

УДК 531.55 + 521.1

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ЛУНЫ
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ**

Хасанова М. Х.

Методами качественного анализа [1—4] исследуются некоторые характеристики движения спутников Луны в окрестности точки либрации L_1 . Луна рассматривается как тело с неравными главными центральными моментами инерции, медленно вращающееся с постоянной угловой скоростью n вокруг меньшей главной центральной оси инерции.

Рассмотрим плоскую задачу о движении спутника Луны в ее экваториальной плоскости. Оси прямоугольной декартовой системы координат совместим с главными осями центрального эллипсоида инерции. Разложение силовой функции тяготения выразится следующей формулой [5]:

$$(1) \quad U = \frac{fM}{r} + \frac{f}{r^5} [(B + C - 2A)x^2 + (A + C - 2B)y^2] + \dots, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

где f — постоянная тяготения, M — масса Луны, A, B, C — ее главные центральные моменты инерции, r — селеноцентрическое расстояние.

Уравнения движения экваториального спутника имеют вид

$$(2) \quad x'' - 2ny' - n^2x = U_x', \quad y'' + 2nx' - n^2y = U_y'$$

Введем в выражение (1) и уравнения (2) безразмерный малый параметр α , обозначив

$$\frac{B + C - 2A}{MR^2} = \alpha\lambda, \quad \frac{A + C - 2B}{MR^2} = \alpha\mu$$

где λ и μ — некоторые постоянные, R — средний экваториальный радиус Луны.

Тогда силовая функция (1) представится рядом по степеням малого параметра α . При $\alpha = 0$ эллипсоид обращается в сферу и движение спутника в инерциональной системе координат происходит по невозмущенной кеплеровской орбите.

Система (2) допускает интеграл Якоби (h — постоянная Якоби)

$$(3) \quad x'^2 + y'^2 = n^2(x^2 + y^2) + 2 \left[\frac{fM}{r} + \frac{fM\alpha R^2}{r^5} (\lambda x^2 + \mu y^2) + \dots + h \right]$$

Координаты точек либрации находятся из условий $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, которые при малом α дают

$$(4) \quad x_0 = \pm \left(a_0 + \frac{3fM\alpha R^2}{n^2 a_0^4} \lambda + \dots \right), \quad y_0 = 0$$

$$y_0 = \pm \left(a_0 + \frac{3fM\alpha R^2}{n^2 a_0^4} \mu + \dots \right), \quad x_0 = 0; \quad a_0 = \left(\frac{fM}{n^2} \right)^{1/3}$$

Полагая в (3) $x' = y' = 0$, вычислим критические значения h_* постоянной Якоби при малом α

$$h_{01} = \frac{3fM}{a_0} + \frac{2fM\alpha R^2}{a_0^3} \lambda, \quad h_{02} = \frac{3fM}{a_0} + \frac{2fM\alpha R^2}{a_0^3} \mu$$

Качественные исследования характеристик движения спутников Луны в ее экваториальной плоскости были проведены при следующих значениях астродинамических постоянных [5]:

$$A = 0,88781798 \cdot 10^{29} \text{ кг} \cdot \text{км}^2, \quad fM = 4,9024779 \cdot 10^{-6} \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}, \quad B = 0,88800195 \cdot 10^{29} \text{ кг} \cdot \text{км}^2, \quad n = 2,661699989 \cdot 10^{-6} \cdot \text{с}^{-1}, \quad C = 0,88836978 \cdot 10^{29} \text{ кг} \cdot \text{км}^2, \quad R = 1738,09 \text{ км}.$$

При этих значениях $h_* = -0,1162 \cdot 10^{-3} \text{ км}^2 \cdot \text{с}^{-2}$.

