

УДК 539.3 : 534.1

ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКОПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ УПРУГОГО И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Быковцев А. Г.

Рассматриваются автомодельные решения динамических уравнений для анти-плоской деформации в идеальной упругопластической среде. Строится решение задачи о преломлении плоскополяризованных плоских волн произвольного профиля, прс-никающих из упругого в упругопластическое полупространство.

Ранее [1—4] исследовались автомодельные задачи, когда скорости перемещений и напряжения зависят только от отношения координат. Автомодельная задача о преломлении плоской упругой волны в упругопластическое полупространство с граничными условиями типа закона сухого трения Кулона и условиями, обеспечивающими полный контакт на границе раздела, исследовалась в работах [5, 6].

1. Рассмотрим динамическую задачу теории сложного сдвига в идеальной упругопластической среде. В прямоугольной декартовой системе координат x_i вектор скорости перемещений w направлен вдоль оси x_3 и зависит только от x_1, x_2 и времени t .

Все компоненты напряжений обращаются в нуль, кроме $\tau_1 = \sigma_{13}(x_1, x_2, t)$, $\tau_2 = \sigma_{23}(x_1, x_2, t)$. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} - \rho \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

Полные деформации складываются из упругой и пластической части, причем упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука

$$(1.2) \quad \gamma_1 = \gamma_1^e + \gamma_1^p, \quad \gamma_2 = \gamma_2^e + \gamma_2^p; \quad \tau_1 = 2\mu\gamma_1^e, \quad \tau_2 = 2\mu\gamma_2^e$$

В пластической области напряжения удовлетворяют условию пластичности, скорости пластических деформаций определяются из ассоциированного закона течения

$$(1.3) \quad \tau_1^2 + \tau_2^2 = k^2; \quad \dot{\gamma}_1^p = \psi \tau_1, \quad \dot{\gamma}_2^p = \psi \tau_2$$

Полные скорости деформации выражаются через перемещения по формулам

$$(1.4) \quad \dot{\gamma}_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \dot{\gamma}_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_2}$$

Дифференцируя соотношения (1.2) по времени и исключая значения скоростей деформаций, получаем

$$(1.5) \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial t} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\mu\psi\tau_1, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial t} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_2} - 2\mu\psi\tau_2$$

Первое уравнение (1.3) будет тождественно выполнено, если положить

$$(1.6) \quad \tau_1 = k \sin \theta, \quad \tau_2 = k \cos \theta$$

Подставляя эти значения в уравнения (1.1) и (1.5), после исключения ψ получаем систему уравнений для определения θ и w . Рассмотрим автомодельные решения этой системы, когда функции w и θ зависят только от $x = x_1 - ct$, $y = x_2$. Тогда эта система принимает вид

$$(1.7) \quad \begin{aligned} k \left(\cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \rho c \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \mu \left(\cos \theta \frac{\partial w}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial w}{\partial y} \right) + kc \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Система уравнений (1.7) гиперболического типа. Ее характеристики и соотношения вдоль характеристик имеют вид

$$(1.8) \quad dy (M - \cos \theta) = \sin \theta dx, \quad k\theta - \rho a w = \text{const}$$

$$(1.9) \quad dy (M + \cos \theta) = -\sin \theta dx, \quad k\theta + \rho a w = \text{const}$$

где $a = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость продольных упругих волн, $M = c/a$ — число Маха.

В упругой области и зоне разгрузки скорости пластических деформаций равны нулю, тогда из уравнений (1.1) — (1.4) получаем

$$(1.10) \quad c\tau_1 + \mu w = f(y)$$

$$(1.11) \quad c \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad c \frac{\partial \tau_2}{\partial y} + (\rho c^2 - \mu) \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Система уравнений (1.11) при $c > \sqrt{\mu/\rho}$ гиперболического типа. Характеристики и соотношения вдоль характеристик имеют вид

$$(1.12) \quad x - \sqrt{M^2 - 1} y = \text{const}, \quad \mu \sqrt{M^2 - 1} w + c\tau_2 = \text{const}$$

