Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 2, 1985

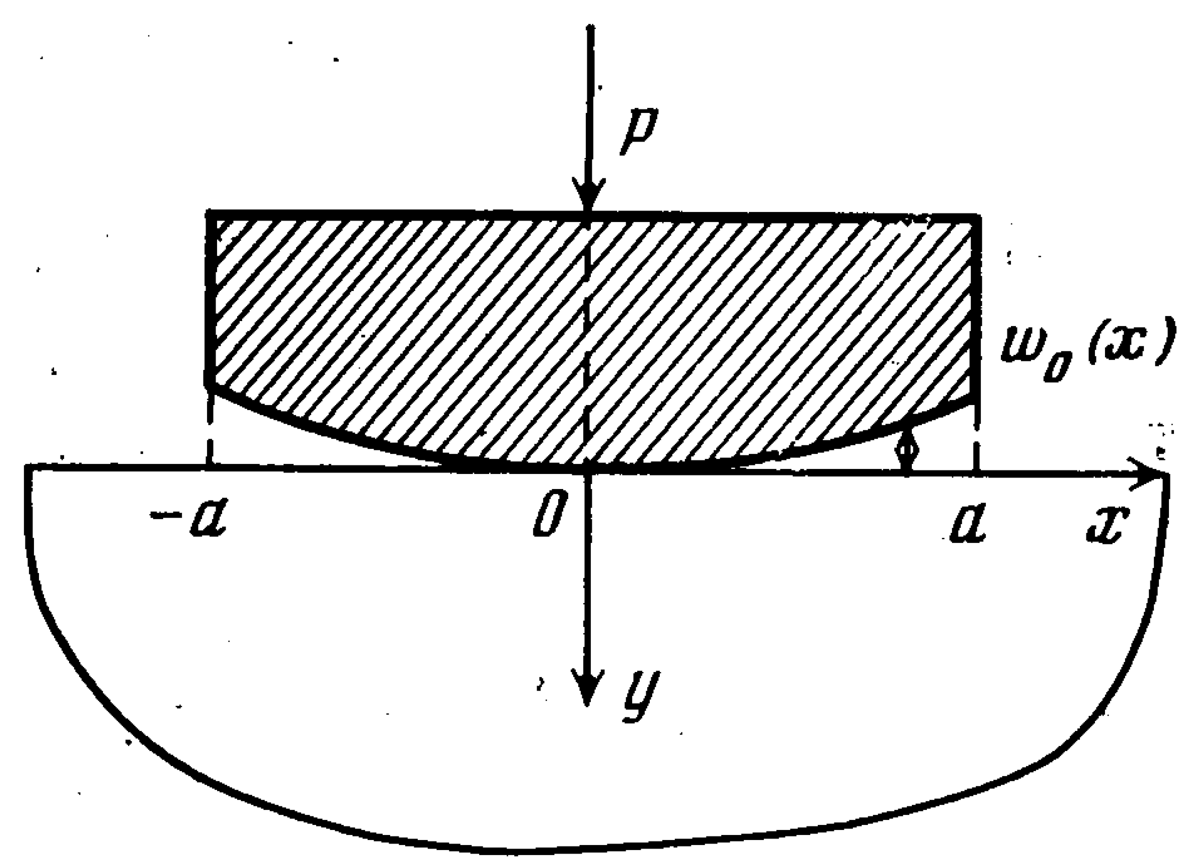
УДК 539.383

КОНТАКТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ШТАМПА С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ЕЕ ИЗНОСА

Комогорцев В. Ф.

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости для полуплоскости при наличии абразивного износа. В задачах, рассмотренных Л. А. Галиным [1], предполагается, что штамп движется в некоторых направляющих, обеспечивающих отсутствие сближения контактирующих тел. Ниже дается решение одной из контактных задач, поставленных Л. А. Галиным, без учета указанного упрощающего предположения.

1. Рассматривается плоская задача теории упругости о давлении штампа с профилем $w_0 = Ax^2$ (A — заданная постоянная) на полуплоскость (фигура). Штамп совершает перемещения в направлении, параллельном полосе контакта, в результате чего происходит износ полуплоскости. Полагаем, что в направлении, перпендикулярном движению штампа (в направлении оси x), трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. Требуется определить изменяющиеся со временем контактное давление и осадку штампа.



