

УДК 539.3 : 534.1

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

Мокрик Р. И., Пырьев Ю. А.

Исследуется задача о распространении возмущений давления и напряжения после внезапного приложения нагрузки к границе упругого насыщенного вязкой жидкостью или газом пористого полупространства. Решение представлено в виде интегралов по отрезкам, соединяющим особые точки трансформант Фурье по времени решений задачи.

Решения нестационарных задач в рамках модели двухкомпонентной насыщенной вязкой жидкостью пористой среды [1—4] обычно строились при определенных ограничениях на значения параметров многокомпонентной среды. Таких, например, как мягкость пористой среды (слабосцементированные горные породы) [3], малость коэффициента, характеризующего диссипативные свойства среды (маловязкая насыщающая жидкость) [5], и др.

Ниже исследуется задача о распространении продольных волн в пористой среде, насыщенной вязкой жидкостью или газом, для произвольных значений параметров этой системы и строится полное аналитическое решение, пригодное для любого значения времени протекания процесса.

1. Рассмотрим задачу о распространении возмущений давлений и напряжений после внезапного приложения нагрузки к границе упругого насыщенного вязкой жидкостью полупространства или же (что в математическом смысле эквивалентно) к забою дренажной галереи, вскрывающей пласт с абсолютно жесткими кровлей и подошвой [3]. Система уравнений, описывающая такие движения, имеет вид [1—4]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} P \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Q \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + l(u - v) \\ R \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + Q \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \rho_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - l(u - v) \\ (l = \beta_1 \partial / \partial t + \beta_2 \partial^2 / \partial t^2, \rho_1 &= (1 - f) \rho_{10}, \rho_2 = f \rho_{20}) \end{aligned}$$

Здесь  $f$  — пористость,  $\partial u / \partial t$ ,  $\partial v / \partial t$  — скорости смещения скелета и жидкости,  $\rho_{10}$ ,  $\rho_{20}$  — плотности твердой фазы и жидкости,  $\beta_1$  — коэффициент, характеризующий диссипативные свойства среды ( $\beta_1 = \eta f^2 / \delta$ ,  $\eta$  — вязкость, а  $\delta$  — проницаемость),  $\beta_2$  — коэффициент динамической связи между скелетом и жидкостью (в работах [1, 3] авторы полагали  $\beta_2 = 0$ ), для определенности считаем  $\beta_2 = (\rho_1 + \rho_2) 10^{-3}$ ;  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  — модули пористой среды [4], для вычисления которых надо задавать пористость  $f$ , сжимаемости твердой фазы  $C_{10}$ , флюида  $C_{20}$  и скелета  $C_1$ , модуль сдвига скелета  $\mu_1$ .

Нормальное напряжение  $\sigma$  в твердой фазе и давление  $p$  внутри жидкости имеют вид [4]

$$(1.2) \quad \sigma = P \frac{\partial u}{\partial z} + Q \frac{\partial v}{\partial z}, \quad -p = Q \frac{\partial u}{\partial z} + R \frac{\partial v}{\partial z}$$

Решение системы (1.1) строится в области  $z > 0$ ,  $-\infty < t < \infty$  при следующих двух типах граничных условий:

$$(1.3) \quad \sigma(z, t) |_{z=0} = 0, \quad p(z, t) |_{z=0} = p_* H(t), \quad -\infty < t < \infty$$

или

$$(1.4) \quad \sigma(z, t) |_{z=0} = \sigma_* H(t), \quad p(z, t) |_{z=0} = 0, \quad -\infty < t < \infty$$

описывающих соответственно повышение давления на галерее (жидкий поршень) или приложение нагрузки со стороны высокопроницаемого поршня, и при условиях причинности [6, 7],

$$(1.5) \quad u(z, t) \equiv v(z, t) \equiv 0, \quad t < 0, \quad z > 0 \\ H(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad H(t) = 1 \text{ при } t > 0$$

