

УДК 539.3 : 534.1

## СТАЦИОНАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА КРУГОВОМ ОТВЕРСТИИ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Алексеева Л. А.

Предлагается аналитическое решение задачи стационарной дифракции волн на круговом отверстии в упругой полуплоскости, полученное с использованием методов разделения переменных, переразложения цилиндрических функций на плоские волны и метода многократных отражений. Строится решение для разного типа падающих волн.

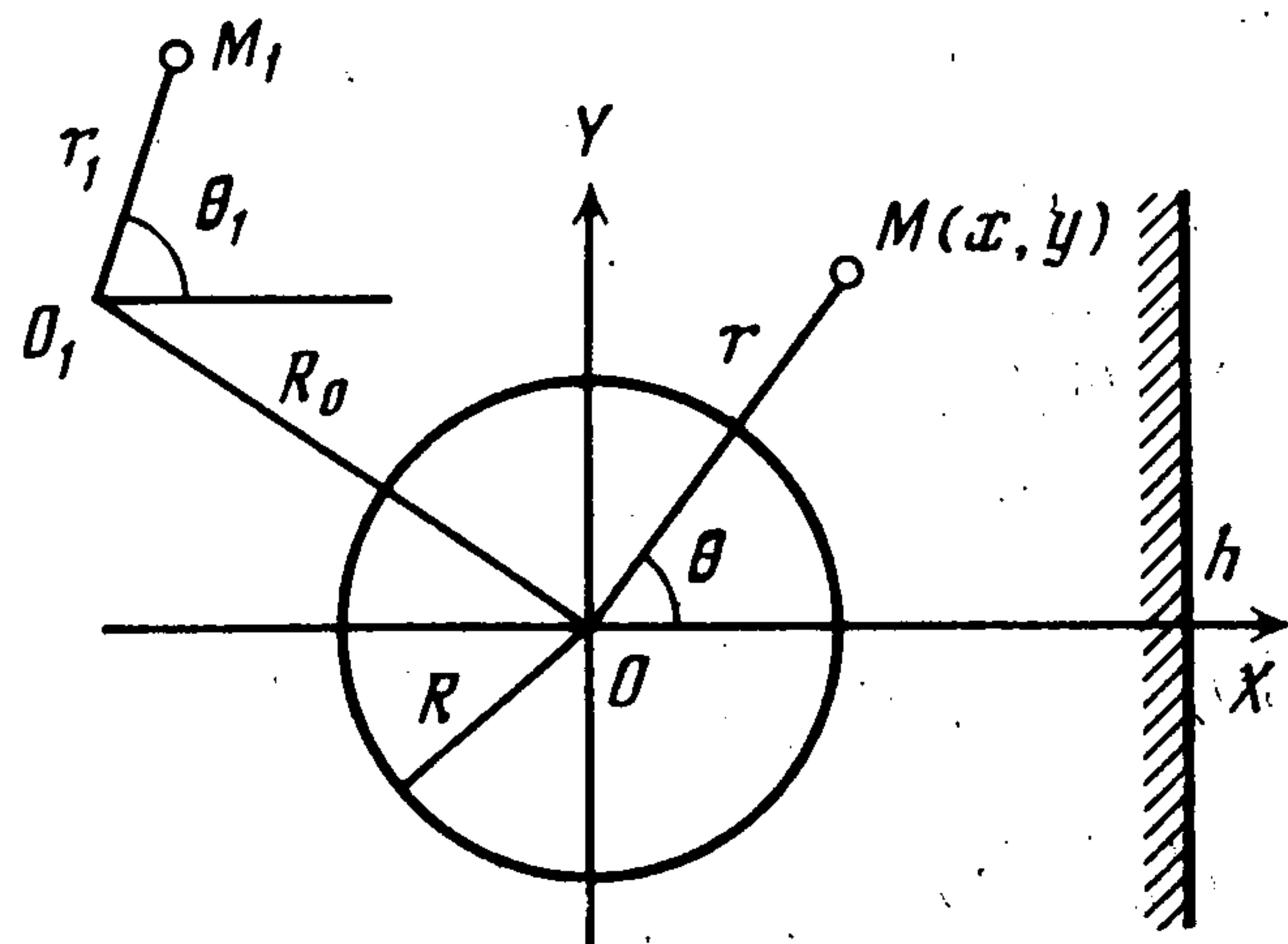
Решение аналогичной задачи в условиях антиплоской деформации было получено с помощью метода отраженных источников [1]. В условиях плоской деформации задача установившихся колебаний в [2] сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим упругое  $(\lambda, \mu, \rho)$  изотропное полупространство  $x < h, h > 0$  с круговой цилиндрической полостью радиуса  $R$ , ось которой  $OZ$  параллельна границе полупространства (фиг. 1). Пусть на границу полости действует стационарная нагрузка

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= p_r(\theta) e^{-i\omega t}, \\ \sigma_{r\theta} &= p_\theta(\theta) e^{-i\omega t}, \quad \sigma_{rz} = 0 \end{aligned}$$

где  $p_j$  ( $j = r, \theta$ ) — известные функции, допускающие разложение в комплексный ряд Фурье

$$p_j = \sum_n p_{jn} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta$$



Фиг. 1

Здесь  $r, \theta, z$  — цилиндрическая система координат с полярной осью  $OX$ ,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений.