Пусть $w_1(x, t)$ — перемещения вдоль оси y граничных точек полуплоскости вследствие ее износа, $w_2(x, t)$ — упругие перемещения граничных точек полуплоскости, $\delta(t)$ — осадка штампа. Из условия контакта штампа и полуплоскости на участке $[-a, a]$ имеем

$$Ax^2 + w_1(x, t) + w_2(x, t) = \delta(t) \quad (-a < x < a,\ t \geqslant 0) \tag{1.1}$$

Учитывая, согласно [1], что

$$w_1(x,t) = k\int_0^t p(x,\tau)\,d\tau \tag{1.2}$$

$$w_2(x,t) = B\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-\xi|}\,p(\xi,t)\,d\xi, \qquad B = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$$

где $p(x, t)$ — искомое контактное давление, k — коэффициент, характеризующий износ полуплоскости, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала полуплоскости, получим из (1.1)

$$B\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-\xi|}\,p(\xi,t)\,d\xi + k\int_0^t p(x,\tau)\,d\tau = \delta(t) - Ax^2 \tag{1.3}$$

$$(-a < x < a,\ t \geqslant 0)$$

Контактное давление $p(x, t)$ должно удовлетворять, наряду с уравнением (1.3), условию равновесия

$$\int_{-a}^{a} p(x,t)\,dx = P \qquad (t \geqslant 0) \tag{1.4}$$

Площадку контакта $[-a, a]$ считаем не меняющейся с течением времени, что заведомо будет иметь место при достаточно большой силе P, обеспечивающей полное внедрение штампа в полуплоскость при $t = 0$. Для этого должно выполняться неравенство [1]

$$s = a^2 A/(BP) \leqslant 1 \tag{1.5}$$

При условии (1.5), как известно [1]

$$p(x, 0) = P\,\frac{1 + s - 2s\,(x/a)^2}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (-a < x < a) \tag{1.6}$$

Итак, требуется решить уравнение (1.3) относительно $p(x, t)$ при дополнительных условиях (1.4) и (1.6), учитывая, что осадка штампа $\delta(t)$ тоже неизвестна.

2. Полагая в (1.3) $t = 0$ и вычитая полученное равенство из (1.3), будем иметь

$$B\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-\xi|}\,[p(\xi, t) - p(\xi, 0)]\,d\xi + k\int_0^t p(x, \tau)\,d\tau = \delta(t) - \delta(0) \qquad (-a < x < a,\ t \geqslant 0) \tag{2.1}$$

С целью исключения из (2.1) неизвестной правой части проинтегрируем (2.1) по x в промежутке $[-a, a]$. Меняя в полученных двойных интегралах порядок интегрирования и учитывая условие равновесия (1.4), находим

$$\delta(t) - \delta(0) = \frac{B}{2a}\int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-\xi|}\,[p(\xi, t) - p(\xi, 0)]\,d\xi + \frac{kPt}{2a} \tag{2.2}$$

Исключая при помощи соотношения (2.2) разность $\delta(t) - \delta(0)$ из (2.1), приходим к уравнению

$$B\int_{-a}^{a}\left[\ln\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-\xi|}\,dx\right][p(\xi, t) - p(\xi, 0)]\,d\xi + k\int_0^t p(x, \tau)\,d\tau = \frac{kPt}{2a} \tag{2.3}$$

Сделаем теперь следующее, естественное с механической точки зрения предположение: в процессе износа контактное давление выравнивается, т. е. будем искать его в виде

$$p(x, t) = P/(2a) + q(x, t) \tag{2.4}$$

$$q(x, t) \underset{(t\to\infty)}{\longrightarrow} 0 \ (-a < x < a), \qquad \int_{-a}^{a} q(x, t)\,dx = 0 \quad (t \geqslant 0) \tag{2.5}$$

Последнее условие вытекает из равенства (1.4). Подставляя (2.4) в (2.3), получаем уравнение для определения новой неизвестной функции $q(x, t)$

$$B\int_{-a}^{a}\left[\ln\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-\xi|}\,dx\right][q(\xi, t) - q(\xi, 0)]\,d\xi + k\int_0^t q(x, \tau)\,d\tau = 0 \qquad (-a < x < a,\ t \geqslant 0) \tag{2.6}$$

Интегральное уравнение (2.6) будем решать методом разделения переменных. Учитывая первое условие (2.5), частное решение уравнения (2.6) будем искать в виде

$$q(x,t)=\varphi(x)\exp(-k\lambda t/B),\qquad \lambda>0;\qquad \int_{-a}^{a}\varphi(x)\,dx=0 \tag{2.7}$$

(интегральное условие следует из последнего условия (2.5)). Подставляя выражение (2.7) в (2.6), получаем

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-a}^{a}\left[\ln\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-\xi|}\,dx\right]\varphi(\xi)\,d\xi=0 \tag{2.8}$$
$$(-a<x<a)$$

Отметим, что при удовлетворении функции $\varphi(x)$ данному интегральному уравнению интегральное условие (2.7) удовлетворяется автоматически, в чем можно убедиться проинтегрировав обе части уравнения (2.8) по x в промежутке $[-a, a]$.