2. Для решения задачи (1.1), (1.3), (1.5) и (1.1), (1.4), (1.5) воспользуемся комплексным интегральным преобразованием Фурье по времени с параметром преобразования  $\omega$ . Тогда поле напряжения и давления можно представить через три функции  $G_1(\xi, \tau, 0)$ ,  $G_1(\xi, \tau, 1)$ ,  $G_2(\xi, \tau, 0)$  безразмерной координаты  $\xi$  и безразмерного времени  $\tau$

$$(2.1) \quad \frac{p(\xi, \tau)}{p_*} = \sum_{n=0}^1 \varphi_{1n} G_1(\xi, \tau, n) + \varphi_{20} G_2(\xi, \tau, 0) \\ \frac{\sigma(\xi, \tau)}{p_*} = \sum_{n=0}^1 \psi_{1n} G_1(\xi, \tau, n)$$

для первого типа граничных условий (1.3) и

$$(2.2) \quad \frac{p(\xi, \tau)}{\sigma_*} = \sum_{n=0}^1 f_{1n} G_1(\xi, \tau, n) \\ \frac{\sigma(\xi, \tau)}{\sigma_*} = \sum_{n=0}^1 q_{1n} G_1(\xi, \tau, n) + q_{20} G_2(\xi, \tau, 0)$$

для второго типа граничных условий (1.4). Здесь

$$(2.3) \quad G_j(\xi, \tau, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\sigma^\circ}^{+\infty + i\sigma^\circ} G_j^F(\xi, \chi, n) e^{-i\chi\tau} d\chi, \quad \sigma^\circ > 0$$

$$G_j^F(\xi, \chi, n) = G_{j1}^F(\xi, \chi, n) + (-1)^j G_{j2}^F(\xi, \chi, n)$$

$$G_{jm}^F(\xi, \chi, n) = \frac{\exp(i\gamma_m(\chi)\xi)}{(-i\chi)^{n+1}} \left[ \delta_{j2} + \delta_{j1} \frac{k_6 \chi}{\Omega(\chi)} \right]$$

$$\delta_{jm} = 1, \quad j = m; \quad \delta_{jm} = 0, \quad j \neq m; \quad j = 1, 2; \quad m = 1, 2; \quad n = 0, 1$$

$$\gamma_m(\chi) = (\chi/2)^{1/2} [\chi a + ib - (-1)^m \Omega(\chi)]^{1/2}, \quad m = 1, 2$$

$$\Omega(\chi) = [(\chi a + ib)^2 - 4\chi(\chi c + id)]^{1/2} =$$

$$= k_6 (\chi - \chi_+)^{1/2} (\chi - \chi_-)^{1/2}$$

$$\chi_{\pm} = -i\chi_2^\circ \pm \chi_1^\circ, \quad \chi_1^\circ = \varepsilon_1 \chi_{10}^\circ, \quad \chi_2^\circ = \varepsilon_1 \chi_{20}^\circ$$

$$\chi_{10}^\circ = 2k_5 k_4^{-1}, \quad \chi_{20}^\circ = k_3 k_4^{-1}, \quad a = (1 + M^2 + \varepsilon_2 k_2) k^{-1}$$

$$b = \varepsilon_1 b_0, \quad c = [\varepsilon_2 (N + N^{-1}) + 1] k^{-1}, \quad d = \varepsilon_1 d_0$$

$$b_0 = k_2 k^{-1}, \quad d_0 = (N + N^{-1}) k^{-1}, \quad k = M^2 - \varepsilon_3^2$$

$$k_1 = (M^2 - 1)(M^2 N - N^{-1}) + 2\varepsilon_3 (M^2 + 1) + 2\varepsilon_3^2 (N + N^{-1})$$

$$k_2 = k_7 + k_8, \quad k_3 = k_1 + \varepsilon_2 k_2^2, \quad k_4 = (M^2 - 1)^2 + 2\varepsilon_2 k_1 + \\ + \varepsilon_2^2 k_2^2 + 4\varepsilon_3^2$$

$$k_5 = |M^2 - 1 - \varepsilon_3 (N - N^{-1})| k^{1/2}, \quad k_6 = k_4^{1/2} k^{-1},$$

$$k_7 = M^2 N + \varepsilon_3$$

$$k_8 = \varepsilon_3 + N^{-1}, \quad \varphi_{10} = -q_{10} = [\varepsilon_2 (M^2 N - N^{-1}) + \\ + M^2 - 1] k_4^{-1/2} / 2$$

$$\varphi_{11} = -q_{11} = \varepsilon_1 (M^2 N - N^{-1}) k_4^{-1/2} / 2, \quad \varphi_{20} = q_{20} = 1/2$$