Граница полупространства свободна от действия нагрузок

$$(1.2) \quad \sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0, \quad x = h.$$

При условиях (1.1), (1.2) в среде реализуется состояние плоской деформации, которое можно описать потенциалами Ламе  $\varphi, \psi$ , удовлетворяющими уравнениям Гельмгольца [3, 4]

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \alpha^2 \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \beta^2 \psi = 0$$

Компоненты смещений  $u_x, u_y$  определяются через  $\varphi, \psi$  соотношениями

$$(1.4) \quad u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Временной множитель  $e^{-i\omega t}$  здесь и всюду ниже опускаем, определяем комплексные амплитуды,  $\alpha = \omega \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$ ,  $\beta = \sqrt{\rho/\mu} \cdot \omega$ .

Используя закон Гука для упругой среды [4], перепишем граничные условия для потенциалов

$$(1.5) \quad \begin{aligned} L\varphi + M\psi &= -\frac{p_r(\theta)}{2\mu}, \quad M\varphi - L\psi = -\frac{p_\theta(\theta)}{2\mu} \\ L &= \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \\ M &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}, \quad r = R \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \left(\alpha^2 - 0.5\beta^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \left(\beta^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi &= 0, \quad x = h \end{aligned}$$

Разобьем потенциалы искомого поля на составляющие, каждая из которых удовлетворяет соответствующему из уравнений (1.3)

$$(1.7) \quad \varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j, \quad \psi = i \sum_{j=0}^{\infty} \psi^j$$

Потенциалы с четными индексами условно назовем волнами, идущими от полости, с нечетными — отраженными от плоской границы полупространства. Соответствующие им компоненты смещений и напряжений  $u_k^j, \sigma_{kl}^j$  удовлетворяют на границе области условиям

$$(1.8) \quad \sigma_{xj}^{2k+1} = -\sigma_{xj}^{2k}, \quad j = x, y, \quad x = h$$

$$(1.9) \quad \sigma_{rj}^{2k+2} = -\sigma_{rj}^{2k+1}, \quad j = r, \theta, \quad r = R; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для  $\sigma_{rr}^0, \sigma_{r\theta}^0$  выполняются соотношения (1.1). Из (1.8), (1.9) следует, что суммарные потенциалы (1.7) удовлетворяют граничным условиям (1.5), (1.6).

Четные потенциалы будем искать в виде рядов Фурье — Бесселя

$$(1.10) \quad \varphi^j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^j H_n^{(1)}(\alpha r) e^{in\theta}, \quad \psi^j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^j H_n(\beta r) e^{in\theta}$$

где  $H_n^{(1)}(\cdot)$  — функции Ганкеля, удовлетворяющие условиям излучения Зоммерфельда [1, 4]. Слагаемые в суммах (1.7) — частные решения уравнений Гельмгольца (1.3). Потенциалы волн, отраженных от границы полуплоскости, представим в виде

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \varphi^j &= \frac{1}{i\pi} \int_{L_\varepsilon} \frac{a^j(\xi)}{\Delta(\xi)} \exp(iy\xi + \sqrt{\xi^2 - \alpha^2}(x-h)) d\xi \\ \psi^j &= \frac{1}{i\pi} \int_{L_\varepsilon} \frac{b^j(\xi)}{\Delta(\xi)} \exp(iy\xi + \sqrt{\xi^2 - \beta^2}(x-h)) d\xi \\ \operatorname{Re} \sqrt{\xi^2 - k^2} &\geq 0, \quad \operatorname{Im} \sqrt{\xi^2 - k^2} \leq 0, \quad k = \alpha, \beta \end{aligned}$$

$$(1.12) \quad \Delta_\pm(\xi) = 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - \alpha^2} \sqrt{\xi^2 - \beta^2} - (2\xi^2 - \beta^2)^2 = 0$$

