Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 2, 1985

УДК 539.3

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ АЛГОРИТМЕ МИНИМИЗАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ТРЕФТЦА ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Терещенко В. Я.

Задача минимизации обобщенных функционалов Трефтца трехмерной теории упругости приводится к минимаксной задаче для лагранжиана. Доказывается существование седловой точки лагранжиана. Предлагается алгоритм поиска седловой точки на координатных функциях, не подчиненных никаким ограничениям в области и на границе (в этом и заключается эффективность алгоритма). Исследуется сходимость приближенного решения.

Вариационный метод Трефтца [1] удобен для решения краевых задач математической физики в том отношении, что понижается размерность решаемой задачи за счет сведения ее к решению уравнений, определенных на границе области. В то же время при построении решения, например при помощи процесса Ритца, координатные функции должны быть выбраны так, чтобы они удовлетворяли в области дифференциальному уравнению краевой задачи, что является существенным ограничением. Ниже предлагается подход, использующий множители Лагранжа для снятия указанного ограничения при минимизации обобщенных функционалов Трефтца основных граничных задач линейной теории упругости. Полученные результаты могут быть применены также при минимизации классических функционалов Трефтца краевых задач математической физики [1].

В [2, 3] были построены обобщенные функционалы Трефтца для основных задач линейной теории упругости с непрерывными и разрывными коэффициентами упругости. Функционалы минимизируются на решениях (обычных или обобщенных) линейного уравнения равновесия упругой среды в перемещениях. В [4] в предположении существования координатной системы функций, удовлетворяющих уравнению равновесия (в обобщенном смысле) исследован процесс Ритца для решения задачи минимизации обобщенных функционалов Трефтца на примере второй граничной задачи трехмерной теории упругости. Практическое построение указанной выше координатной системы — достаточно сложная задача. В то же время дифференциальное уравнение краевой задачи, на решениях которого разыскивается минимум функционалов, можно рассматривать как линейное ограничение задачи минимизации функционалов Трефтца. Тогда такая задача минимизации с линейными ограничениями может быть сведена (с использованием теории двойственности) к задаче на минимакс некоторого лагранжиана.

1. Далее используются обозначения работ [2, 3]. Пусть $\Phi(u)$ — обобщенный функционал Трефтца одной из основных граничных задач линейной теории упругости с областью определения

$$D_1(\Phi) = \{u \in W_2^2(G) \mid Au \in L_2(G),\ Au = K\}$$

которая может быть расширена следующим образом:

$$D_2(\Phi) = \Big\{u \in W_2^1(G) \,\Big|\, 2\int_G W(u, v)\, dG - \int_S t(u)\, v\, ds = \int_G Kv\, dG, \quad \forall v \in W_2^1(G)\Big\}$$

Здесь $u \in D_2(\Phi)$ — обобщенное решение уравнения равновесия $Au = K$ в области упругой среды $G \subset E_3$ с границей S.

Очевидно, что, если $u \in D_1(\Phi)$, то также $u \in D_2(\Phi)$, т. е. $D_1(\Phi) \subset D_2(\Phi)$; здесь и далее u, v — векторные функции, K — заданный вектор массовых сил, $W_2^1(G)$, $W_2^2(G)$ — общепринятые обозначения соболевских классов функций, $L_2(G)$ — гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом в G.

Известно [1, 3], что минимум функционалов Трефтца достигается на энергетическом решении u_0 краевой задачи и этот минимум равен $\Phi(u_0) = |u_0|^2$, где $|\cdot|$ — энергетическая норма (т. е. u_0 — элемент, реализующий минимум функционала энергии краевой задачи [1]).