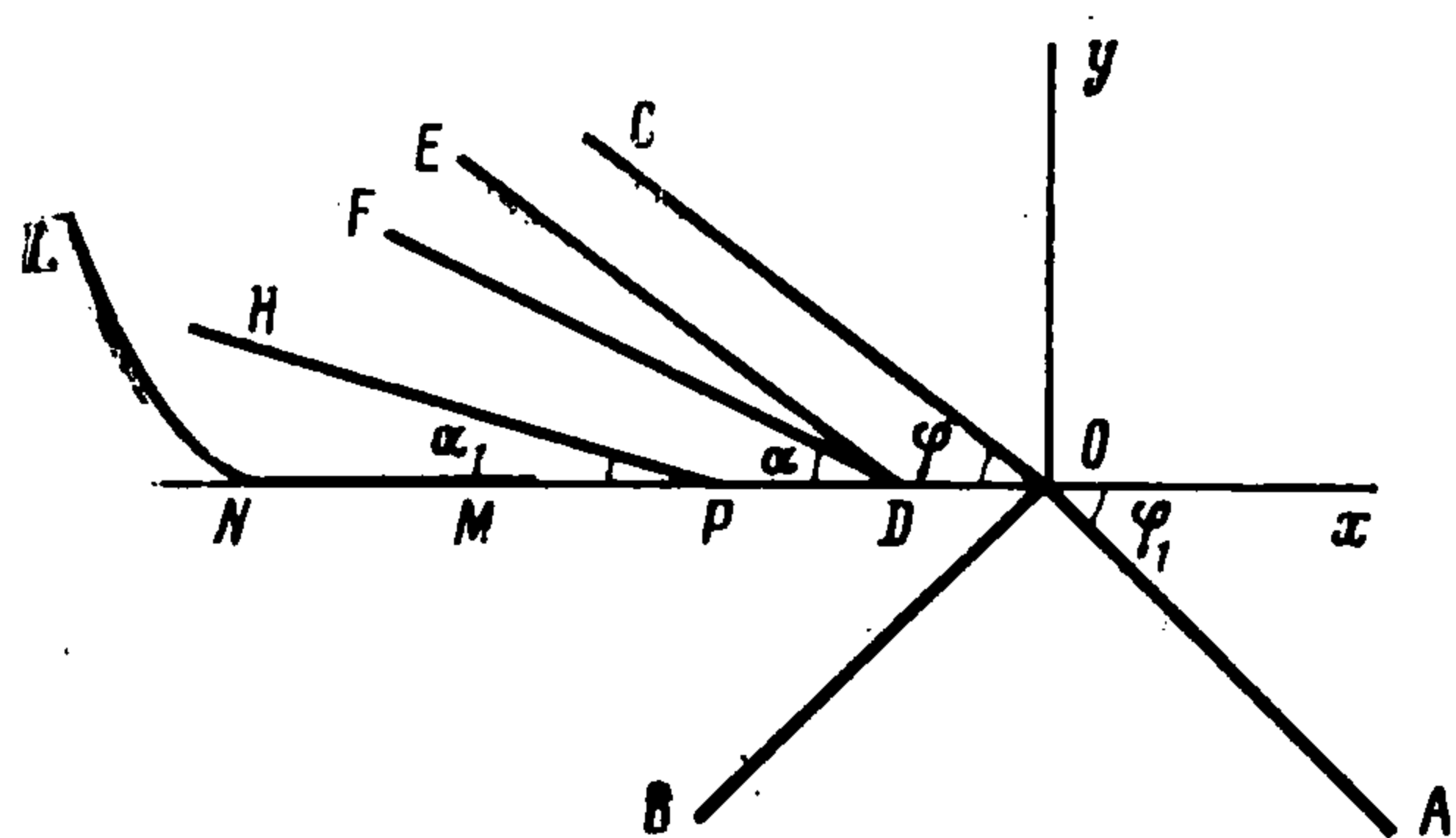
$$(1.13) \quad x + \sqrt{M^2 - 1} y = \text{const}, \quad \mu \sqrt{M^2 - 1} w - c\tau_2 = \text{const}$$

Решение краевых задач волновой динамики для упругопластических сред сводится к определению решений уравнений (1.11) в упругой области и решений уравнений (1.7) в пластической области и нахождению границы раздела между ними из условий непрерывности напряжений, перемещений и пластических деформаций.

Отметим, что необходимо ограничиться только теми решениями уравнений (1.7), для которых диссипация энергии $D = \gamma_1^p \tau_1 + \gamma_2^p \tau_2 \geq 0$ в каждой точке. Используя соотношения (1.2), (1.4), (1.6), условие положительности диссипации энергии можно записать в виде

$$(1.14) \quad D = \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta \right) \geq 0$$

2. Полученные соотношения используем для исследования преломления волн, проходящих из упругого полупространства с параметрами μ_1



Фиг. 1

ρ_1 , $a_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ в упругопластическое полупространство с параметрами μ_2 , ρ_2 , $a_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$. Пусть на поверхность раздела $y = 0$ падает плоская волна OA (фиг. 1). Уравнение фронта падающей волны в любой момент времени имеет вид $y \cos \varphi_1 + x \sin \varphi_1 = \text{const}$. За фронтом падающей волны в упругом полупространстве выполняются соотношения

$$(2.1) \quad \tau_1 = \tau_1(\omega_1), \quad \tau_2 = \tau_2(\omega_1), \quad w = w_1(\Omega_1); \quad \Omega_1 = -y \cos \varphi_1 - x \sin \varphi_1$$

Уравнение фронта отраженной волны OB имеет вид $y \cos \varphi_1 - x \sin \varphi_1 = \text{const}$. За фронтом отраженной волны в упругом полупространстве решение получается сложением решения (2.1) с решением для отраженной волны

$$(2.2) \quad \tau_1 = \tau_1(\Omega_2), \quad \tau_2 = \tau_2(\Omega_2), \quad w = w_2(\Omega_2); \quad \Omega_2 = y \cos \varphi_1 - x \sin \varphi_1$$