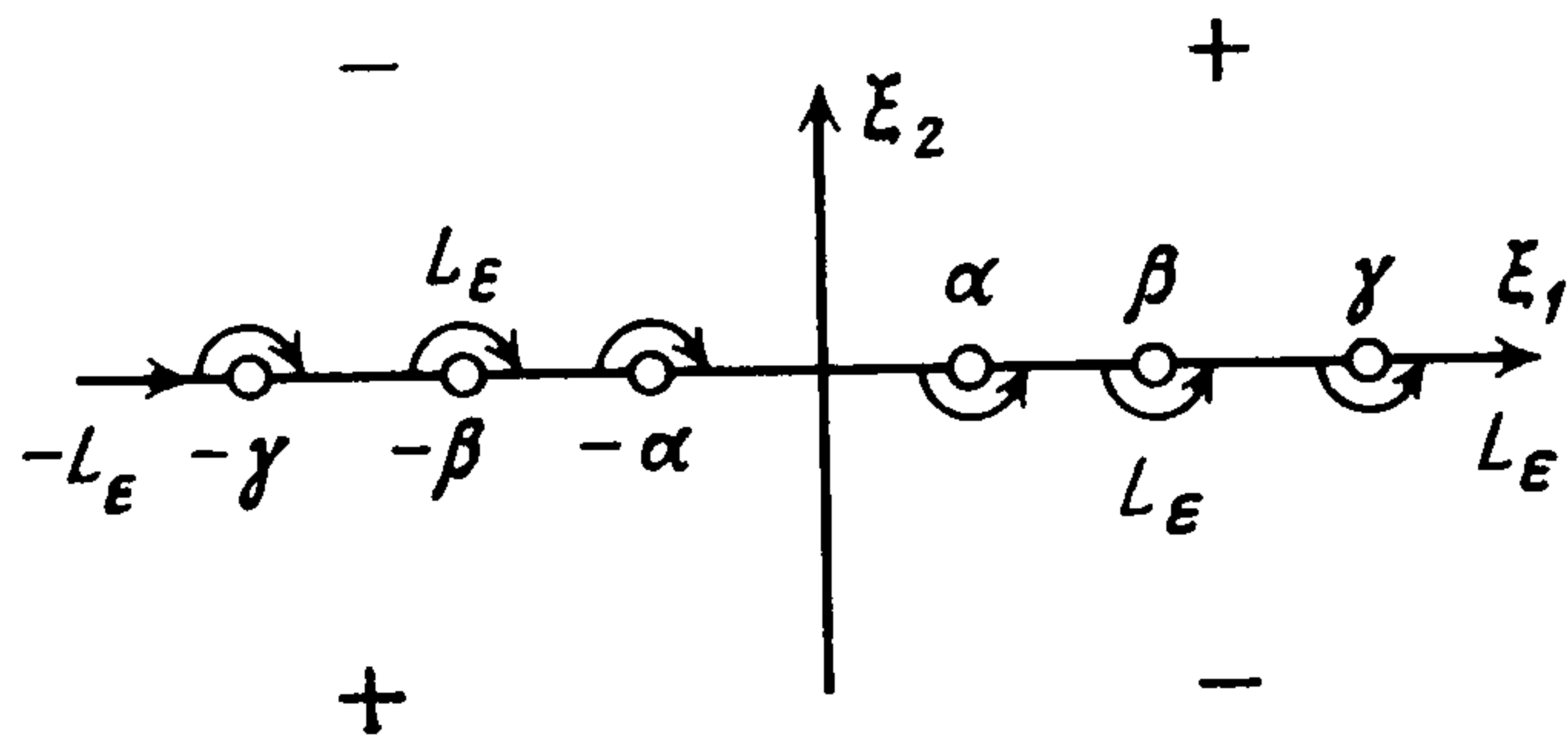
Здесь  $L_\varepsilon$  — контур в плоскости комплексной переменной  $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ , совпадающий с осью  $\xi_1$  всюду, кроме  $\varepsilon$ -окрестностей точек  $\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma$ , где  $\pm\gamma$  — два действительных корня уравнения Релея,  $\alpha < \beta < \gamma$  [4, 5], которые следует обойти по  $\varepsilon$ -полуокружностям так, как показано на фиг. 2. Условия на знаки радикалов в (1.11) соответствуют уходящим от границы и затухающим при  $x \rightarrow \infty$  волнам.

Функция  $\sqrt{\xi^2 - k^2}$  ( $k = \alpha, \beta$ ) имеет точки ветвления  $\pm k$ . Разрезы плоскости  $\xi$  по оси  $\xi_2$  и отрезку  $|\xi_1| < k$ , на которых  $\operatorname{Re} \sqrt{\xi^2 - k^2} = 0$ ,