Линейное ограничение $Au = K$ задачи нахождения $\inf \Phi(u)$ при $u \in D_1(\Phi)$ может быть снято при помощи метода множителей Лагранжа [5, 6]. Определим множество таких векторов $\lambda \in L_2(G)$, что

$$\sup_{\lambda \in L_2(G)} \int_G \lambda(Au - K)\, dG = \begin{cases} 0, & u \in D_1(\Phi) \\ +\infty, & u \,\overline{\in}\, D_1(\Phi) \end{cases}$$

Тогда задача определения $\inf \Phi(u)$ при $u \in D_1(\Phi)$ приводится к эквивалентной задаче (см. п. 2) определения

$$\inf_{u \in W_2^2(G)} \sup_{\lambda \in L_2(G)} \left[\Phi(u) - 2\int_G \lambda(Au - K)\, dG\right] \tag{1.1}$$

которая в дальнейшем именуется прямой. Таким образом определена функция (лагранжиан)

$$L(u, \lambda) = \Phi(u) - 2\int_G \lambda(Au - K)\, dG\colon\ W_2^2(G) \times L_2(G) \to R$$

Задача нахождения

$$\sup_{\lambda \in L_2(G)} \inf_{u \in W_2^2(G)} L(u, \lambda) \tag{1.2}$$

является двойственной к задаче (1.1). Ниже (п. 2) доказывается существование седловой точки $\{u_0, \lambda_0\} \in W_2^2(G) \times L_2(G)$ лагранжиана $L(u, \lambda)$, один из аргументов которой — элемент u_0.

Из вариационных уравнений, выражающих собой необходимость и достаточность условий обращения в нуль в седловой точке $\{u_0, \lambda_0\}$ двух частных производных функции $L(u, \lambda)$, получим

$$2\Phi(u_0, v) - 2\int_G \lambda_0 Av\, dG = 0, \quad \forall v \in W_2^2(G) \tag{1.3}$$

$$\int_G \lambda(Au_0 - K)\, dG = 0, \quad \forall \lambda \in L_2(G) \tag{1.4}$$

Из уравнения (1.3) можно получить интерпретацию множителя Лагранжа λ_0. Для этого используем выражения билинейных функционалов $\Phi_i(u, v)$ соответствующих основных граничных задач [3]: первой ($i = 1$), второй ($i = 2$) и третьей ($i = 3$)

$$\Phi_1(u, v) = I(u, v) + 2(u, v)_{1/2,\, S}$$

$$\Phi_2(u, v) = I(u, v) + \frac{1}{\alpha}(\bar{U}, t(u))_{0,\, S}(\bar{U}, t(v))_{0,\, S} -$$
$$-(u, t(v))_{0,\, S} - (v, t(u))_{0,\, S}$$

$$\Phi_3(u, v) = I(u, v) + \frac{1}{\alpha}(\bar{U}, t(u))_{0,\, S_2}(\bar{U}, t(v))_{0,\, S_2} -$$
$$-(u, t(v))_{0,\, S_2} - (v, t(u))_{0,\, S_2} - \alpha(u, v)_{1/2,\, S_1}$$

Здесь [3]

$$I(u, v) = 2\int_G W(u, v)\, dG$$

$W(u)$ — положительно-определенная квадратичная форма в линейной теории упругости [1], $(\ ,)_{0,S}$, $(\ ,)_{1/2,S}$ — скалярные произведения в гильбертовых пространствах $L_2(S)$, $W_2^{1/2}(S)$ ($W_2^{1/2}(S)$ — пространство следов на S Соболева — Слободецкого), $\bar{U}$ — некоторый фиксированный вектор перемещений, $t(u)$ — вектор поверхностных напряжений, связанный с вектором перемещений u, α — некоторая положительная постоянная. При выполнении граничных условий основных задач: $u_0|_S = 0$ — для первой, $t(u_0)|_S = 0$ — для второй, $S = S_1 U S_2$, $u_0|_{S_1} = 0$, $t(u_0)|_{S_2} = 0$ — для третьей, используя формулу Бетти [1]

$$2\int_G W(u,v)\,dG - \int_S ut(v)\,ds = \int_G uAv\,dG$$

получим для всех основных задач равенство

$$\Phi_i(u_0, v) = \int_G u_0 Av\,dG \quad (i = 1, 2, 3), \quad \forall v \in W_2^2(G)$$

Тогда из (1.3) следует

$$\int_G u_0 Av\,dG = \int_G \lambda_0 Av\,dG, \quad \forall v \in W_2^2(G)$$

Отсюда вытекает, что множитель Лагранжа λ_0 имеет смысл вектора упругих перемещений u_0.