Из уравнений (1.10), (1.11) следует

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \tau_1(\Omega_1) &= -c^{-1}\mu_1 w_1(\Omega_1), \quad \tau_2(\Omega_1) = -c^{-1}\mu_1 \operatorname{ctg} \varphi_1 w_1(\Omega_1) \\ \tau_1(\Omega_2) &= -c^{-1}\mu_1 w_2(\Omega_2), \quad \tau_2(\Omega_2) = c^{-1}\mu_1 \operatorname{ctg} \varphi_1 w_2(\Omega_2) \end{aligned}$$

На границе раздела $y = 0$ напряжения τ_2 и скорость перемещения w непрерывны, откуда

$$(2.4) \quad \begin{aligned} w(x) &= w_1(-x \sin \varphi_1) + w_2(-x \sin \varphi_1) \\ \tau_2(x) &= c^{-1}\mu_1 \operatorname{ctg} \varphi_1 (w_2(-x \sin \varphi_1) - w_1(-x \sin \varphi_1)) \end{aligned}$$

где $w(x)$ — скорость перемещений, $\tau_2(x)$ — напряжение на границе раздела в упругопластическом полупространстве.

Исключая из соотношений (2.4) функцию $w_2(-x \sin \varphi_1)$, получаем краевое условие для упругопластического полупространства

$$(2.5) \quad 2w_1(-x \sin \varphi_1) = w(x) - c\mu_1^{-1} \operatorname{tg} \varphi_1 \tau_2(x)$$

В дальнейшем предполагается, что функция $w_1(\Omega_1)$ известна, т. е. профиль падающей волны задан.

Рассмотрим преломленную волну в упругопластическом полупространстве. Перед фронтом преломленной волны OC , уравнение которой имеет вид $y \cos \varphi + x \sin \varphi = 0$, материал предполагается покоящимся: $w = \tau_1 = \tau_2 = 0$, т. е. в окрестности линии OC материал будет находиться в упругом состоянии.

Так как при $x = \infty$ имеем $\tau_1 = 0$ и $w = 0$, то из (1.10) следует

$$(2.6) \quad \tau_1 = -c^{-1}\mu_2 w$$

Соотношения (1.12) и (1.13) принимают вид

$$(2.7) \quad x - \sqrt{M^2 - 1} y = \operatorname{const}, \quad \mu_2 \sqrt{M^2 - 1} w + c\tau_2 = 0; \quad M = c/a_2$$

$$(2.8) \quad x + \sqrt{M^2 - 1} y = \operatorname{const}, \quad \mu_2 \sqrt{M^2 - 1} w - c\tau_2 = \operatorname{const}$$

В правой части равенства (2.7) постоянная положена равной нулю, так как на линии OC имеем $\tau_2 = 0$, $w = 0$, поэтому (2.7) можно рассматривать как интеграл уравнения движения упругой среды. Используя соотношения (2.7), условие на границе (2.5) можно представить в виде

$$(2.9) \quad 2w_1(-x \sin \varphi_1) = w(x) \left(1 + \frac{\mu_2 \operatorname{tg} \varphi_1}{\mu_1 \operatorname{tg} \varphi} \right)$$

Из интегралов (2.7) и (2.8) следует, что вдоль характеристик (2.8) скорости перемещений w и напряжения τ_1 , τ_2 остаются постоянными. Поэтому предел текучести будет достигаться сразу на всей характеристике, если он достигнут хотя бы в одной точке.

Из условия достижения предела текучести

$$(2.10) \quad \tau_1^2 + \tau_2^2 = a_2^{-2} \mu_2^2 w^2 = \mu_2 \rho_2 w^2 = k^2$$

и условия (2.9) следует, что материал будет оставаться упругим между характеристиками OC и DE (фиг. 1), пока в некоторой точке D границы не будет достигнуто равенство

$$(2.11) \quad 2|w_1^*(-x \sin \varphi_1)| = \frac{k}{\sqrt{\mu_2 \rho_2}} \left(1 + \frac{\mu_2 \operatorname{tg} \varphi_1}{\mu_1 \operatorname{tg} \varphi} \right)$$

При этом на линии DE

$$(2.12) \quad w = \frac{k}{\sqrt{\mu_2 \rho_2}}, \quad \tau_1 = -k \sin \varphi, \quad \tau_2 = -k \cos \varphi$$

Слева от линии DE материал находится в пластическом состоянии, где имеют место соотношения (1.8), (1.9).