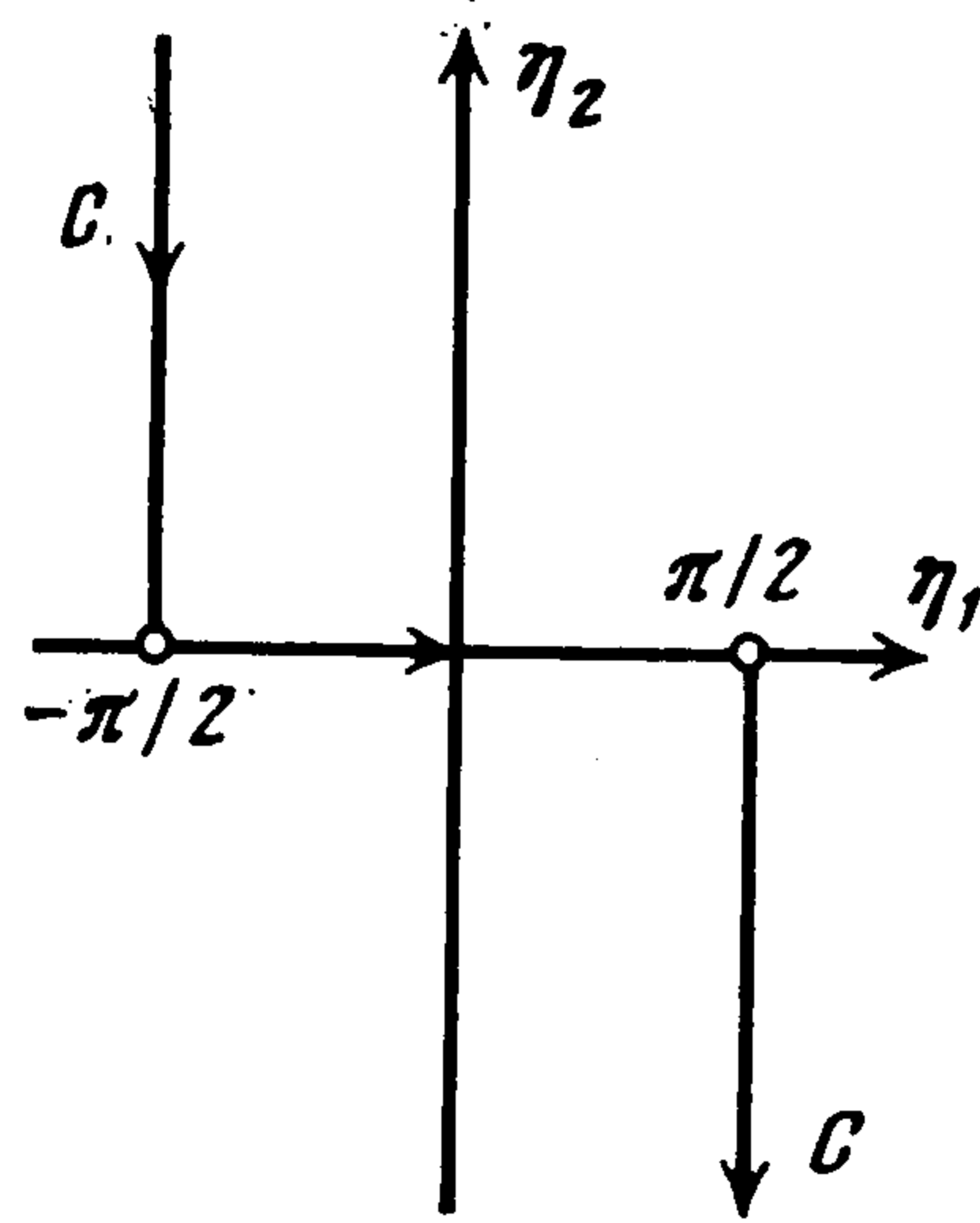
разделяют два листа римановой поверхности функции  $\sqrt{\xi^2 - k^2}$ , на каждом из которых величина  $\operatorname{Re} \sqrt{\xi^2 - k^2}$  либо положительна, либо отрицательна. На фиг. 2 показаны области знакоопределенности  $\operatorname{Im} \sqrt{\xi^2 - k^2}$  на листе  $\operatorname{Re} \sqrt{\xi^2 - k^2} \geq 0$ . Контур  $L_\varepsilon$  должен проходить в области  $\operatorname{Im} \sqrt{\xi^2 - k^2} \leq 0$ , что и диктует указанное выше направление обхода точек  $\pm\alpha$ ,  $\pm\beta$ ,  $\pm\gamma$ .

Граничные условия (1.4), (1.5), (1.6) позволяют последовательно определять  $\varphi^j$ ,  $\psi^j$ , если известны  $\varphi^{j-1}$ ,  $\psi^{j-1}$ .

2. **Сосредоточенный источник в полуплоскости.** Пусть известны  $\varphi^{j-1}$ ,  $\psi^{j-1}$ , определяемые соотношениями (1.10). Для отыскания  $\varphi^j$ ,  $\psi^j$  видоизме-



Фиг. 2



Фиг. 3

ним потенциалы  $\varphi^{j-1}$ ,  $\psi^{j-1}$ , представленные через цилиндрические функции, разложив их на плоские волны. Для этого воспользуемся представлением [6]

$$(2.1) \quad H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_C \exp(ik(x \cos \eta + y \sin \eta) + in\eta) d\eta$$

$$x > 0$$

(контур  $C$  изображен на фиг. 3). Вводим замену переменных  $\xi = \xi_1 + i\xi_2 = k \sin \eta$ , переводящую контур интегрирования  $C$  в действительную ось  $L: \xi_2 = 0$ . Вдоль  $C$

$$\cos \eta = i \sqrt{\xi^2 - k^2}/k, \quad e^{in\eta} = i^n (\xi + \sqrt{\xi^2 - k^2})^n / k^n$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{\xi^2 - k^2} \geq 0, \quad \operatorname{Im} \sqrt{\xi^2 - k^2} \leq 0$$

Отсюда следует

$$(2.2) \quad H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} = \frac{1}{i\pi} \int_L \left( \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - k^2}}{k} \right)^n \frac{\exp(iy\xi - x \sqrt{\xi^2 - k^2})}{\sqrt{\xi^2 - k^2}} d\xi$$

$$x > 0$$

Рассмотрим контур  $C_\varepsilon^k: \eta = \operatorname{Arcsin}(\xi/k)$  ( $k = \alpha, \beta$ ),  $|\eta_1| < \pi/2$ , где  $\xi \in L_\varepsilon$ . В силу аналитичности подынтегральной функции в (2.1) контур  $C_\varepsilon^k$  эквивалентен  $C$ , поэтому в представлении (2.2) можно заменить контур интегрирования  $L$  на  $L_\varepsilon$ .