$$f_{10} = [\varepsilon_2 k_8 + \varepsilon_3 N^{-1}] k_4^{-1/2}, \quad f_{11} = \varepsilon_1 k_8 k_4^{-1/2}$$

$$\begin{aligned}\psi_{10} &= \varepsilon_2 k_7 + \varepsilon_3 N, \quad \psi_{11} = \varepsilon_1 k_7 k_4^{-1/2} \\ \varepsilon_1 &= \beta_1 h c_2^{-1} (\rho_1 \rho_2)^{-1/2}, \quad \varepsilon_2 = \beta_2 (\rho_1 \rho_2)^{-1/2}, \quad \varepsilon_3 = Q (RN)^{-1} \\ c_1 &= \left(\frac{P}{\rho_1}\right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{R}{\rho_2}\right)^{1/2}, \quad M = \frac{c_1}{c_2}, \quad N = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{1/2} \\ \tau &= \frac{tc_2}{h}, \quad \xi = \frac{z}{h}, \quad \chi = \frac{\omega h}{c_2}\end{aligned}$$

$h$  — характерный линейный размер, который можно, например, выбрать при  $\beta_1 \neq 0$  в виде  $h = c_2 \rho_2 \beta_1^{-1}$ .

Функции  $G_j(\xi, \tau, n)$  ( $j = 1, 2; n = 0, 1$ ) могут быть представлены в виде интегралов по отрезкам, соединяющим точки ветвления  $\chi = \chi_{\pm}$ ,  $\chi = 0$ ,  $\chi = -idc^{-1}$  функций  $\gamma_1(\chi)$ ,  $\gamma_2(\chi)$ , аналитические свойства которых изучены в [8, 9], следующим образом:

$$\begin{aligned}(2.4) \quad G_j(\xi, \tau, n) &= [H(\tau_-) - H(\tau_+)] I_j(\xi, \tau, n) + \\ &+ H(\tau_+) I_j^1(\xi, \tau, n) + (-1)^j H(\tau_-) I_j^2(\xi, \tau, n) \\ I_j(\xi, \tau, n) &= \frac{1}{\pi} \exp(-\chi_2^\circ \tau) \int_{\delta_2}^{\chi_1^\circ} [\exp(-\xi \alpha_+) \Psi_{jn}^+ + \exp(-\xi \alpha_-) \Psi_{jn}^-] dx \\ \Psi_{10}^\pm &= -l_0^{-1} \cos \varphi_\pm, \quad \Psi_{11}^\pm = (\chi_2^\circ \cos \varphi_\pm + x \sin \varphi_\pm) l_0^{-1} k_0^{-2} \\ \Psi_{20}^\pm &= \pm l_0 \Psi_{11}^\pm, \quad l_0 = [(\chi_1^\circ)^2 - x^2]^{1/2}, \quad k_0 = [(\chi_2^\circ)^2 + x^2]^{1/2} \\ \varphi_\pm &= \xi \gamma_\pm - \tau x, \quad \gamma_\pm = 2^{-3/2} [(Z^\circ + X_\pm^\circ)^{1/2} K_+ + (Z^\circ - X_\pm^\circ)^{1/2} K_-] \\ K_\pm &= (k_0 \pm \chi_2^\circ)^{1/2}, \quad \alpha_\pm = 2^{-3/2} [(Z^\circ + X_\pm^\circ)^{1/2} K_- - (Z^\circ - X_\pm^\circ)^{1/2} K_+] \\ Z^\circ &= [(X_\pm^\circ)^2 + (Y^\circ)^2]^{1/2}, \quad X_\pm^\circ = -\chi_2^\circ a + b \pm k_6 l_0, \quad Y_0 = xa \\ I_j^m(\xi, \tau, n) &= \frac{1}{\pi} \left[ (-1)^j \delta_{m2} \int_{\delta_1}^{dc^{-1}} \frac{e^{-\tau x}}{(-x)^{n+1}} \theta_{jn} \sin(\xi \sqrt{Ax}) dx + \right. \\ &+ \left. \delta_{m1} \int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{e^{-\tau x}}{(-x)^{n+1}} \theta_{jn} \sin(\xi \sqrt{Ax}) dx \right] - (-1)^j d_{jn}, \quad m = 1, 2 \\ k^\circ &= [(\chi_2^\circ - x)^2 + (\chi_1^\circ)^2]^{1/2}, \quad \theta_{11} = \theta_{10} = -x/k^\circ, \quad \theta_{20} = 1 \\ A &= (k_6 k^\circ + b - xa)/2, \quad c_\pm = 2^{1/2} [a \pm (a^2 - 4c)^{1/2}]^{-1/2} \\ \tau_\pm &= \tau - \xi/c_\pm \\ d_{10} &= 0, \quad d_{20} = -1, \quad d_{11} = \begin{cases} \text{sign}(\chi_2^\circ) k_6 b^{-1}, & |\chi_2^\circ| \geq \delta^\circ \\ 2\pi^{-1} k_6 b^{-1} \arcsin(\chi_2^\circ/\delta^\circ), & |\chi_2^\circ| \leq \delta^\circ \end{cases} \\ \delta_1 &= \begin{cases} \delta^\circ, & \chi_2^\circ \leq \delta^\circ \\ \chi_2^\circ, & \delta^\circ \leq \chi_2^\circ \leq dc^{-1} \\ dc^{-1}, & dc^{-1} \leq \chi_2^\circ \end{cases} \\ \delta_2 &= \begin{cases} 0, & |\chi_2^\circ| \geq \delta^\circ \\ [(\delta^\circ)^2 - (\chi_2^\circ)^2]^{1/2}, & |\chi_2^\circ| \leq \delta^\circ \end{cases}\end{aligned}$$