Так как на линии DE имеем $\theta = \pi + \varphi$, то характеристики (1.9) пересекают линию DE и на них выполняются соотношения

$$(2.13) \quad dy (M + \cos \theta) = -\sin \theta dx, \quad k\theta + \rho_2 a_2 w = k(1 + \pi + \varphi)$$

Так как в правой части второго соотношения (2.13) постоянная одна и та же для всех характеристик, то это равенство следует рассматривать как интеграл уравнений движения в пластической области. Из интеграла (2.13) и соотношений (1.8) получаем, что вдоль каждой из характеристик другого семейства w и θ не изменяются, откуда следует, что характеристики (1.8) прямолинейные. Таким образом, имеем

$$(2.14) \quad y (M - \cos \theta) - x \sin \theta = \text{const}, \quad k\theta - \rho_2 a_2 w = \text{const}$$

Характеристики (2.14) пересекают линию DE и наклонены к оси x под углом α , для которого

$$\text{tg } \alpha = -\sin \varphi / (M + \cos \varphi) \leq \text{tg } \varphi$$

Следовательно, для уравнений движения в пластической области на линии DE имеем задачу Коши, решая которую определяем θ и w между характеристикой в упругой области DE и характеристикой в пластической области DF , где

$$(2.15) \quad w = k / \sqrt{\mu_2 \rho_2}, \quad \theta = \pi + \varphi$$

Из краевого условия (2.5) и интеграла (2.13) после исключения w получаем

$$(2.16) \quad 2\mu_1 (ck)^{-1} \text{ctg } \varphi_1 w_1 (-x \sin \varphi_1) = \Delta (1 + \pi + \varphi - \theta) - \cos \theta$$

$$\Delta = \frac{\mu_1 \sin \varphi}{\mu_2 \sin \varphi_1} \cos \varphi_1$$

Если $\Delta \geq 1$, то при любом значении левой части уравнения (2.16) последнее имеет единственное решение. Если $\Delta < 1$, то уравнение (2.16) может иметь три и более корней относительно θ . На линии DE только корень $\theta_1 = \pi + \varphi$ приводит к непрерывному сопряжению решений в упругой и пластической области. Поэтому в пластической области следует выбирать тот корень, который при стремлении x к x_D стремится к $\pi + \varphi$.

Пусть это корень $\theta = \theta_1$, тогда из равенства (2.13) на границе $y = 0$ получим

$$w = \frac{k}{\rho_2 a_2} (1 + \pi + \varphi - \theta_1)$$

Значения θ_1 и w остаются постоянными вдоль линии

$$(2.17) \quad y (M - \cos \theta_1) - (x - x_p(\theta_1)) \sin \theta_1 = 0$$

где x_p — координата точки границы, в которой $\theta = \theta_1$. Угол наклона к оси x этой характеристики связан с θ_1 соотношением

$$(2.18) \quad \text{tg } \alpha_1 = -\sin \theta_1 / (M - \cos \theta_1)$$

Для того чтобы построенное решение имело место, необходимо, чтобы при движении точки H вдоль оси x угол α_1 возрастал и диссипация энергии D в пластической области была положительной.

Из (2.18) следует, что $\partial \alpha_1 / \partial x > 0$, если

$$(2.19) \quad (1 - M \cos \theta_1) \partial \theta_1 / \partial x \geq 0$$

Так как θ_1 удовлетворяет равенству (2.15), то при возрастании аргумента, пока функция $w(\Omega_1)$ возрастает, $d\theta_1/dx > 0$, и неравенство (2.19) будет выполнено, если

$$(2.20) \quad 1 - M \cos \theta_1 \geq 0$$

В точке D имеем $\theta_1 = \pi + \varphi$, т. е. неравенство (2.20) заведомо выполнено. Так как слева от точки D имеем $d\theta_1/dx > 0$, то θ_1 убывает с ростом w_1 . Убывая, θ_1 может достичь значения π , когда характеристика в пластической области станет параллельной оси x . Это возможно, если амплитуда падающей волны достигает значения

$$(2.21) \quad w_1^0 = \frac{k}{2\sqrt{\mu_1\rho_1}} \left(\frac{\mu_1 \sin \varphi}{\mu_2 \sin \varphi_1} (1 + \varphi) + \frac{1}{\cos \varphi_1} \right)$$

Пусть это значение достигается в точке M и в дальнейшем с ростом аргумента функция $w_1(\omega_1)$ продолжает возрастать, тогда линия MN — характеристика и на ней $\theta_1 = \pi$, а $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = -k$, $w = k(1 + \varphi)(\rho_2 a_2)^{-1}$. Решение в верхнем полупространстве определяется краевым условием (2.16) на линии ON . Линия MN — стационарная линия разрыва, на которой претерпевают разрыв скорости перемещений, а из динамических условий совместности на поверхности сильного разрыва следует, что величина τ_2 непрерывна на линии MN . Из (2.4) получаем интенсивность отраженной волны

$$(2.22) \quad w_2(-x \sin \varphi_1) = w_1(-x \sin \varphi_1) - \frac{k}{\sqrt{\mu_1\rho_1} \cos \varphi_1}$$