После отыскания собственных значений λ_n и собственных функций $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ уравнения (2.8) искомую функцию $q(x, t)$ представим рядом

$$q(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)\exp\left(-\frac{k\lambda_n}{B}t\right)\qquad(-a<x<a,\ t\geqslant 0) \tag{2.9}$$

Коэффициенты c_n ряда (2.9), как это следует из (2.4) и (1.6), найдутся из разложения

$$q(x,0)=P\left[\frac{1+s-2s(x/a)^2}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{1}{2a}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)\,(-a<x<a) \tag{2.10}$$

3. Примем в дальнейшем за единицу длины величину a, т. е. будем считать $a = 1$ во всех предыдущих и последующих формулах. Собственные значения и собственные функции уравнения (2.8) при $a = 1$ будем искать методом Галеркина

$$\varphi(x)\approx\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{i=0}^{N}a_iT_{2i}(x)\qquad(-1<x<1) \tag{3.1}$$

где $T_i(x)$ — полиномы Чебышева первого рода. Выбор формы (3.1) для функции $\varphi(x)$ целесообразен вследствие наличия [2] спектрального соотношения

$$\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-\xi|}\frac{T_i(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi=\sigma_iT_i(x)\qquad(-1<x<1) \tag{3.2}$$
$$\sigma_0=\pi\ln 2,\qquad \sigma_i=\pi/i\qquad(i=1,2,\ldots)$$

а также вследствие известного факта ортогональности полиномов Чебышева первого рода

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_i(x)\,T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\varepsilon_i\delta_{ij}\qquad(i,j=0,1,\ldots) \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_0=\pi,\quad \varepsilon_i=\pi/2\quad(i=1,2,\ldots),\quad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

В разложении (3.1) фигурируют лишь четные полиномы $T_{2i}(x)$, так как функция $\varphi(x)$ должна быть четной.

Подставим выражение (3.1) в уравнение (2.8) при $a = 1$ и используем спектральное соотношение (3.2). Умножая затем обе части полученного уравнения на $T_{2j}(x)$ $(j=0,\ldots,N)$ и интегрируя по x от -1 до 1, с учетом условия ортогональности (3.3) приходим к однородной алгебраической системе

$$a_j-\lambda\sum_{i=0}^{N} b_{ji}a_i=0 \qquad (j=0,1,\ldots N) \tag{3.4}$$

Здесь

$$b_{ji}=\frac{\sigma_{2i}}{\varepsilon_{2j}}\left[\int_{-1}^{1}T_{2i}(x)T_{2j}(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}T_{2i}(x)\,dx\int_{-1}^{1}T_{2j}(x)\,dx\right] \tag{3.5}$$
$$(i,\ j=0,\ 1,\ldots,\ N)$$

Вследствие тождества $T_m(\cos\varphi)=\cos m\varphi$ $(m=0,1,\ldots)$ интегралы, входящие в (3.5), вычисляются в явном виде. В итоге для коэффициентов b_{ji} $(i,j=0,1,\ldots,N)$ приходим к выражению

$$b_{ji}=\frac{\sigma_{2i}}{\varepsilon_{2j}}d_{ji},\quad d_{ji}=\gamma_{i-j}+\gamma_{i+j}-2\gamma_i\gamma_j,\quad \gamma_m=-\frac{1}{4m^2-1} \tag{3.6}$$
$$(m=0,\pm1,\ldots)$$

Так как, согласно (3.6), $b_{0i}\equiv0$, то из системы (3.4) следует, что $a_0=0$. Таким образом, разложение (3.1) примет вид

$$\varphi(x)\approx\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{i=1}^{N}a_iT_{2i}(x) \qquad (-1<x<1) \tag{3.7}$$

Коэффициенты a_i этого разложения найдутся из решения однородной алгебраической системы (3.4), которую путем введения новых неизвестных $x_i=a_i/\sqrt{i}$ $(i=1,2,\ldots,N)$ преобразуем к виду

$$x_j-\lambda\sum_{i=1}^{N}\frac{d_{ji}}{\sqrt{ji}}x_i=0 \qquad (j=1,2,\ldots N) \tag{3.8}$$

с уже симметричной матрицей. Как известно, все N собственных чисел λ_n $(n=1,2,\ldots,N)$ такой системы вещественны, и им соответствует N собственных линейно-независимых векторов-столбцов

$$x_{ni}=(x_{n1},x_{n2},\ldots,x_{nN}) \quad (n=1,2,\ldots,N) \tag{3.9}$$

Собственные числа λ_n $(n=1,2,\ldots,N)$ системы (3.8) и являются приближенно (тем точнее, чем больше N) искомыми собственными числами интегрального уравнения (2.8) при $a=1$, а его собственные функции $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots,N)$ найдутся по формуле

$$\varphi_n(x)\approx\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{i=1}^{N}a_{ni}T_{2i}(x) \qquad (-1<x<1) \tag{3.10}$$

следующей из (3.7), где $a_{ni}=\sqrt{i}\,x_{ni}$.