Как видно,  $\delta_1, \delta_2$  — переменные границы интегрирования — зависят от параметров пористой среды, где  $\delta^\circ$  — произвольно малая величина.

Для функций  $G_j(\xi, \tau, n)$  прифронтные асимптотики при  $\tau = \xi/c_-$  и скачки при  $\tau = \xi/c_+$  имеют вид

$$\begin{aligned}(2.5) \quad G_j(\xi, \tau, n) &= (-1)^j (\tau_-)^n H(\tau_-) \exp(-\xi \eta_-), \quad \tau_- \rightarrow 0 \\ [G_j(\xi, \tau, n)]_+ &= (\tau_+)^n \exp(-\xi \eta_+), \quad \tau_+ \rightarrow 0; \quad j = 1, 2 \\ (\eta_\pm &= c_\pm \varepsilon_1 (b_0 \pm \chi_{20}^\circ k_6)/4)\end{aligned}$$

Из представления функций  $G_j(\xi, \tau, n)$  в виде (2.3), (2.4) можно получить их поведение при  $\tau \rightarrow \infty$

$$(2.6) \quad G_1(\xi, \tau, 0) = \xi k_6 \frac{\tau^{-3/2}}{2\sqrt{\pi b}}, \quad G_1(\xi, \tau, 1) = -\xi k_6 \frac{\tau^{-1/2}}{\sqrt{\pi b}}$$