Используя (2.2) для  $\varphi^{j-1}$ ,  $\psi^{j-1}$  ( $j = 2m + 1$ ), определенных рядами (1.10), и (1.11) для потенциалов  $\varphi^j$ ,  $\psi^j$ , выпишем граничные условия (1.6), которые при  $x = h$  имеют вид интегралов Фурье с поправкой на контур  $L_\varepsilon$ . Приравнявая коэффициенты при  $e^{iy\xi}$ , получаем линейную систему

уравнений для определения функций  $a^j(\xi)$ ,  $b^j(\xi)$ . Разрешая ее, получим

$$(2.3) \quad a^j(\xi) = g_1(\xi, \alpha) \Sigma_a - g_2(\xi) \Sigma_b, \quad b^j(\xi) = g_2(\xi) \Sigma_a + \\ + g_1(\xi) \Sigma_b \\ \Sigma_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^j f_n(\xi, \alpha), \quad \Sigma_b = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^j f_n(\xi, \beta) \\ g_1(\xi, k) = \frac{4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - \alpha^2} \sqrt{\xi^2 - \beta^2} + (2\xi^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\xi^2 - k^2}}, \quad g_2(\xi) = 4\xi(2\xi^2 - \beta^2) \\ f_n(\xi, k) = \left( \frac{\xi^2 + \sqrt{\xi^2 - k^2}}{k} \right)^n \exp(-h \sqrt{\xi^2 - k^2})$$

3. Дифракция на отверстии. Для определения функций  $\varphi^{j+1}$ ,  $\psi^{j+1}$  ( $j = 2k + 1$ ) перейдем к полярной системе координат в выражениях (1.11). С учетом разложения [3]

$$(3.1) \quad e^{ikr \cos \eta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\eta}$$

которое аналитически продолжимо в плоскость комплексного  $\eta$ , потенциалы (1.11) можно разложить по цилиндрическим функциям

$$(3.2) \quad \varphi^j = \frac{1}{i\pi} \sum_n J_n(\alpha r) e^{in\theta} \int_{L_\alpha} \frac{a^j(\xi)}{\Delta(\xi)} f_n(\xi, \alpha) E_\alpha(\xi) d\xi = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^j J_n(\alpha r) e^{in\theta} \\ \psi^j = \frac{1}{i\pi} \sum_n J_n(\beta r) e^{in\theta} \int_{L_\beta} \frac{b^j(\xi)}{\Delta(\xi)} f_n(\xi, \beta) E_\beta(\xi) d\xi = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^j J_n(\beta r) e^{in\theta} \\ E_k(\xi) = \exp(-h \sqrt{\xi^2 - k^2})$$

Отсюда и из (2.3) следует

$$(3.3) \quad i\pi a_n^j = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{j-1} \int_{L_\alpha} \frac{g_1(\xi, \alpha)}{\Delta(\xi)} f_{n+m}(\xi, \alpha) E_\alpha(\xi) d\xi + \\ + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m^{j-1} \int_{L_\beta} \frac{g_2(\xi)}{\Delta(\xi)} f_m(\xi, \beta) f_n(\xi, \alpha) E_\alpha(\xi) d\xi \\ i\pi b_n^j = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m^{j-1} \int_{L_\beta} \frac{g_1(\xi, \beta)}{\Delta(\xi)} f_{n+m}(\xi, \beta) E_\beta(\xi) d\xi + \\ + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{j-1} \int_{L_\alpha} \frac{g_2(\xi)}{\Delta(\xi)} f_m(\xi, \alpha) f_n(\xi, \beta) E_\beta(\xi) d\xi$$

Определение функций  $\varphi^{j+1}$ ,  $\psi^{j+1}$  сводится к решению задачи стационарной дифракции волн (3.2) на круговом отверстии в безграничной плоскости, решение которой хорошо известно [1]. В используемых здесь обозначениях

$$(3.4) \quad a_n^{j+1} = (a_n^j \Delta_{n1}(\alpha R, \beta R) + b_n^j \Delta_{n2}(\beta R)) / \Delta_n \\ b_n^{j+1} = (a_n^j \Delta_{n2}(\alpha R) + b_n^j \Delta_{n1}(\beta R, \beta R)) / \Delta_n \\ \Delta_n = \Phi_{1n}(\alpha R, H_n^{(1)}) \Phi_{1n}(\beta R, H_n^{(1)}) - \Phi_{2n}(\alpha R, H_n^{(1)}) \Phi_{2n}(\beta R, H_n^{(1)}) \\ \Delta_{n1}(z_1, z_2) = \Phi_{2n}(z_1, J_n) \Phi_{2n}(z_2, H_n^{(1)}) - \Phi_{1n}(z_1, J_n) \Phi_{1n}(z_2, H_n^{(1)})$$

$$\begin{aligned}\Delta_{n2}(z) &= \Phi_{1n}(z, J_n) \Phi_{2n}(z, H_n^{(1)}) - \Phi_{2n}(z, J_n) \Phi_{1n}(z, H_n^{(1)}) \\ \Phi_{1n}(z, Z_n) &= (2n^2 - \beta^2 R^2) Z_n(z) - 2z Z_n'(z), \\ \Phi_{2n}(z, Z_n) &= 2n(Z_n(z) - z Z_n'(z))\end{aligned}$$