Рассмотрим диссипацию энергии в пластической области. Из (1.14) и (2.13) получаем

$$(2.23) \quad D = -\frac{k^2}{2\rho_2 a_2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta \right)$$

Из равенства (2.17) следует

$$(2.24) \quad z(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sin \theta = 0, \quad z(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} + M - \cos \theta = 0$$

$$\left(z(\theta) = \left(y + \frac{dx_p(\theta)}{d\theta} \right) \sin \theta - (x - x_p(\theta) \cos \theta) \right)$$

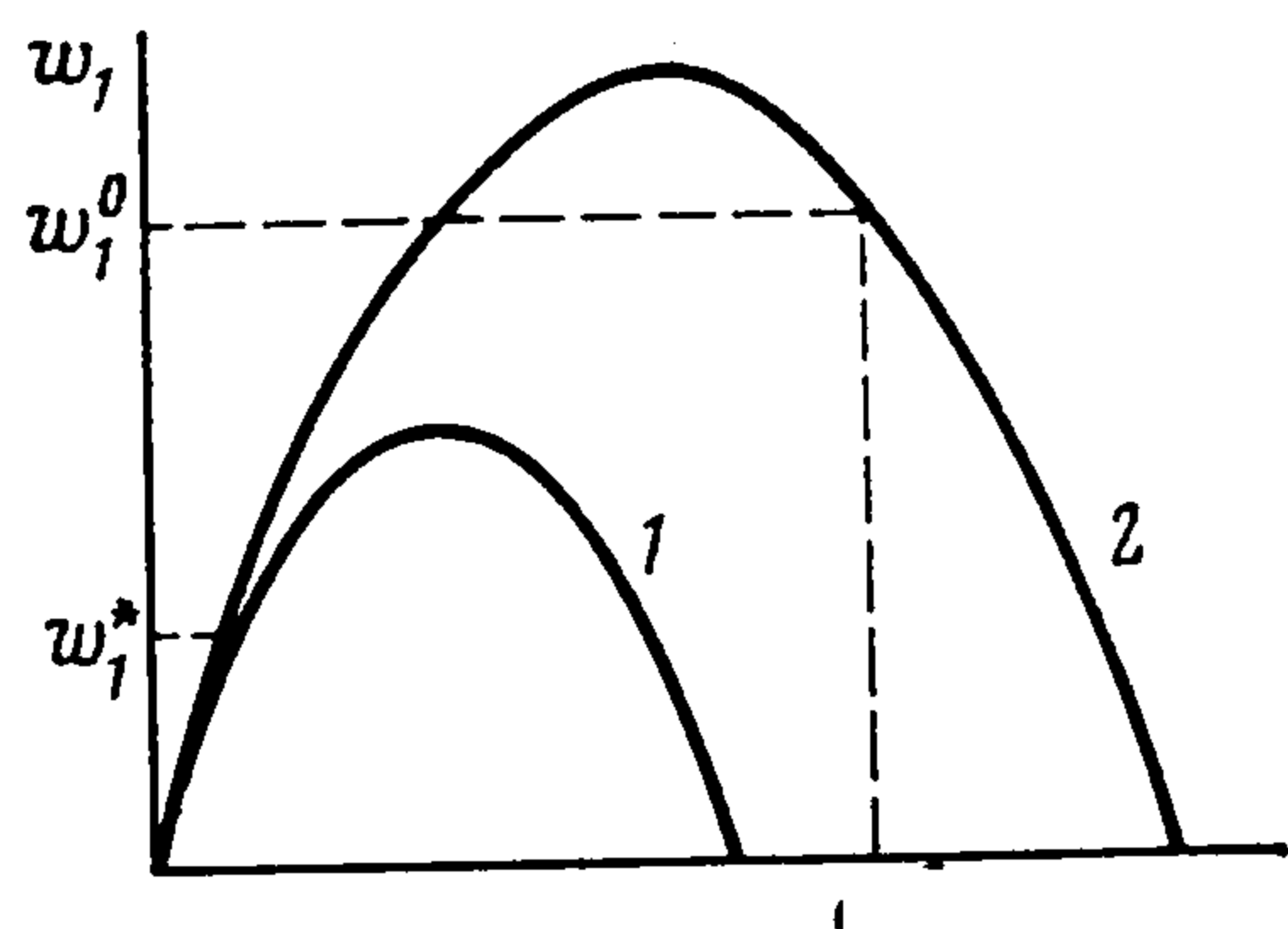
Из (2.23) и (2.24) получаем условие положительности диссипации энергии $z(\theta)(1 - M \cos \theta)^{-1} \leq 0$, которое, используя (2.20) и (2.17), можно преобразовать к виду

$$(2.25) \quad \left(y(1 - M \cos \theta) + \frac{dx_p(\theta)}{d\theta} (\sin \theta)^2 \right) (\sin \theta)^{-1} \leq 0$$