$$G_2(\xi, \tau, 0) = 2 - \xi \sqrt{\frac{b}{\pi}} \tau^{-1/2}$$

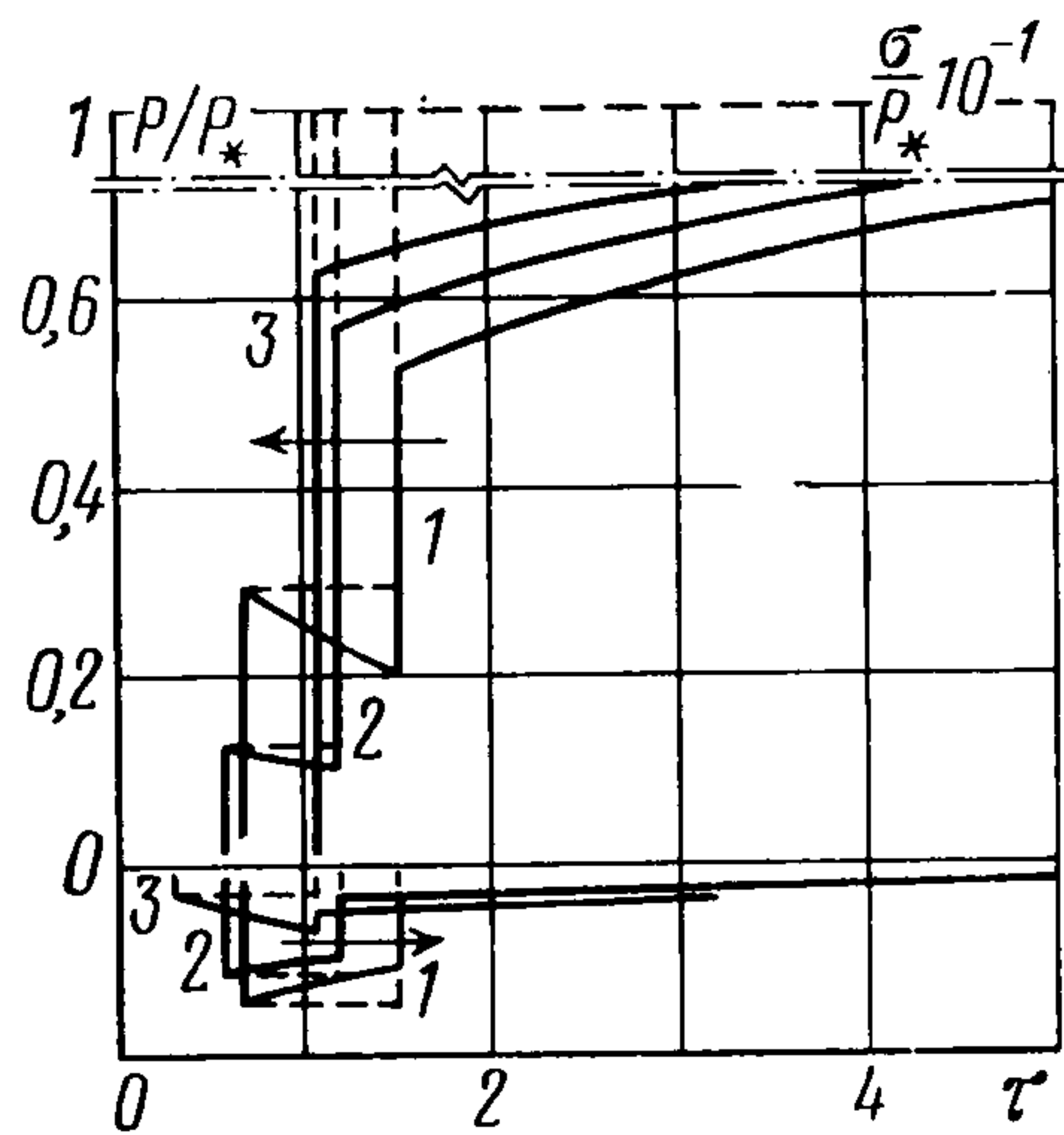
Отметим, что при стремлении к нулю коэффициента  $\varepsilon_1$ , характеризующего диссипативные свойства среды, соотношения (2.1), (2.2) можно привести к виду

$$(2.7) \quad p/p_* = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) H_1(\tau) + H(\tau_+), \quad \sigma/p_* = -\psi_{10} H_1(\tau)$$