Для высот полета спутника над поверхностью Луны от $H = 50$ км до 100 км с шагом 10 км значения постоянной интеграла Якоби следующие:

$$h \cdot 10^3 = -0,5137, -0,4104, -0,3121, -0,2100, -0,1162, +0,1900 \text{ км}^2 \cdot \text{с}^{-2}.$$

Точки либрации $L_{1,2} = (\pm 0,9635; 0)$, $L_{3,4} (0; \pm 0,8988)$ (при $H = 90$ км) располагаются симметрично относительно начала координат.

Теперь, принимая точку либрации L_1 за начало новой системы координат с осями, параллельными осям старой системы, и производя замену переменных $x = x_0 + \xi$ и $y = \eta$, получим уравнения движения спутника с точностью до малых первого порядка относительно ξ и η в виде

$$(5) \quad \begin{aligned} \xi'' - 2n\eta' - d^2\xi &= \bar{V}'_{\xi} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \xi \partial \eta} \\ \eta'' + 2n\xi' - n^2\eta &= \bar{V}'_{\eta} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \eta^2} + \xi \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \eta \partial \xi} \\ \bar{V} &= \frac{fM}{\rho} + \frac{fM\alpha R^2}{\rho^3} [\lambda (x_0 + \xi)^2 + \mu \eta^2], \quad \rho^2 = (x_0 + \xi)^2 + \eta^2 \end{aligned}$$

Интеграл Якоби (3) преобразуется к виду

$$(6) \quad V^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = n^2 (x_0^2 + \xi^2 + \eta^2 + 2x_0\xi) + 2(\bar{V} + h)$$

Считая ξ и η достаточно малыми, а постоянную Якоби h близкой к критическим значениям, изучим характеристики движения спутника в его экваториальной плоскости и определим типы особенностей в окрестности точки либрации L_1 .

С точностью до членов второго порядка относительно ξ и η приближенная кривая Хилла [6] в данном случае примет вид эллипса с эксцентриситетом $\approx 0,50$

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} &= 1; \quad a = \sqrt{\frac{N_3}{N_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{N_3}{N_2}}, \\ N_1 &= \frac{3n^2 + 12n^{10/3}fMR^2}{fM^{1/3}} \alpha\mu; \quad N_2 = \frac{n^{10/3}fMR^2\alpha(2\lambda - 5\mu)}{fM^{1/3}} \\ N_3 &= 2(h - n^{10/3}fM^{1/3} + n^2fM\alpha R^2\mu) \end{aligned}$$

В случае

$$x_0 = \pm \left(a_0 + \frac{3fM\alpha R^2}{n^2 a_0^4} \lambda + \dots \right)$$

характеристическое уравнение системы (5) преобразуется к виду

$$(7) \quad \gamma^4 + \left(1 - \frac{4\lambda + 2\mu}{a_0^8} \right) \gamma^2 + 6 \left(\frac{\mu - \lambda}{a_0^8} \right) = 0$$

При $\lambda > \mu$ уравнение (7) имеет два вещественных и два сопряженных чисто мнимых корня. Параметры $|\lambda|^{1/2}$ и $|\mu|^{1/2}$ — постоянные величины и зависят от моментов инерции и массы тела. С точностью до величины второго порядка малости относительно ξ и η эти корни имеют вид

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{6|\lambda - \mu|}/a_0^4, \quad \gamma_{3,4} = \pm i.$$

При $\lambda < \mu$ уравнение (7) имеет два попарно сопряженных различных чисто мнимых корня

$$\gamma_{1,2} = \pm i\sqrt{6|\lambda - \mu|}/a_0^4, \quad \gamma_{3,4} = \pm i$$

Следовательно, только в первом приближении точка либрации L_1 является особой точкой типа центр.

Принимая в качестве однопараметрического семейства кривых [7] систему концентрических окружностей

$$(8) \quad \xi^2 + \eta^2 = d^2$$

исследуем поведение траекторий спутника около точки либрации L_1 при различных значениях h , которые мало отличаются от критического значения.