2. Седловая точка $\{u_0, \lambda_0\}$ лагранжиана $L(u, \lambda)$ определяется условием [5]

$$L(u_0, \lambda) \leqslant L(u_0, \lambda_0) \leqslant L(u, \lambda_0), \ \forall u \in W_2^2(G), \ \lambda \in L_2(G).$$

Функция $L(u, \lambda)$, определенная на $W_2^2(G) \times L_2(G)$ и принимающая конечные значения, имеет седловую точку $\{u_0, \lambda_0\}$ на $W_2^2(G) \times L_2(G)$ тогда и только тогда, когда ([5], с. 172)

$$L(u_0, \lambda_0) = \inf_{u \in W_2^2(G)} \sup_{\lambda \in L_2(G)} L(u, \lambda) = \sup_{\lambda \in L_2(G)} \inf_{u \in W_2^2(G)} L(u, \lambda) \tag{2.1}$$

Докажем это соотношение. Из $L(u, \lambda) = \Phi(u) - 2\int_G \lambda(Au - K)\,dG$ при $u = u_0$ и $\forall\lambda$ следует $L(u_0, \lambda_0) = \Phi(u_0) = |u_0|^2$.

Непосредственной проверкой устанавливаем, что

$$\inf_{u \in W_2^2(G)} \sup_{\lambda \in L_2(G)} L(u, \lambda) = |u_0|^2$$

Действительно

$$\sup_{\lambda \in L_2(G)} \left[\Phi(u) - 2\int_G \lambda(Au - K)\,dG\right] = \begin{cases} +\infty, & u \overline{\in} D_1(\Phi) \\ \Phi(u), & u \in D_1(\Phi) \end{cases}$$

Следовательно, получаем требуемое

$$\inf_{u \in W_2^2(G)} \sup_{\lambda \in L_2(G)} L(u, \lambda) = \inf_{u \in W_2^2(G)} \begin{Bmatrix} +\infty, & u \overline{\in} D_1(\Phi) \\ \Phi(u), & u \in D_1(\Phi) \end{Bmatrix} = \inf_{u \in D_1(\Phi)} \Phi(u) = \Phi(u_0) = |u_0|^2.$$

Докажем, также что

$$\sup_{\lambda \in L_2(G)} \inf_{u \in W_2^2(G)} L(u, \lambda) = |u_0|^2$$

При некотором фиксированном $\lambda \in L_2(G)$ решение u_λ задачи определения $\inf L(u, \lambda)$ при $u \in W_2^2(G)$ есть решение уравнения $\mathrm{grad}_u L(u_\lambda, \lambda) = 0$ (см. (1.3)), т. е.

$$2\Phi(u_\lambda, v) - 2\int_G \lambda Av\,dG = 0, \quad \forall v \in W_2^2(G) \tag{2.2}$$

Отсюда при $v = u_\lambda$ следует

$$\Phi(u_\lambda) = \int_G \lambda A u_\lambda dG, \quad \forall \lambda \in L_2(G)$$

Вычислим нижнюю грань $L(u, \lambda)$ (при фиксированном λ)

$$L(u_\lambda, \lambda) = \Phi(u_\lambda) - 2\int_G \lambda(Au_\lambda - K)\,dG = \int_G \lambda A u_\lambda dG -$$
$$- 2\int_G \lambda(Au_\lambda - K)\,dG = -\int_G \lambda A u_\lambda dG + 2\int_G \lambda K dG$$

Тогда двойственная задача (1.2) сводится к задаче минимизации

$$\sup_{\lambda \in L_2(G)} L(u_\lambda, \lambda) = \sup_{\lambda \in L_2(G)} \left(-\int_G \lambda A u_\lambda dG + 2\int_G \lambda K dG\right) =$$
$$= -\inf_{\lambda \in L_2(G)} \left(\int_G \lambda A u_\lambda dG - 2\int_G \lambda K dG\right) \tag{2.3}$$

где u_λ определяется из уравнения (2.2).