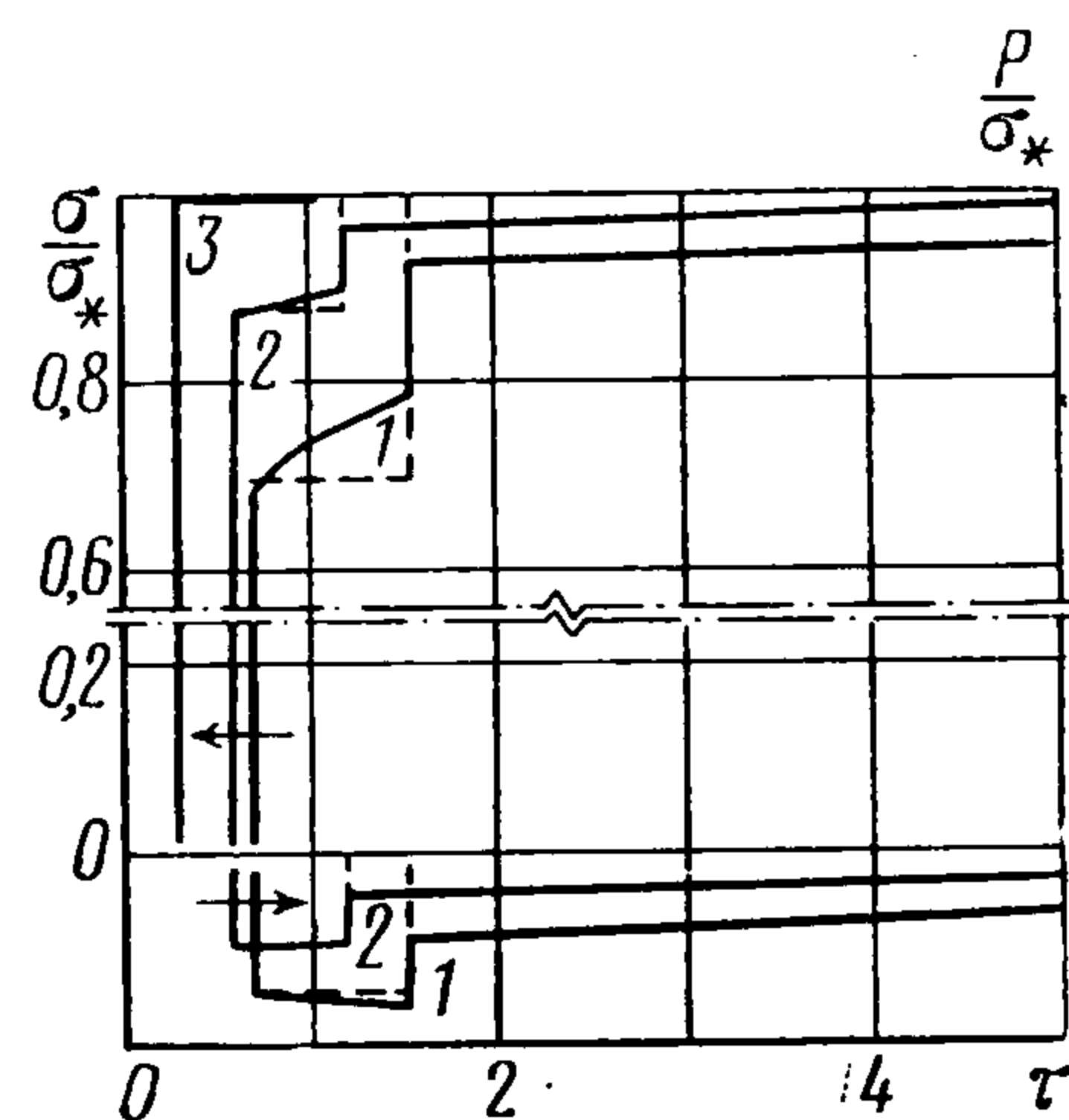
$$\sigma/\sigma_* = (q_{20} - q_{10}) H_1(\tau) + H(\tau_+), \quad p/\sigma_* = -f_{10} H_1(\tau)$$

$$(H_1(\tau) = H(\tau_-) - H(\tau_+))$$

3. Из представления функций  $G_j(\xi, \tau, n)$  в виде (2.4) и их поведение в окрестностях характерных точек  $\tau = \xi/c_-$ ,  $\tau = \xi/c_+$  и  $\tau \rightarrow \infty$  решения (2.1) и (2.2) дают следующую картину процесса.



Фиг. 1



Фиг. 2

После внезапного приложения давления на границе полупространства ( $\xi = 0$ ) в точке, расположенной на расстоянии  $\xi$ , через промежуток времени  $\tau = \xi/c_-$  скачкообразно соответственно на величины

$$(3.1) \quad [p/p_*]_- = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) \exp(-\xi\eta_-), \quad [\sigma/p_*]_- = -\psi_{10} \exp(-\xi\eta_-)$$

появляются волна давления  $p/p_*$  в жидкости и волна напряжения  $\sigma/p_*$  в скелете. В момент  $\tau = \xi/c_+$  давления и напряжения также испытывают скачок соответственно на величины

$$(3.2) \quad [p/p_*]_+ = (\varphi_{20} + \varphi_{10}) \exp(-\xi\eta_+), \quad [\sigma/p_*]_+ = \psi_{10} \exp(-\xi\eta_+)$$