Здесь  $Z_n$  — идентификатор цилиндрической функции  $H_n^{(1)}$  или  $J_n$ .  
При  $j = 0$

$$(3.5) \quad \begin{aligned}a_n^0 &= (p_{n\theta} \Phi_{2n}(\beta R, H_n^{(1)}) - p_{nr} \Phi_{1n}(\beta R, H_n^{(1)})) / \Delta_n \\ b_n^0 &= (p_{nr} \Phi_{2n}(\alpha R, H_n^{(1)}) - p_{n\theta} \Phi_{1n}(\alpha R, H_n^{(1)})) / \Delta_n\end{aligned}$$

Таким образом процесс решения задачи состоит в следующем. По формулам (3.5) находим  $a_n^0$ ,  $b_n^0$ , т. е. потенциал первой излученной полостью волны. Затем, используя (2.3), (3.2), — потенциалы отраженной от границы полуплоскости волны. Далее по формулам (3.4) определяем  $a_n^2$ ,  $b_n^2$  и т. д.

Решение можно представить через цилиндрические функции, используя для  $\varphi^j$ ,  $\psi^j$  соотношения (1.10), (3.2), либо через контурные интегралы типа Фурье (1.11), (2.2) при  $0 \leq x \leq h$ . Удобное представление выбирается в зависимости от того, вблизи какой границы определяются характеристики напряженно-деформированного состояния  $u_j$ ,  $\sigma_{ij}$ . Ввиду громоздкости выражения для последних здесь не приводятся.

В соотношениях (1.11), (3.2), (3.3) можно перейти к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , как в [7]. Полученные интегралы тогда следует понимать в смысле главного значения в окрестности точек  $\pm\gamma$ , около  $\pm\alpha$ ,  $\pm\beta$  они существуют как несобственные. Кроме того, появятся внеинтегральные члены, с точностью до множителя равные разности вычетов подынтегральных функций в точках  $\pm\gamma$ , которые описывают влияние поверхностной волны Релея.

Можно предложить другие способы вычисления интегралов по  $L_\varepsilon$ , основанные на преобразовании контура интегрирования с использованием леммы Жордана, модифицируя ее для области с точками ветвления; на них здесь останавливаться не будем.

**4. Исследование сходимости рядов и существования интегралов.** Используя асимптотику функций Ганкеля при  $|n| \rightarrow \infty$  и фиксированном аргументе [8], из соотношений (3.5) получим

$$\begin{aligned}|a_n^0| &\sim \frac{C\pi |p_{nr} + p_{n\theta}|}{2 (|n| - 1)!} \left(\frac{\alpha R}{2}\right)^{|n|} \\ |b_n^0| &\sim \frac{C\pi |p_{nr} + p_{n\theta}|}{2 (|n| - 1)!} \left(\frac{\beta R}{2}\right)^{|n|}, \quad C = \frac{R}{\mu\beta}\end{aligned}$$

Отсюда для достаточно больших  $|n|$  следует

$$\begin{aligned}|a_n^0 H_n^{(1)}(\alpha R)| &< C |p_{nr} + p_{n\theta}| \left(\frac{R}{r}\right)^{|n|} < C |p_{nr} + p_{n\theta}| \\ |b_n^0 H_n^{(1)}(\beta R)| &< C |p_{nr} + p_{n\theta}|\end{aligned}$$

т. е. ряды (1.10) сходятся абсолютно и равномерно по  $r$ ,  $\theta$  и представляют собой непрерывные в области  $r \geq R$  функции. Если потребовать  $|p_{nj}| = o(|n|^{-4})$  при  $|n| \rightarrow \infty$  ( $j = r, \theta$ ), то аналогичные оценки можно получить для продифференцированных рядов, что обосновывает сходимость и операцию почленного дифференцирования рядов (1.10). Для  $j = 2k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  сходимость рядов Фурье—Бесселя доказывается аналогично на основании существования непрерывных и дифференцируемых потенциалов  $\varphi^{j-1}$ ,  $\psi^{j-1}$ .

Заметим, что в силу выбора контура интегрирования  $L_\varepsilon$  подынтегральные функции в выражениях (1.11) бесконечно дифференцируемы по  $x$ ,  $y$  и стремятся к нулю.