Если $u_\lambda = u_0$ и $\lambda = \lambda_0 = u_0$ (см. п. 1), то выражение

$$\int_G u_0 A u_0 dG - 2\int_G u_0 K dG = -\int_G u_0 A u_0 dG = -|u_0|^2$$

есть функционал энергии ([1], с. 90), определенный на векторе упругих перемещений. Следовательно, из (2.3) получаем также, что

$$\sup_\lambda \inf_u L(u, \lambda) = |u_0|^2$$

(см. также [6], с. 37, 42). Таким образом, соотношение (2.1) доказано.

Из уравнения (1.4) следует, что аргумент u_0 седловой точки (элемент, минимизирующий обобщенный функционал Трефтца $\Phi(u)$) удовлетворяет ограничению задачи $Au_0 = K$. Можно проверить, что функция u_λ — решение уравнения (2.2) при каждом фиксированном λ — также удовлетворяет ограничению $Au_\lambda = K$. Действительно (см. (1.4))

$$\operatorname{grad}_\lambda L(u_\lambda, \lambda) = -2\int_G A u_\lambda \mu dG + 2\int_G K\mu dG = 0, \quad \forall \mu \in L_2 \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что $Au_\lambda = K$.

Примечание. Так как в силу доказанного в (2.1) нижняя (верхняя) грань достигается, то в (2.1) можно заменить inf (sup) на min (max).

Таким образом, задача нахождения минимума обобщенных функционалов Трефтца на решениях уравнения равновесия упругой среды приводится к решению эквивалентной задачи, вытекающей из двойственной постановки задачи на максимин лагранжиана. Эквивалентная задача сводится к решению вариационных уравнений (2.2), (2.4). Эффективность изложенного подхода с точки зрения решения граничных задач заключается в том, что при построении решений уравнений (2.2), (2.4) на базисные функции не накладываются ограничения в смысле удовлетворения граничным условиям (которые выполняются автоматически при минимизации функционалов Трефтца [1]) и уравнению равновесия в области.

3. Изложим возможный алгоритм поиска седловой точки лагранжиана $L(u, \lambda)$. Алгоритм основан на использовании уравнений (2.2), (2.4).

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{i=\infty}$ — система достаточно гладких функций (очевидно, для справедливости приведенных выше построений, достаточно чтобы функции φ_i принадлежали классу $W_2^2(G)$). В дальнейшем для сходимости приближенного решения потребуется полнота системы $\{\varphi_i\}$ лишь в $L_2(G)$ (т. е. в смысле сходимости в среднем). Кроме сказанного, на функции φ_i не накладываются какие-либо ограничения в области G или на границе S.

Образуем две последовательности из линейных комбинаций линейно-независимых функций φ_i

$$u_k=\sum_{i=1}^{k} a_i\varphi_i,\quad \lambda_n=\sum_{j=1}^{n} b_j\varphi_j \tag{3.1}$$

(в частности, может быть $k=n$), где a_i, b_j — постоянные, которые подлежат определению.

Очевидно, уравнение (2.2) выполняется также для всех функций $v_k\in\in W_2^2(G)$ вида

$$v_k=\sum_{m=1}^{k}\alpha_m\varphi_m$$

где α_m произвольны, тогда имеет место соотношение

$$\Phi(u_\lambda,\varphi_m)-\int_G\lambda A\varphi_m dG=0,\quad \forall\varphi_m,\quad m=1,2,\ldots,k \tag{3.2}$$

Для каждого фиксированного $\lambda=\lambda_n$ приближенное решение вида u_k уравнения (3.2) запишется в виде

$$u_{\lambda_n}\equiv u_k(\lambda_n)=\sum_{i=1}^{k} a_{in}\varphi_i=\sum_{i=1}^{k} a_i\Big(\sum_{j=1}^{n} b_jc_{jm}\Big)\varphi_i$$