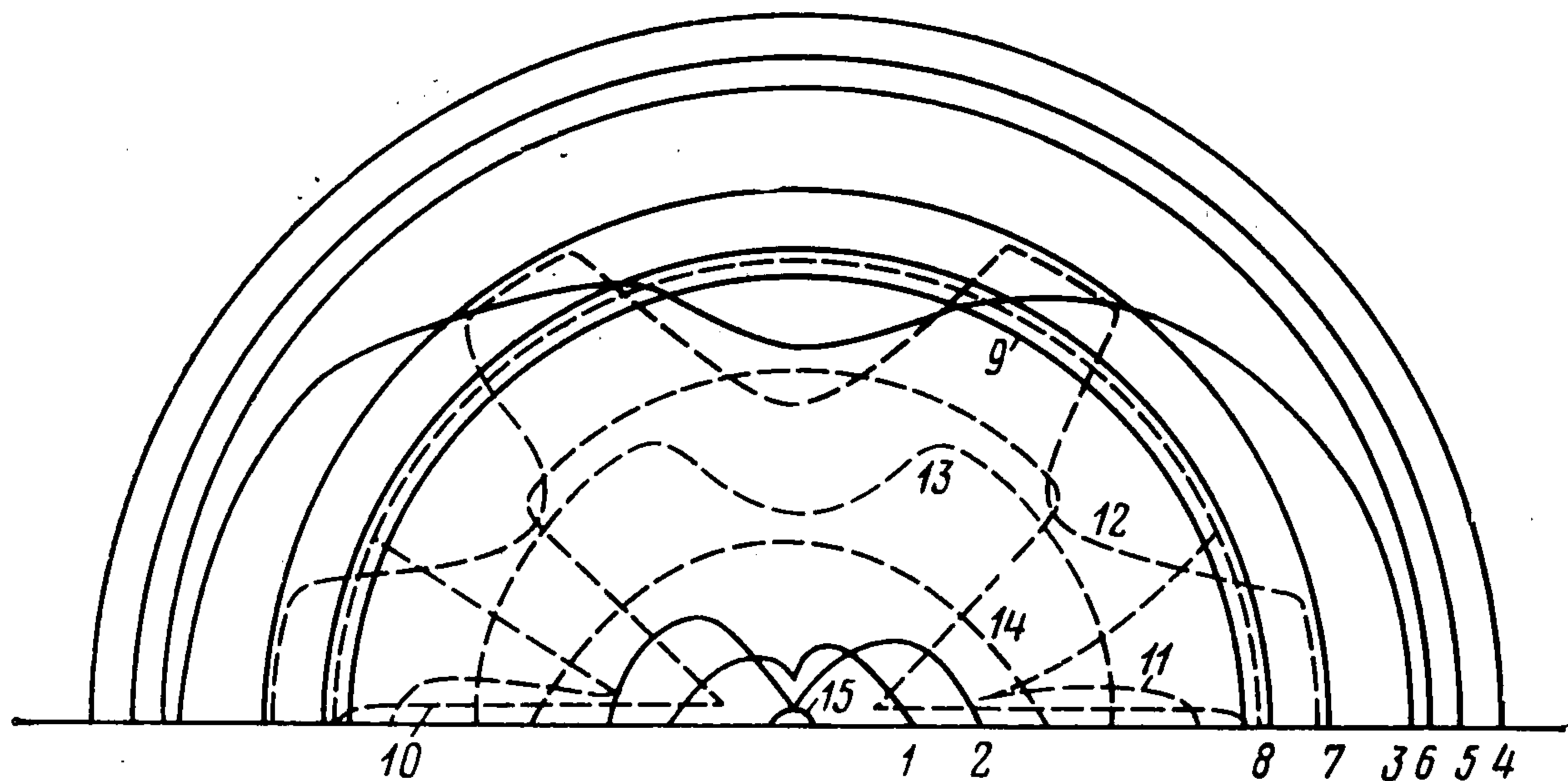
При каждом фиксированном значении h на плоскости ξ, η существует кривая $v^0(h)$ нулевых скоростей, уравнение которой в полярных координатах после перехода к старым переменным имеет вид'

$$(9) \quad \begin{aligned} v^0(h) &= n^2\rho^5 + 2h\rho^3 + 2fM\rho^2 + fMR^2 [(2C - B - A) + \\ &+ 3(B - A)\cos 2\varphi] = 0. \\ (\rho^2 &= \xi^2 + \eta^2, \quad \text{arctg } \varphi = \eta/\xi) \end{aligned}$$