С течением времени давление в жидкости повышается до величины приложенного давления на границе полупространства, а напряжение стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$

$$(3.3) \quad p/p_* = 1 - \varepsilon_1^{1/2} k_7 (kk_2\pi)^{-1/2} \xi \tau^{-1/2}$$

$$\sigma/p_* = -\varepsilon_1^{1/2} k_7 (kk_2\pi)^{-1/2} \xi \tau^{-1/2}$$

При втором способе приложения нагрузки (1.4) качественная картина прохождения возмущения напряжения и давления через точку  $\xi$  сохраняется. Скачки напряжения и давления при  $\tau = \xi/c_-$  и  $\tau = \xi/c_+$  определяются формулами, аналогичными (3.1), (3.2) (при замене  $p/p_* \rightarrow \sigma/\sigma_*$ ,  $\sigma/p_* \rightarrow p/\sigma_*$ ,  $\varphi_{j0} \rightarrow q_{j0}$ ,  $\psi_{10} \rightarrow f_{10}$ ). При  $\tau \rightarrow \infty$  имеем формулы, аналогичные (3.3) (при замене  $p/p_* \rightarrow \sigma/\sigma_*$ ,  $\sigma/p_* \rightarrow p/\sigma_*$ ,  $k_7 \rightarrow k_8$ ).

Величины скачков при  $\tau = \xi/c_-$  и  $\tau = \xi/c_+$  уменьшаются в  $e$  раз соответственно на расстояниях  $l_- = 1/\eta_-$ ,  $l_+ = 1/\eta_+$ , которые обратно пропорциональны  $\varepsilon_1$  (т. е. вязкости), и на больших расстояниях они уже не существенны.

4. Проведены расчеты для некоторых моделей. Физические константы кварцевого песчаника, нефти, газа и воды взяты из работы [10].

На фиг. 1 и 2 приведены изменения напряжений  $\sigma/p_*$ ,  $\sigma/\sigma_*$  и давлений  $p/p_*$ ,  $p/\sigma_*$  в водонасыщенном (кривые 1), нефтенасыщенном (кривые 2) и газонасыщенном (кривые 3) полупространстве в зависимости от времени  $\tau$  в сечении, находящемся на расстоянии  $\xi = 1$  от поверхности приложения давления  $p_*$  и напряжения  $\sigma_*$ . Сплошным линиям соответствуют величины, вычисленные по формулам (2.1), (2.2), (2.4), штриховым — величины, вычисленные по формуле (2.7) при вязкости флюида  $\varepsilon_1 = 0$ . Безразмерные расстояния проникновения скачков для газонасыщенного полупространства  $l_- = 2,3 \cdot 10^3$ ,  $l_+ = 2,1$ ; нефтенасыщенного —  $l_- = 4,2 \cdot 10^2$ ,  $l_+ = 1,6$ ; водонасыщенного —  $l_- = 3,8 \cdot 10^1$ ,  $l_+ = 1,3$ .

Из результатов, представленных на фиг. 1 и 2, следует значительное влияние параметра  $\varepsilon_1$  на распределение напряжений и давления в пористой среде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1944, т. 8, № 4, с. 133—150.
2. Biot M. Theory of propagation of elastic waves in a fluidsaturated porous solids. 1. Low frequency range.— J. Acoust. Soc. Amer., 1956, v. 28, No. 2, p. 168—178.
3. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
4. Косачевский Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 6, с. 1115—1123.
5. Рахматулин Х. А., Саатов Я. У., Филиппов Н. Г., Артыков Т. У. Волны в двухкомпонентных средах. Ташкент: Фан, 1974. 266 с.
6. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 547 с.
7. Мокрик Р. И., Баран В. П. Об условии излучения в динамических задачах теории упругости.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 8, с. 713—716.
8. Мокрик Р. И., Пырьев Ю. А. Некоторые вопросы теории сопряженных полей в механике сплошных сред.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 3, с. 29—33.
9. Мокрик Р. И., Пырьев Ю. А. Аналитические свойства характеристических параметров обобщенной термоупругости.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля. Вып. 15. Киев: Наук. думка, 1982, с. 48—52.
10. Ляховицкий Ф. М., Рапопорт Л. И. Применение теории Френкеля — Био для расчета скоростей и поглощения упругих волн в насыщенных пористых средах.— В кн.: Прикладная геофизика. Вып. 66. М.: Недра, 1972, с. 52—64.