где зависимость (c_{jm} — некоторые числа, см. ниже)

$$a_i\to\sum_{j=1}^{n} b_jc_{jm}\quad (i=1,2,\ldots,k)$$

определяется из системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\Phi(\varphi_i,\varphi_m)-\sum_{j=1}^{n} b_j\int_G\varphi_jA\varphi_m dG=0,\quad m=1,2,\ldots,k \tag{3.3}$$

Аналогично, уравнение (2.4) выполняется также для всех функций $\mu_n\in L_2(G)$ вида

$$\mu_n=\sum_{l=1}^{n}\beta_l\varphi_l$$

где β_l произвольны, тогда имеем

$$\int_G Au_\lambda\varphi_l dG-\int_G K\varphi_l dG=0,\quad \forall\varphi_l,\quad l=1,2,\ldots,n \tag{3.4}$$

Для приближений

$$u_{\lambda_n}=\sum_{i=1}^{k} a_i\Big(\sum_{j=1}^{n} b_jc_{jm}\Big)\varphi_i$$

из (3.4) получим систему линейных уравнений для определения b_j

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\Big(\sum_{j=1}^{n} b_jc_{jm}\Big)\int_G A\varphi_i\varphi_l dG-\int_G K\varphi_l dG=0,\quad l=1,2,\ldots,n \tag{3.5}$$

Итак, совместно (3.3) и (3.5) составляют систему линейных уравнений для определения постоянных a_i и b_j в разложениях (3.1), определяющих приближенное значение седловой точки лагранжиана $L(u,\lambda)$.

При этом матрица $\Phi(\varphi_i, \varphi_m)$ системы (3.3) для определения зависимости

$$a_i \to \sum_{j=1}^{n} b_j c_{jm} \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

симметрична и положительно определена в силу оценки (см. [3])

$$\Phi(u_\lambda) \geqslant c \| u_\lambda \|^2_{W_2^1(G)}, \quad c > 0 \tag{3.6}$$

(очевидно, указанная зависимость будет линейной). Система уравнений (3.5) также однозначно разрешима в силу положительной определенности оператора A, вытекающей из равенства (см. (2.2) при $v = u_\lambda$)

$$\int_G \lambda A u_\lambda dG = \Phi(u_\lambda)$$

и оценки (3.6).

Пусть приближенное решение (3.1) определяется одним приближением $\{u_i, \lambda_j\}$, тогда из (3.3) и (3.5) получим значения постоянных

$$a_i = b_j \frac{\int_G \varphi_j A \varphi_m dG}{\Phi(\varphi_i, \varphi_m)} = b_j c_{jm}, \quad b_j = \frac{\int_G K\varphi_l dG \cdot \Phi(\varphi_i, \varphi_m)}{\int_G A\varphi_i \varphi_l dG \cdot \int_G A\varphi_m \varphi_j dG}$$

Отсюда видно, что постоянные

$$a_i = \int_G K\varphi_l dG \cdot \left(\int_G A\varphi_i \varphi_l dG \right)^{-1}$$

по виду идентичны коэффициентам в приближенном решении «по Ритцу» задачи минимизации функционала энергии граничных задач теории упругости [1]. Если в качестве системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^{i=\infty}$ взять систему координатных функций, ортонормированную «по энергии» второй граничной задачи теории упругости [1] (в этом случае функции φ_i также не подчиняются никаким ограничениям на S), то будет иметь место соотношение

$$\int_G A\varphi_i \varphi_l dG = \begin{cases} 1, & i = l \\ 0, & i \neq l \end{cases}$$

и алгоритм нахождения постоянных a_i, b_j значительно упрощается.