В пластической области $\pi \leq \theta \leq \pi + \varphi$, $y \geq 0$, поэтому неравенство (2.25) имеет место в любой точке пластической области при $\partial\theta/\partial x \geq 0$. Таким образом, $D > 0$ во всех точках пластической области. В случае $w_1 > w_1^0$ диссипация энергии D в пластической области также положительна, но особо следует рассмотреть диссипацию при $y = 0$ в зоне проскальзывания. На стационарной линии разрыва скоростей диссипация положительна, если $w_e > w_p$, где w_e , w_p — скорости перемещений в упругой и пластической области. Из (2.22) и (2.13) условие положительности диссипации энергии получаем в виде

$$(2.26) \quad 2w_1(-x \sin \varphi_1) - \frac{k}{\sqrt{\mu_1\rho_1} \cos \varphi_1} > \frac{k(1 + \pi)}{\sqrt{\rho_2\mu_2}}$$

Таким образом, в зоне нагрузки, если профиль падающей волны не превышает w_1^0 (профиль 1 на фиг. 2), то $D > 0$, пока $w_1(\Omega_1)$ — возрастающая функция, и $D < 0$, когда $w_1(\Omega_1)$ начинает убывать, т. е. после прохождения максимального значения профиля пластическое деформирование невозможно и наступает разгрузка. Если профиль падающей волны превышает w_1^0 (профиль 2 на фиг. 2), то в зоне превышения на



Фиг. 2

линии раздела двух сред наступает проскальзывание (разрыв перемещений). В этом случае условие положительности диссипации энергии будет выполнено, пока профиль падающей волны превышает w_1^0 , т. е. до значения Ω_1^0 . В дальнейшем $D < 0$ и пластическое деформирование невозможно, т. е. произойдет разгрузка.

3. Пусть NL — линия, отделяющая пластическую область от зоны разгрузки. В зоне разгрузки при $x \leq x_N$ выполняются соотношения (1.12) и (1.13), которые можно записать в виде

$$(3.1) \quad w(x, y) = \frac{f_1(x - \sqrt{M^2 - 1}y) + f_2(x + \sqrt{M^2 - 1}y)}{2\rho_2 a_2^2 \sqrt{M^2 - 1}}$$

$$\tau_2(x, y) = \frac{f_1(x - \sqrt{M^2 - 1}y) - f_2(x + \sqrt{M^2 - 1}y)}{2c}$$

Из краевого условия (2.5) имеем при $x \leq x_N$

$$(3.2) \quad 2w_1(-x \sin \varphi_1) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2\mu_2 \sqrt{M^2 - 1}} - \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 (f_1(x) - f_2(x))}{2\mu_1}$$

Дифференцируя (3.2) и разрешая полученное уравнение относительно $f_2'(x)$, получим

$$(3.3) \quad f_2'(x) = \frac{2R_2(x) g da_2 - f_1'(x) (g - d) \sin \varphi}{\sin \varphi (g + d)}, \quad g = \rho_1 a_1 \cos \varphi$$

$$R_2(x) = -\sin \varphi_1 w_1'(-x \sin \varphi_1) \quad \text{при } x \leq x_N; \quad d = \rho_2 a_2 \cos \varphi$$

Решение в пластической области (2.13), (2.14) можно записать в виде

$$(3.4) \quad w(x, y) = \frac{k(1 + \pi + \varphi) - f_3(y(M - \cos \theta)(\sin \theta)^{-1} - x)}{2\rho_2 a_2}$$

$$(3.5) \quad \theta(x, y) = \frac{k(1 + \pi + \varphi) + f_3(y(M - \cos \theta)(\sin \theta)^{-1} - x)}{2k}$$

Из краевого условия (2.5) имеем при $x \geq x_N$

$$(3.6) \quad 2w_1(-x \sin \varphi_1) = \frac{k(1 + \pi + \varphi) - f_3(-x)}{2\rho_2 a_2} - \frac{c}{\mu_1} \operatorname{tg} \varphi_1 k \cos \theta$$

Дифференцируя (3.5) при $y = 0$ и (3.6) по x и решая полученную систему двух линейных уравнений относительно $f_3'(-x)$ и $\partial \theta(x)/\partial x$, получаем

$$(3.7) \quad \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = -\frac{R_1(x) \rho_2 a_2 g}{k(g + b(\theta))}, \quad f_3'(-x) = \frac{2R_1(x) g \rho_2 a_2}{(g + b(\theta))}$$

$$R_1(x) = -2 \sin \varphi_1 w_1'(-x \sin \varphi_1) \quad \text{при } x > x_N; \quad b(\theta) = -a_2 \rho_2 \sin \theta$$

Пусть $x = x_N$ — точка границы, из которой начинается распространение волны разгрузки $y = y(x)$, и скорость волны разгрузки при $x = x_N$ есть $c^* = y'(x_N)$.