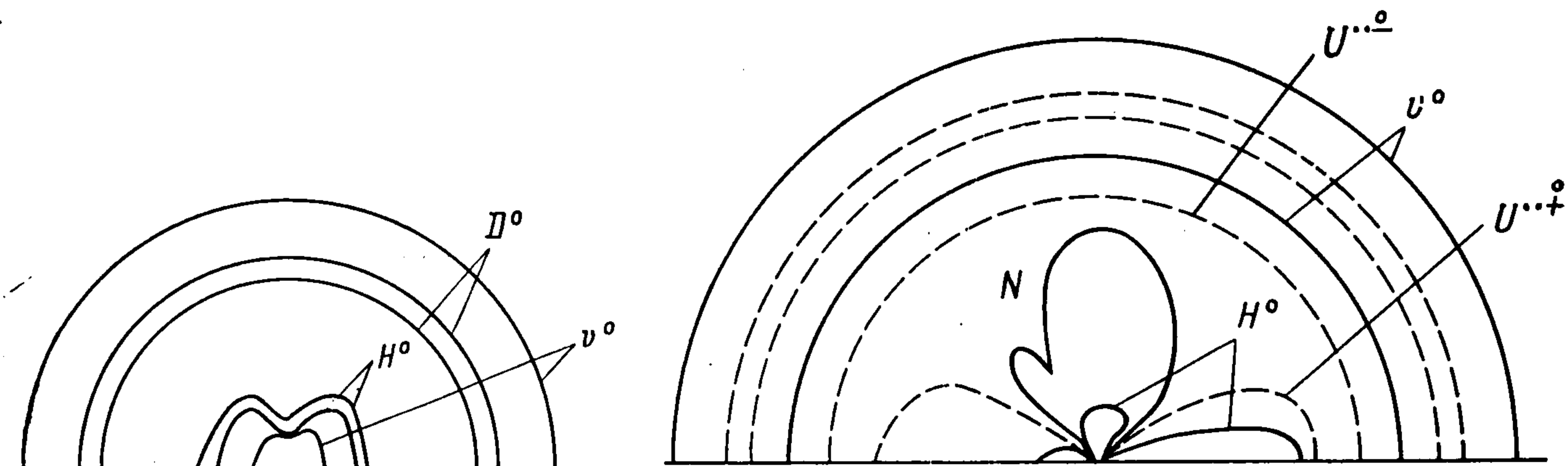
Если корни уравнения (9) действительные, то кривая Хилла разделяет плоскость ρ, φ на две области: в одной из них $v^2 < 0$ и движение невозможно, а в другой $v^2 > 0$ и движение возможно, причем внутри нее расположены все траектории, соответствующие данному значению постоянной Якоби h (фиг. 1, кривые 1—4).

Отметим, что фиг. 1—3 построены для случая $h = 0,4104 \cdot 10^{-3}$.

Определяя корни уравнения (9) для конкретных значений h , замечаем, что:



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 3

1°. При $h > h_*$ кривая Хилла не представляет интереса вследствие того, что спутник может неограниченно удаляться от точки либрации L_1 .

2°. При $h < h_*$ кривая Хилла будет представлена в виде замкнутой овалоподобной кривой, окружающей точку L_1 ; внутри нее движение невозможно, так как $v^2 < 0$ (фиг. 1, заштрихованные линии, фиг. 2). Вне овала $v^2 > 0$, следовательно, движение возможно (фиг. 1, кривые 1—4, фиг. 2, 3).