4. Займемся обоснованием предложенного алгоритма приближенного нахождения седловой точки лагранжиана $L(u, \lambda)$. Для этого нужно показать, что $\{u_k, \lambda_n\} \to \{u_0, \lambda_0\}$ при $k, n \to \infty$. Так как в седловой точке $\{u_0, \lambda_0\}$ имеем $\operatorname{grad}_u L(u_0, \lambda_0) = 0$, то из (1.3) при $v = u - u_0$ (и при $v = u - u_k$ получим соответственно два равенства)

$$\Phi(u_0, u - u_0) = \int_G \lambda_0 A(u - u_0) dG, \quad \forall u \in W_2^2(G)$$

$$\Phi(u_k, u - u_k) = \int_G \lambda_n A(u - u_k) dG, \quad \forall u \in W_2^2(G)$$

Из первого равенства при $u = u_k$ и из второго при $u = u_0$, вычитая эти равенства, получим

$$\Phi(u_0 - u_k, u_0 - u_k) = \int_G (\lambda_0 - \lambda_n) A(u_0 - u_k) dG$$

Используя для левой части этого равенства оценку (3.6) и применяя для правой части неравенство Коши, получим

$$c \| u_0 - u_k \|^2_{W_2^1(G)} \leqslant \| \lambda_0 - \lambda_n \|_{L_2(G)} \| A(u_0 - u_k) \|_{L_2(G)} \leqslant$$
$$\leqslant \| \lambda_0 - \lambda_n \|_{L_2(G)} c_1 \| u_0 - u_k \|_{L_2(G)} \leqslant \| \lambda_0 - \lambda_n \|_{L_2(G)} \times$$
$$\times c_1 c_2 \| u_0 - u_k \|_{W_2^1(G)}, \quad (c_1 = \| A \|_{L_2(G)}, \; c_2 > 0)$$

Здесь использована оценка из теоремы вложения $W_2^1(G) \subset L_2(G)$. В итоге имеет место неравенство

$$\| u_0 - u_k \|_{W_2^1(G)} \leqslant \frac{c_1 c_2}{c} \| \lambda_0 - \lambda_n \|_{L_2(G)}$$

из которого следует, что если выполняется условие $\| \lambda_0 - \lambda_n \|_{L_2(G)} \to 0$ при $n \to \infty$, то имеет место также сходимость $\| u_0 - u_k \|_{W_2^1(G)} \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, обоснование алгоритма сводится к доказательству того, что последовательность приближений $\{\lambda_n\}$ минимизирует функционал $F(\lambda)$, для которого (2.4) — уравнение Эйлера — Лагранжа (в силу [1], с. 367 последовательность $\{b_j \varphi_j\}_{j=1}^{j=\infty}$ полна в $L_2(G)$, так как предполагается полнота $\{\varphi_j\}$ в $L_2(G)$).

Для $u_\lambda \equiv u(\lambda)$ функционал

$$F(\lambda) = \int_G \lambda A u_\lambda dG - 2 \int_G \lambda K dG, \quad K \in L_2(G)$$

есть квадратичный функционал вектора λ с положительно-определенной квадратичной формой

$$\int_G \lambda A u_\lambda dG$$

(в силу равенства $\int_G \lambda A u_\lambda dG = \Phi(u_\lambda)$ и оценки (3.6)), которая при описанной выше дискретизации

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \varphi_j$$

есть квадратичная форма коэффициентов b_j. Тогда последовательность приближений $\{\lambda_n\}$, в которой коэффициенты b_j — решение системы линейных уравнений, полученной из условия

$$dF(\lambda_n)/db_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

является минимизирующей для функционала $F(\lambda)$, т. е. $\lim F(\lambda_n) = F(\lambda_0)$ при $n \to \infty$ ([1], с. 98). Следовательно, последовательность $\{\lambda_n\}$ сходится так, что $\| \lambda_0 - \lambda_n \|_{L_2(G)} \to 0$ при $n \to \infty$, а значит, и $\| u_0 - u_k \|_{W_2^1(G)} \to 0$ при $k \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
2. *Терещенко В. Я.* О выпуклых функционалах в вариационных задачах теории упругости, аналогичных обобщенным функционалам Трефтца.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 185—188.
3. *Терещенко В. Я.* Обобщение метода Трефтца для пространственных задач теории упругости.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 4, с. 996—1005.
4. *Терещенко В. Я.* О процессе Ритца при построении приближенных решений задач теории упругости обобщенным методом Трефтца.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 4, с. 1063—1066.
5. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
6. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
22.III.1984