После нахождения λ_n и $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots,N)$ можем записать, используя (2.9), и приближенное выражение для функции $q(x,t)$

$$q(x,t)\approx\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}c_na_{ni}T_{2i}(x)\exp\left(-\frac{k\lambda_n}{B}t\right) \tag{3.11}$$
$$(-1<x<1,\ t\geqslant0)$$

Неизвестные коэффициенты c_n $(n=1,2,\ldots,N)$ найдутся из разложения (2.10), которое при $a=1$ дает

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{i=1}^{N}\beta_iT_{2i}(x)\approx\frac{P}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[1+s-2sx^2-\frac{\pi}{2}\sqrt{1-x^2}\right] \tag{3.12}$$

Здесь

$$\beta_i = \sum_{n=1}^{N} a_{ni} c_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{3.13}$$

Отметим, что приближенное равенство (3.12), полученное из сравнения приближенного и точного выражений для $p(x, 0)$, при $N = \infty$ переходит в точное для всех $-1 < x < 1$. Действительно, при $N = \infty$ после замены $x = \cos\varphi$, $T_{2i}(\cos\varphi) = \cos 2i\varphi$ оно превращается в разложение в тригонометрический ряд Фурье заданной непрерывной и непрерывно дифференцируемой функции.

Из разложения (3.12) должны быть найдены коэффициенты β_i, после чего, решая неоднородную систему (3.13), находим коэффициенты c_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ формулы (3.11). Матрица системы (3.13) неособенная, так как она сформирована из N линейно-независимых векторов-столбцов $a_{ni} = \sqrt{i}\, x_{ni}$, и следовательно, система имеет единственное решение.

Для нахождения величин β_i умножим обе части равенства (3.12) на $T_{2j}(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ и проинтегрируем результат по x от -1 до 1. Учитывая, что $T_0(x) = 1$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, так что $1 + s - 2sx^2 = T_0(x) - sT_2(x)$, и используя свойство ортогональности (3.3), находим

$$\beta_1 = \frac{P}{\pi}\left(\frac{2}{3} - s\right), \qquad \beta_i = \frac{2P}{\pi(4i^2 - 1)} \qquad (i = 2, 3, \ldots, N) \tag{3.14}$$

После нахождения функции $q(x, t)$ находится, согласно равенству (2.4), и искомое контактное давление $p(x, t)$, а вместе с ним, по формуле (2.2), и изменение осадки штампа со временем. Используя формулу (3.11), находим

$$\delta(t) - \delta(0) \approx \frac{kPt}{2} + \frac{B\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{n=i}^{N} \frac{c_n a_{ni}}{i(4i^2 - 1)} \left[1 - \exp\left(-\frac{k\lambda_n}{B} t\right)\right] \tag{3.15}$$

Ограничиваясь, в частности, простейшим случаем $N = 1$, получим в первом приближении

$$\lambda_1 = \frac{45}{32}; \qquad p(x, t) = \frac{P}{\pi\sqrt{1 - x^2}} \times \tag{3.16}$$

$$\times \left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1 - x^2} + \left(\frac{2}{3} - s\right)(2x^2 - 1)\exp\left(\frac{k\lambda_1}{B} t\right)\right]$$

$$\delta(t) - \delta(0) = PB\left[\frac{kt}{2B} + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3} - s\right)\left(1 - \exp\left(\frac{k\lambda_1}{B} t\right)\right)\right]$$

Сравнение приближенного (3.16) и точного (1.6) выражений для $p(x, 0)$ показывает, что, например, давление в центре площадки контакта, определяемое формулой (3.16), отличается от точного не более чем на 10% для всех $0 < s \leqslant 1$. При приближении к краю площадки контакта эта погрешность несколько увеличится. Для ее уменьшения следует заменить формулы первого приближения (3.16) на более точные, увеличив значение параметра N.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
2. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 821—832.

Брянск

Поступила в редакцию
26.IV.1984