3°. При значениях $h = -0,5136 \cdot 10^{-3}$, $-0,4104 \cdot 10^{-3}$, $-0,3121 \cdot 10^{-3}$ км²·с⁻² кривые Хилла, окружающие L_1 , имеют форму овалов, вытянутых по оси ординат. С увеличением по абсолютной величине отрицательных по знаку h вытянутость кривых уменьшается и форма их приближается к окружности.

4°. При малых значениях h ($|h| < 0,2100 \cdot 10^{-3}$ км²·с⁻²) кривая Хилла принимает вид, подобный лемнискате, что говорит о наличии особенностей типа центр (фиг. 1, кривые 1, 2).

5°. При $h = h_*$ внутренняя кривая стягивается в точку либрации L_1 .

Для изучения пучка траекторий, выходящих из одной точки (эллиптический, если $D^0(h) < 0$, гиперболический, если $D^0(h) > 0$, и параболический, если $D^0(h) = 0$), рассмотрим кривую Дарвина, уравнение которой в данном случае примет вид [4, 6]

$$(10) \quad D^0(h) = 64 n^4 \rho^{10} + 124 n^2 h \rho^8 + 124 n^2 f M \rho^7 + \\ + 64 n^2 f M R^2 [2C - B - A + (B - A) \cos 2\varphi] \rho^5 + 8 f^2 M^2 \rho^4 + \\ + 24 f^2 M^2 R^2 [2C - A - B + 3(B - A) \cos 2\varphi] \rho^2 + f^2 M^2 R^4 [(B + \\ + C - 2A)^2 + (A + C - 2B)^2] (39 + 53 \cos 2\varphi + 21 \cos 4\varphi) = 0$$

Вычисляя корни уравнения (10) для исследуемых значений h , заключаем, что
1°. Для всех исследуемых значений h , не превышающих критического значения h_* , кривые Дарвина, окружающие точку L_1 , имеют форму, близкую к окружности (фиг. 1, кривые 5, 6, 15 и фиг. 2).

2°. Кривая Дарвина не имеет точек прекращения; из 1° следует, что она не может иметь при $h \neq h_*$ и ветвей, уходящих в бесконечность, следовательно, должна состоять из замкнутых ветвей.

3°. При $h = h_*$ кривая Дарвина, как и кривая Хилла, вырождается в точку либрации L_1 .

4°. При больших значениях $|h|$ около точки либрации L_1 имеем кривую Дарвина, близкую к окружности, которая целиком располагается внутри области возможности движения (фиг. 1, кривые 5, 15). При этом внутри кривой (фиг. 1, кривые 5, 15) характеристика $D^\circ(h) < 0$ и тип пучка эллиптический, вне его $D^\circ(h) > 0$ и тип пучка гиперболический.

5°. С увеличением значений $|h|$ кругоподобные области Дарвина, где траектории имели эллиптический тип, уменьшаются, как и наружные кривые Хилла.

Сравнивая совокупность кривых Хилла и Дарвина, приходим к следующему заключению: при малых значениях h , для которых проводилось исследование кривых Хилла и Дарвина, отличающихся от значения h_* , соответствующего точке либрации L_1 , кривая Хилла не пересекает кривую Дарвина и расположена от последней по ту сторону, где характеристика Дарвина положительна и тип пучка гиперболический.

Для более полного изучения качественной картины движения спутника в поле тяготения трехосного эллипсоида рассмотрим геометрическое место соприкосновения траекторий с топографическим семейством окружностей (8).