при  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Поскольку

$$|f_n(\xi, k)| < (2|\xi|/k)^{|n|} \text{ при } |\xi| > k, \quad |f_n(\xi, k)| = 1 \text{ при } |\xi| \leq k$$

для достаточно больших  $N$  имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|n| > N} a_n^0 f_n(\xi, \alpha) \right| &< C \sum_{|n| > N} |p_{nr} + p_{n\theta}| |R\xi|^{|n|}/(|n|-1)! \leq \\ &\leq C \sum_{|n| > N} |R\xi|^{|n|}/|n|! \leq 2Ce^{R|\xi|} \end{aligned}$$

Так как для достаточно больших  $|\xi|$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|n| > N} a_n^0 f_n(\xi, \alpha) \exp((x-h)\sqrt{\xi^2 - \alpha^2}) \right| &\leq 2C \exp((x-2h+R)|\xi|) \leq \\ &\leq 2C \exp((R-h)|\xi|) \\ \left| \sum_{|n| < N} a_n^0 f_n(\xi, \alpha) \exp((x-h)\sqrt{\xi^2 - \alpha^2}) \right| &\leq \\ &\leq 2 \sum_{|n| < N} |a_n^0| (2|\xi|/\alpha)^{|n|} e^{-h|\xi|} \end{aligned}$$

а  $R < h$ ,  $h > 0$ , интегралы (1.11) существуют и представляют собой непрерывные по  $x, y$  функции в области  $x < h$ .

Аналогичные оценки можно получить для формально продифференцированных по  $x, y$  интегралов (1.11), равномерная сходимость которых следует из существования интегрируемых на  $(-\infty, \infty)$  мажорант подынтегральных функций

$$|\xi|^m \exp((R-h)|\xi|), \quad |\xi|^m \exp(-h|\xi|)$$

что также обосновывает операцию дифференцирования под знаком интеграла.

Рассмотрим вопрос о сходимости метода последовательных отражений, т. е. рядов (1.7). Заметим, что решение задачи можно свести к решению бесконечной системы линейных уравнений с определителем нормального типа. Описанная выше процедура является для нее реализацией метода последовательных приближений. Для этого искомые потенциалы следует представить в форме

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad \psi = \psi_0 + \psi_1$$

сохранив прежний вид (1.10) для  $\varphi_0, \psi_0$ , (1.11) для  $\varphi_1, \psi_1$ . Из соотношений (3.3) определяются  $a_n^1, b_n^1$  через  $a_n^0, b_n^0$ . Из условий на контуре полости (1.5), приравнявая коэффициенты при  $e^{in\theta}$ , получим бесконечную систему линейных уравнений для определения коэффициентов  $a_n^0, b_n^0$ .

В силу особенностей поведения функций Ганкеля при  $n \rightarrow \infty$  полученная система неудобна для исследования. Если вместо коэффициентов  $a_n^0, b_n^0$  ввести

$$c_n^0 = a_n^0 \frac{(|n|+1)^3 |2n|!}{(\alpha R)^{|n|}}, \quad d_n^0 = b_n^0 \frac{(|n|+1)^3 |2n|!}{(\beta R)^{|n|}}$$

и переписать систему с соответствующей заменой  $a_n^0, b_n^0$ , приходим к системе с определителем нормального типа. Сумма модулей коэффициентов матрицы системы ограничена двойным рядом

$$C \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^2 \left(\frac{R}{2h-R}\right)^n + \frac{(n+1)(\beta R)^{2n}}{(2n)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+1)!(p+1)^4}{(p+n)!} \left(\frac{R}{2h}\right)^p$$

сходимость которого следует из условия  $R < h$ . Свободные члены стремятся к нулю при  $|n| \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $(|p_{nr} + p_{n\theta}|)n^4 \rightarrow 0$ . Таким образом, выполнены условия существования и единственности ограниченного решения (см. [9]), которое можно получить методом редукции или последовательных приближений, как описано выше.

Из последнего неравенства следует, что сходимость тем быстрее, чем глубже находится отверстие и меньше частота действующей нагрузки. Метод последовательных отражений с физической точки зрения более предпочтителен, поскольку часто, если не требуется большая точность вычислений, можно ограничиться одним или двумя отражениями для получения достоверных с инженерной точки зрения данных.

5. Задачи стационарной дифракции. При решении задач стационарной дифракции поле падающей волны обычно считается заданным. В качестве него берутся какие-либо решения уравнений (1.3). Здесь под падающей волной, потенциалы которой обозначим через  $\Phi_+$ ,  $\Psi_+$ , будем понимать различные решения (1.3) для сплошного упругого полупространства со свободной границей (1.6). Решение дифракционной задачи ищется в виде

$$\varphi = \Phi_+ + \Phi_-, \quad \psi = \Psi_+ + \Psi_-$$

где  $\Phi_-$ ,  $\Psi_-$  — потенциалы отраженных от свободной границы волн. Ясно, что задачу для определения  $\Phi_-$ ,  $\Psi_-$  можно свести к рассмотренной выше.

В сейсмологии, исследуя влияние на сооружения сейсмических волн от удаленных источников, обычно рассматривают плоские продольные и поперечные волны и поверхностные волны Релея. Для близких землетрясений либо при колебаниях искусственного происхождения типа промышленных взрывов удобно поле падающей волны моделировать полем сосредоточенного источника (центр давления, сосредоточенные моменты, силы, диполи и т. п.) Допустим, что в окрестности полости такие поля допускают разложение

$$(5.1) \quad \Phi_+ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^n J_n(\alpha r) e^{in\theta}, \quad \Psi_+ = i \sum_n b_n^n J_n(\beta r) e^{in\theta}$$

Приведем некоторые из них.

