 \sin^2 \beta > 1 - c^2$ скачок уплотнения сильный, а при $2 \sin^2 \beta < 1 - c^2$ — слабый. Следовательно, если скачок уплотнения сильный, то решения задачи не существует, если же он слабый, то решение существует и единственно.

2. Рассмотрим задачу обтекания клина. В исходное течение с плоским скачком на клине внесем возмущение путем слабой конической деформации поверхности клина ($\varepsilon = 0$). На поверхности тогда имеет место условие непротекания $v = q(\xi)$. Рассмотрим такие возмущения, когда $dq/d\xi$ удовлетворяет условию Гельдера. Пусть для простоты $q(\xi) = 0$ при $|\xi| > \xi_0 > 0$. Выясним, существует ли решение задачи при произвольной функции $q(\xi)$ из указанного класса. Решение будем искать при условии, что величина возмущения ударной волны η' на всем ее протяжении конечна.

Сформулируем краевую задачу в полосе $0 < \eta < \eta_0$, ограниченной образцами поверхностей клина $\eta = 0$ и ударной волны $\eta = \eta_0$. Дифференцируя условие непротекания вдоль поверхности клина, найдем

$$\eta = 0, w_\eta' = v_\xi' = dq/d\xi = \rho(\xi)$$

На поверхности ударной волны выполняется условие (1.2).

Переходя к переменным μ, λ , получим неоднородную краевую задачу Гильберта для функции $f + ig = w_\mu' - iw_\lambda'$ в области $OC_1B_1D_1$ с условием

$$\lambda = 0, w_\lambda' = \rho(\xi(\mu)) = p(\mu)$$

на D_1C_1 и условием (1.8) на $C_1B_1D_1$. Эти условия имеют вид $Sf + Lg = p$. Аргумент вектора (S, L) терпит разрыв в точках C_1D_1 .

Для подсчета индекса эквивалентной задачи Римана необходимо выяснить, в каком классе функций следует искать ее решение. Из условия непрерывности потенциала (1.3) видим, что для ограниченности η' при $|\xi| \rightarrow \infty$ величина w' должна иметь асимптотику вида $w' \sim 1/\xi^{1+\alpha}$, где $\alpha > 0$. Учитывая асимптотику отображения (1.6) в точках C_1, D_1 , найдем, что для выполнения указанного требования необходимо, чтобы функция $f + ig$ имела в этих точках нули некоторого порядка. Так как в точках C_1, D_1 аргумент вектора (S, L) терпит разрыв первого рода, наличие нулей обеспечено, если решение ищется в классе ограниченных функций [9].

Отображая теперь область $OC_1B_1D_1$ на круг и вычисляя индекс эквивалентной задачи Римана в классе ограниченных функций (при отображении изменяется лишь порядок нуля решения в образах точек C_1, D_1), найдем, что при условии $1 - c^2 < 0$ будет $\kappa = -2$, т. е. задача при произвольной функции $q(\xi)$ не имеет решения. Решение существует и единственно, если $q(\xi)$ удовлетворяет одному условию разрешимости [9]. Это условие выполняется автоматически, если $q(\xi) = q(-\xi)$. Когда $1 - c^2 > 0$, индекс равен нулю и задача в плоскости $\mu\lambda$ имеет общее решение вида $f + ig = F(\omega) + CQ(\omega)$, где C — произвольная действительная постоянная [9]. Для выполнения условия $w = 0$ в точках C_1, D_1 полученное решение должно удовлетворять дополнительному требованию

$$\operatorname{Re} \int_{C_1}^{D_1} (f + ig) d\omega = 0$$

из которого определяется постоянная C . В случае, когда $\kappa = -2$, это требование имеет смысл второго условия разрешимости. Решения, полученные при выполнении обоих условий разрешимости, имеют изолированный характер.

Поскольку условие $1 - c^2 > 0$ соответствует слабому скачку уплотнения, а $1 - c^2 < 0$ — сильному [1], из проведенного анализа вытекает, что при произвольном коническом возмущении поверхности клина решение существует и единственно, если невозмущенный скачок уплотнения слабый, и не существует, если скачок сильный.