Предполагается, что на волне разгрузки напряжения и скорости перемещений непрерывны, в этом случае имеют место равенства

$$(3.8) \quad \begin{aligned} f_1\left(x + \frac{y(x)}{c_e}\right) + f_2\left(x - \frac{y(x)}{c_e}\right) &= \\ &= -\frac{a_2}{c_e} \left(k(1 + \pi + \varphi) - f_3\left(\frac{y(x)}{c_p} - 1\right) \right) \\ f_1\left(x + \frac{y(x)}{c_e}\right) - f_2\left(x - \frac{y(x)}{c_e}\right) &= 2ck \cos \theta \end{aligned}$$

где

$$c_e = -(M^2 - 1)^{-1/2}, \quad c_p = \sin \theta (M - \cos \theta)^{-1}$$

c_e, c_p — скорости распространения упругих и пластических волн.

Дифференцируя (3.8) по x и записывая полученные уравнения при $x = x_N$ и $y(x_N) = 0$, получаем для нахождения начальной скорости волны разгрузки c^* систему уравнений

$$(3.9) \quad \begin{aligned} f_1'(x_N) \left(1 + \frac{c^*}{c_e}\right) + f_2'(x_N) \left(1 - \frac{c^*}{c_e}\right) &= \frac{a_2}{c_e} f_3'(-x_N) \left(\frac{c^*}{c_p} - 1\right) \\ f_1'(x_N) \left(1 + \frac{c^*}{c_e}\right) - f_2'(x_N) \left(1 - \frac{c^*}{c_e}\right) &= \\ &= -c \sin \theta f_3'(-x_N) \left(\frac{c^*}{c_p} - 1\right) \end{aligned}$$

Исключая из нее при помощи (3.3) и (3.7) функции $f_3'(-x_N), f_2'(x_N)$, для определения c^* получаем уравнение

$$(3.10) \quad \begin{aligned} F(c^*) &= R_1(x_N) \rho_2 \sin \varphi \left(1 - \frac{c^*}{c_p}\right) \left(c \sin \theta \left(d + \frac{c^*}{c_e} g\right) + \right. \\ &+ \left. \left(g + \frac{c^*}{c_e} d\right) \frac{a_2}{c_e}\right) + R_2(x_N) (g + b(\theta)) d \left(1 - \left(\frac{c^*}{c_e}\right)^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Из (3.10) следует, что при $R_1(x_N) = 0, R_2(x_N) \neq 0$ имеем $c^* = c_e$, при $R_1(x_N) \neq 0, R_2(x_N) = 0$ имеем $c^* = c_p$. При $R_1(x_N) \neq 0$ и $R_2(x_N) \neq 0$ знак величин $F(c_p)$ и $F(c_e)$, как показывает анализ уравнения (3.10), зависит соответственно от знака $R_2(x_N)$ и $R_1(x_N)$. Если $R_1(x_N)$ и $R_2(x_N)$ имеют противоположные знаки, то уравнение (3.10) имеет по крайней мере один корень, удовлетворяющий неравенству

$$(3.11) \quad |c_p| \leq |c^*| \leq |c_e|$$

Если $R_1(x_N) = R_2(x_N) = 0$, то из уравнений (3.9) получаем, что $\partial\theta/\partial x = f_3'(-x_N) = 0$, а из (3.10) величина c^* не определяется. В этом случае для определения начальной скорости волны разгрузки дважды продифференцируем (3.2) и разрешим полученное уравнение относительно $f_2''(x)$. Имеем

$$(3.12) \quad \begin{aligned} f_2''(x) &= \frac{2H_2(x) g d a_2 - f_1''(x) (g - d) \sin \varphi}{\sin \varphi (g + d)} \\ H_2(x) &= 2 (\sin \varphi_1)^2 w_1''(-x \sin \varphi_1) \quad \text{при } x \leq x_N \end{aligned}$$

Дважды дифференцируя (3.5) при $y = 0$ и (3.6) по x и решая полученную систему двух линейных уравнений относительно $f_3''(-x)$ и $\partial^2\theta/\partial x^2$, находим

$$(3.13) \quad \begin{aligned} f_3''(-x) &= -\frac{2H_1(x) \rho_2 a_2 g}{g + b(\theta)}, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = -\frac{H_1(x) \rho_2 a_2 g}{k(g + b(\theta))} \\ H_1(x) &= 2 \sin^2 \varphi_1 w_1''(-x \sin \varphi_1) \quad \text{при } x \geq x_N \end{aligned}$$

Дважды дифференцируя по x уравнения (3.8) и записывая полученные уравнения при $x = x_N$ и $y(x_N) = 0$, получаем для нахождения начальной скорости волны разгрузки систему уравнений. Исключая в ней при помощи (3.12) и (3.13) величины $f_2''(x)$ и $f_3''(-x)$, для определения c^* получаем уравнение

$$(3.14) \quad F_1(c^*) = H_2(x_N)(g + b(\theta))d \left(1 - \left(\frac{c^*}{c_e}\right)^2\right)^2 + H_1(x_N) \sin \varphi \rho_2 \times \\ \times \left(\frac{c^*}{c_p} - 1\right)^2 \left(c \sin \theta \left(d + 2\frac{c^*}{c_e}g + \left(\frac{c^*}{c_e}\right)^2 d\right) + \right. \\ \left. + \frac{a_2}{c_e} \left(g + 2d\frac{c^*}{c_e} + \left(\frac{c^*}{c_e}\right)^2 g\right)\right) = 0$$