*Плоские продольные гармонические волны*

$$\begin{aligned} \Phi_+ &= \exp(i\alpha\rho \cos(\eta - \beta)) + \frac{d_1(\xi)}{\Delta(\xi)} \exp(-i\alpha\rho \cos(\eta + \delta)) \\ \Psi_+ &= \frac{d_2(\xi, \beta)}{\Delta(\xi)} \exp(-i\beta\rho \cos(\eta + \delta^*)) \\ i^n a_n^n &= (-1)^n (-i(\alpha h \cos \delta + n\delta) + \frac{d_1(\xi)}{\Delta(\xi)} \exp(i(\alpha h \cos \delta + n\delta))) \\ i^n b_n^n &= (-1)^n \frac{d_2(\xi, \alpha)}{\Delta(\xi)} \exp(i(\beta h \cos \delta^* + n\delta^*)) \end{aligned}$$

Здесь  $\delta$  — угол между волновым вектором и осью  $OX$ .

$$\xi = \alpha \sin \delta, \quad \delta^* = \arcsin(\xi/\beta), \quad \rho \cos \eta = x - h, \quad \rho \sin \eta = y$$

*Плоские поперечные волны*

$$\begin{aligned} \Phi_+ &= \frac{d_2(\xi, \beta)}{\Delta(\xi)} \exp(-i\alpha\rho \cos(\eta + \delta^*)) \\ \Psi_+ &= \exp(i\beta\rho \cos(\eta - \delta)) + \frac{d_1(\xi)}{\Delta(\xi)} \exp(-i\beta\rho \cos(\eta + \delta)) \\ i^n a_n^n &= \frac{d_2(\xi, \beta)}{\Delta(\xi)} \exp(i(\alpha h \cos \delta^* + n\delta^*)) \\ i^n b_n^n &= (-1)^n \exp(-i(\beta h \cos \delta + n\delta)) + \\ &+ \frac{d_1(\xi)}{\Delta(\xi)} \exp(i(\beta h \cos \delta + n\delta)) \\ \xi &= \beta \sin \delta, \quad \delta^* = \text{Arc sin}(\xi/\alpha) \end{aligned}$$

*Волны Релея*

$$\begin{aligned} \Phi_+ &= \exp(i\gamma y + (x - h) \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}), \\ \Psi_+ &= \frac{2i\gamma \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}{2\gamma^2 - \beta^2} \exp(i\gamma y + \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} (x - h)) \\ a_n^n &= f_n(\gamma, \alpha) \exp(-h \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}), \\ b_n^n &= \frac{2\gamma \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}{2\gamma^2 - \beta^2} f_n(\gamma, \beta) \exp(-h \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}) \\ (d_i(\xi) &= g_i(\xi, k) \sqrt{\xi^2 - k^2}, \quad i = 1, 2) \end{aligned}$$

Волны от сосредоточенного источника. Поле источника с учетом его отражения от плоской границы можно представить в виде

$$\Phi_+ = \sum_n (A_n^0 H_n^{(1)}(\alpha r_1) + A_n^1 J_n(\alpha r_1)) \exp(in\theta_1)$$

$$\Psi_+ = \sum_n (B_n^0 H_n^{(1)}(\beta r) + B_n^1 J_n(\beta r_1)) \exp(in\theta_1)$$

Здесь  $r_1, \theta_1$  (фиг. 1) — полярные координаты, связанные с источником. Коэффициенты  $A_n^1, B_n^1$  вычисляются по формулам (3.3) с заменой  $a_m^{j-1}, b_m^{j-1}$  на  $A_m^0, B_m^0$ , а  $a_n^j, b_n^j$  на  $A_n^1, B_n^1$ .

Используя теоремы сложения для бесселевых функций [1], можно перейти к форме (5.1). В результате получим

$$a_n^1 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (A_{n+p}^1 J_p(\alpha R_0) + A_{n+p}^0 H_p^{(1)}(\alpha R_0)) \exp(ip\theta_0)$$

$$b_n^1 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (B_{n+p}^1 J_p(\beta R_0) + B_{n+p}^0 H_p^{(1)}(\beta R_0)) \exp(ip\theta_0)$$

$(R_0, \theta_0)$  — полярные координаты точки  $O$  в системе  $(O_1, r_1, \theta_1)$ .

Поле отраженных волн имеет вид

$$\Phi_- = \sum_{j=2}^{\infty} \varphi_j, \quad \Psi_- = \sum_{j=2}^{\infty} \psi_j$$

Поскольку коэффициенты  $a_n^1, b_n^1$  известны, составляющие потенциалы определяются последовательно, как описано выше.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Головчан В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 254 с.
2. Бабешко В. А., Селезнев М. Г., Селезнева Т. Н., Соколов В. П. Об одном методе исследований установившихся колебаний упругого полупространства, содержащего полость. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 1, с. 115—121.
3. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л.: Гостехиздат, 1973. 998 с.
6. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск.: Наука и техника, 1968. 583 с.
7. Алексеева Л. А. О колебаниях упругой полуплоскости при действии стационарного источника цилиндрических волн. — Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем., 1983, № 5, с. 1—5.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.
9. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962, 708 с.