Автор благодарит Э. Г. Шифрина за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А. В., Шифрин Э. Г. О режиме присоединенного скачка уплотнения на кромках V-образного крыла.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 38—44.
2. Келдыш В. В. Исследование течения в окрестности V-образных крыльев, образованных поверхностями тока за плоским скачком уплотнения.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4, с. 50—55.
3. Зайцев Ю. И., Келдыш В. В. Особые случаи течения вблизи сверхзвуковой кромки и линии пересечения скачков уплотнения.— Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1, с. 48—59.
4. Зубин М. А., Остапенко Н. А. Экспериментальное исследование некоторых особенностей сверхзвукового обтекания V-образных крыльев.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4, с. 130—135.
5. Лапыгин В. И. О решении задачи обтекания V-образного крыла с сильной ударной волной на передней кромке.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3, с. 114—119.
6. Русанов В. В., Шаракшанэ А. А. Об устойчивости течений около бесконечного клина или конуса, помещенных в сверхзвуковой поток газа.— В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 268—272.
7. Франкль Ф. И. К вопросу о единственности решения задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 3, с. 421—424.
8. Никольский А. А. О плоских вихревых течениях газа.— В кн.: Аэромеханика. М.: Наука, 1976, с. 55—64.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.XII.1983

УДК 532.529

К ДВУХСКОРОСТНОЙ МЕХАНИКЕ ЗЕРНИСТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

Мусаев Н. Д.

Рассматривается двухфазная смесь пористой или зернистой твердой фазы с жидкостью или газом, заполняющим поры или промежутки между зёрнами. Выделены две предельные структуры смеси: 1) твердая фаза является плотной упаковкой сферических частиц (зерен), контактирующих через точечные межзеренные контакты, 2) поры являются каналами, по форме близкими к цилиндрическим. В указанных двух структурах рассматриваются выражения для межфазных сил и уравнения двухскоростного движения фаз. Отмечается разное проявление в зависимости от структуры смеси межфазных сил за счет сил инерции, в частности сил Архимеда и присоединенных масс.

Используя представления о многоскоростном континууме, уравнения сохранения масс фаз запишем в виде [1]

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial \rho_1 / \partial t + \nabla^k \rho_1 v_1^k &= J_{21}, \quad \partial \rho_2 / \partial t + \nabla^k \rho_2 v_2^k = J_{12} \\ (\rho_i &= \rho_i^0 \alpha_i, \quad i = 1, 2; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1) \end{aligned}$$

Нижние индексы $i = 1, 2$ относятся соответственно к параметрам жидкой (газовой) и твердой фаз, ρ_i^0 и ρ_i — соответственно истинная и приведенная плотности, связанные через объемную концентрацию α_i , v_i — скорость i -й фазы, J_{ji} — интенсивность фазовых переходов, характеризующая количество массы j -й фазы, перешедшей в i -ю в единице объема смеси и в единицу времени ($i, j = 1, 2; i \neq j$).

Уравнения импульсов фаз можно представить в виде [1]

$$(2) \quad \begin{aligned} \rho_1 \frac{d_1 v_1^k}{dt} &= \nabla^l \sigma_1^{lk} - R_{12}^k - J_{12} (v_2^k - v_1^k) + \rho_1 g_1^k \\ \rho_2 \frac{d_2 v_2^k}{dt} &= \nabla^l \sigma_2^{lk} + R_{12}^k + \rho_2 g_2^k \end{aligned}$$

Здесь σ_i^{lk} — тензор напряжения в i -й фазе, определяющий перенос импульса в i -й фазе через единичное плоское сечение в смеси, R_{12}^k — межфазная сила, определяющая перенос импульса из первой во вторую фазу через межфазную поверхность в единице объема смеси, g_i^k — векторы внешних массовых сил. При записи члена, связанного с переносом импульса из-за фазовых переходов, полагалось, что масса, претер-