Уравнение геометрического места соприкосновения (характеристика контактов) имеет вид

$$(11) \quad q^{\circ\circ}(h) = 2n^6\rho^{10} + 4n^4h\rho^8 + fMn^4R^2[2(C-A) + B + (3B-2A)\cos 2\varphi] \times \\ \times \rho^5 \pm 2 \left\{ 2n^4\rho^6 + 4n^2h\rho^4 + 2fMR^2\rho^3 + 3n^2h^2R^2\rho^2 + \right. \\ \left. + fM \left\{ n^2R^2 [2(C-A) - B + (3B-2A)\cos 2\varphi] + \frac{3h}{n^2R^2} \right\} \rho + 3f^2M^2 \right\} = 0$$

Используя кривую (11) и результаты [4], изучим следующие кривые: а) $q^{\circ\circ\pm}(h) = 0$, т. е. геометрическое место соприкосновения с теми же окружностями (8) для траектории прямого движения; б) $q^{\circ\circ\mp}(h) = 0$, т. е. геометрическое место соприкосновения с теми же окружностями для траектории обратного движения.

Кривая а) делит всю плоскость ρ, φ на область чисто наружных контактов траекторий прямого движения с окружностями (8) $q^{\circ\circ\pm}(h)$ и область чисто внутренних контактов траекторий прямого движения $q^{\circ\circ\pm}(h)$. Кривая б) делит плоскость на область чисто наружных контактов траекторий обратного движения с окружностями (8) $q^{\circ\circ\mp}(h)$ и область чисто внутренних контактов траекторий обратного движения с окружностями (8) $q^{\circ\circ\mp}(h)$. Кривая $q^{\circ\circ\pm}$ представляет собой область смешанных контактов. В ней возможны как внутренние, так и наружные контакты. На фиг. 1 кривые 7—9 — границы области чисто наружных контактов траекторий прямого движения; кривые 10—12 (штриховые линии) — границы области чисто внутренних контактов траекторий прямого движения; между кривыми 3 и 7, 3 и 6 проходит граница области чисто наружных контактов траекторий обратного движения (на фиг. 1 они не изображены). Кривая 13 и кривые, находящиеся между кривыми 2 и 13, 13 и 8, являются границей области чисто внутренних контактов траекторий обратного движения.

При $h = h_*$ критическое значение характеристики контактов вырождается в точку либрации L_1 . При дальнейшем увеличении значений $|h|$ область наружных контактов и внутренних контактов траекторий (прямого и обратного) движения не смыкается между собой.

Внутренняя часть геометрического места соприкосновений представляет собой кривую Адамара (контакт внутри кривой Адамара для любой возможной траектории будет наружным), уравнение которой имеет вид

$$H^\circ(q) = 2n^2\rho^5 + fM\rho^2 + 2fMR^2 [(A - B + 2C) - 3(A - B)\cos 2\varphi] = 0$$

Кривая $H^\circ(q)$ в рассматриваемом случае подобна лемнискате (фиг. 2, 3).

Перейдем к краткому разбору некоторых общих свойств характеристики контактов с линиями уровня

$$(12) \quad U(x, y) = -h = \text{const}$$

При помощи системы (2) и интеграла Якоби (3) уравнение геометрического места соприкосновений траекторий с линиями уровня (12) представим в виде

$$(13) \quad 2N(U+h) \pm 2nE^{3/2} [2(U+h)^{1/2} + E^2] = 0 \\ (E = U_x'^2 + U_y'^2, N = U_{xx}''U_y'^2 + 2U_{xy}''U_x'U_y' + U_{yy}''U_x'^2)$$

Уравнение кривой Адамара запишем следующим образом:

$$H^\circ(U) = (n^2E - N)E = 0$$

Изучим кривую (13) при значении $h = -0,4104 \cdot 10^{-3} \text{ км}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ и кривых а) $q^{+\circ}(h)$ и б) $q^{-\circ}(h)$ (фиг. 1, кривые 7—12 и фиг. 3). Для этого воспользуемся кривыми $E^{\circ}(U)$ и $N^{\circ}(U)$ (в рассматриваемом случае кривая $E^{\circ}(U)$ вырождается в точку либрации L_1).