В точке максимума $H_1(x_N) \leq 0$ и $H_2(x_N) \leq 0$. Так как $F_1(c_p) < 0$, а $F_1(c_e) > 0$, то уравнение (3.14) имеет по крайней мере, один корень, удовлетворяющий неравенству (3.11). Если $H_1(x_N) = H_2(x_N) = 0$, то из уравнения (3.14) c^* не определяется.

Пусть все производные до n -го порядка функций $w_1^+(-x \sin \varphi_1)$ и $w_1^-(-x \sin \varphi_1)$ обращаются в нуль, а хотя бы одна производная $n + 1$ -го порядка отлична от нуля. Тогда для определения начальной скорости волны разгрузки уравнения (3.8) следует продифференцировать $n + 1$ раз по x при $x = x_N$ и $y(x_N) = 0$, а в дальнейшем провести рассуждения, аналогичные проведенным выше.

Рассмотрим нахождение начальной скорости волны разгрузки в случае проскальзывания. Краевое условие (3.6) при этом не имеет места во всех точках зоны проскальзывания, а на величину начальной скорости волны разгрузки оказывают влияние свойства функции $w_1(-x \sin \varphi_1)$ при x , лежащих не только в окрестности x_N , но и в окрестности x_M — точки, в которой начинается проскальзывание. В рассматриваемом случае в формулах (3.4) и (3.5) удобно положить $f_4(y(M - \cos \theta) - x \sin \theta) = f_3(y(M - \cos \theta)(\sin \theta)^{-1} - x)$. Дифференцируя по x условие непрерывности скоростей и напряжений, из (3.1), (3.4), (3.5) получаем

$$(3.15) \quad f_1'(x_N) \left(1 + \frac{c^*}{c_e}\right) + f_2'(x_M) \left(1 - \frac{c^*}{c_e}\right) = \\ = \frac{a_2}{c_e} f_4'(0) \left(c^*(M + 1) + x_N \frac{\partial \theta(x_N, 0)}{\partial y} c^*\right) \\ f_1'(x_N) \left(1 + \frac{c^*}{c_e}\right) - f_2'(x_N) \left(1 - \frac{c^*}{c_e}\right) = 0$$

В соотношениях (3.15) учтено, что в случае проскальзывания при $x \in [x_N, x_M]$ величина θ принимает постоянное значение, равное π . Дифференцируя (3.5) по y при $y = 0$ и разрешая полученное уравнение относительно $\partial \theta / \partial y$, имеем

$$(3.16) \quad \left. \frac{\partial \theta(x_N, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{(M + 1) f_4'(0)}{2k - x_N f_4'(0)}$$

Дифференцируя (3.5) и (3.6) по x в окрестности точки x_M , определим

$$(3.17) \quad f_4'(0) = 2k(x_M)^{-1}$$

Исключая из (3.15) при помощи (3.3), (3.16), (3.17) величины $\partial \theta / \partial y$, $f_4'(0)$, $f_2'(x)$, для определения c^* получаем уравнение

$$(3.18) \quad F_2(c^*) = k \sin \varphi (M + 1) c^* \left(g + d \frac{c^*}{c_e}\right) - \left(1 - \left(\frac{c^*}{c_e}\right)^2\right) \times \\ \times R_2(x_n) g d c_e (x_M - x_N) = 0$$

В случае проскальзывания $c_p = 0$. При $R_2(x_n) = 0$ имеем $c^* = c_p$. При $R_2(x) \neq 0$ уравнение (3.18) имеет, по крайней мере, один корень, удовлетворяющий неравенству (3.11), так как $F_2(0) \geq 0$, $F_2(c_e) \leq 0$. Таким образом, начальная скорость волны разгрузки определена во всех рассмотренных случаях. Дальнейшее построение волны разгрузки можно проводить по известной методике [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков В. А., Быковцев Г. И.* Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 71—79.
2. *Баскаков В. А.* Об отражении плоских сдвиговых волн от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде.— В кн.: Распространение упругих и упругопластических волн. Алма-Ата: Наука, 1973, с. 65—72.
3. *Баскаков В. А.* Взаимодействие ударных волн в упругопластической среде с упрочнением.— ПМТФ, 1979, № 6, с. 127—134.
4. *Слепьян Л. И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
5. *Ковшов А. Н.* О преломлении упругой волны в упругопластическое полупространство.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6, с. 82—88.
6. *Ковшов А. Н.* О преломлении волны сдвига в грунт.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1975, № 8, с. 36—41.
7. *Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.

Жуйбышев

Поступила в редакцию
6.XII.1983