Кривые Адамара $H^{\circ}(U)$ и геометрического места соприкосновения траекторий (13), т. е. $U^{\circ\circ}(h)$ с линиями уровня (1) проходят вне кривой $N^{\circ}(U)$. Внутри кривой Адамара $H^{\circ}(U)$ расположено геометрическое место соприкосновения $U^{+\circ}(h)$. С другой стороны, кривая $N^{\circ}(U)$ проходит через точку либрации L_1 и имеет общую касательную с кривой Адамара и кривой $U^{+\circ}(h)$.

При больших значениях h кривая $U^{\circ\circ}$ состоит из кольцеобразных областей, охватывающих внутренние и наружные области Хилла. При $h = h_*$ геометрическое место соприкосновений $U^{\circ\circ}(h)$ вырождается в точку либрации L_1 . При $h = -0,4104 \cdot 10^{-3} \text{ км}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ из точки либрации L_1 в обе стороны выделяются ветви геометрического места соприкосновений траекторий с линиями уровня, имеющие вид лемнискаты $U^{+\circ}(h)$. Между $U^{+\circ}(h)$ и $U^{-\circ}(h)$ расположена область смешанного типа $U^{\pm\circ}(h)$ (фиг. 3).

Область $U^{+\circ}(h)$, внутри которой расположена точка либрации L_1 , является областью наружных контактов траекторий с линиями уровня, т. е. областью чисто периферической.

Область $U^{-\circ}(h)$, имеющая форму круга и охватывающая область смешанного типа $U^{\pm\circ}(h)$ и точку либрации L_1 , является областью чисто внутренних контактов траекторий с линиями уровня, т. е. областью чисто апоцентрической.

Область смешанных типов $U^{\pm\circ}(h)$ есть область периферическая $U^{+\circ}(h)$ и область апоцентрическая $U^{-\circ}(h)$.

Из фиг. 1—3 видно, что, чем больше высота полета над поверхностью Луны (и значение h по абсолютной величине больше критического значения), тем больше становится область Хилла, а кривые Дарвина становятся меньшими по размерам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хасанова М. Х. Качественные исследования свойств движения спутника сферои-
дальной планеты. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 3, с. 561—564.
2. Хасанова М. Х. Об одной форме уравнений движения экваториального спутника
планеты. — Докл. АН ТаджССР, 1977, т. 20, № 5, с. 20—22.
3. Хасанова М. Х. Об областях возможного движения спутников Юпитера и Сатур-
на. — Докл. АН ТаджССР, 1977, т. 20, № 8, с. 16—19.
4. Ибрагимова Х. Б., Хасанова М. Х. Качественные свойства движения звезд на пе-
риферии галактики. — Письма в Астрон. ж., 1980, т. 6, № 7, с. 405—407.
5. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Справочное руковод-
ство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 584 с.
6. Моисеев Н. Д. О некоторых общих методах качественного изучения форм движений
в проблемах небесной механики. Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга,
1936, т. 7, вып. 1, с. 5—125.
7. Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения.
М.: Наука, 1968. 352 с.

Душанбе

Поступила в редакцию
2.XI.1983

УДК 533.6

ОБ ИЗОЛИРОВАННОМ ХАРАКТЕРЕ РЕШЕНИЙ С СИЛЬНЫМ ПРИСОЕДИНЕННЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ НА КРОМКАХ V-ОБРАЗНОГО КРЫЛА И КЛИНА

Гришин А. В.

В рамках околосвукового приближения рассматриваются конические задачи сверхзвукового обтекания бесконечного клина и V-образного крыла на режимах, когда течение за присоединенным скачком уплотнения дозвуковое. Выясняется вопрос о возможности существования течения с сильным скачком в плоскости, перпендикулярной кромке крыла или клина. С этой целью в рамках линейной теории исследуются краевые задачи для возмущений относительно точных решений с плоским скачком. По-