

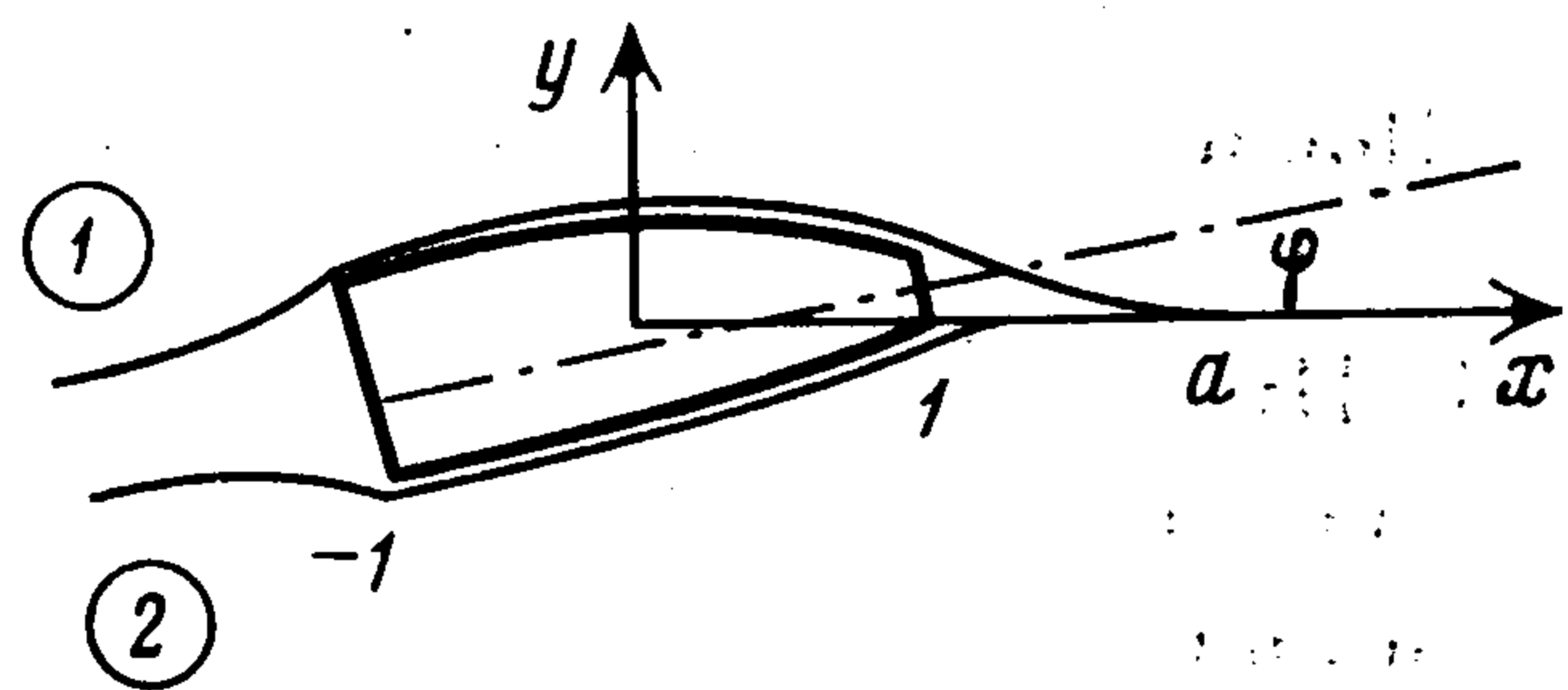
УДК 539.375

О ХРУПКОМ РАСКЛИНИВАНИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Симонов И. В.

Изучается стационарное дорелеевское движение жесткого тела по прямой линии соединения двух упругих полуплоскостей с образованием трещины и каверны. Учет контакта берегов в малой зоне края трещины и за каверной на большом расстоянии от клина проводится методом сращиваемых асимптотических разложений. Отношения характерных длин, как выяснилось, являются соответственно весьма малым и весьма большим параметром, если скорость клина не расположена близко к релеевской скорости, что обуславливает целесообразность такого подхода.

1. Абсолютно жесткий затупленный клин толщины $h(x)$, $|x| \leq 1$ без трения движется с постоянной скоростью c вдоль границы раздела $y = 0$, $|x| < \infty$ двух упругих сред, занимающих полуплоскость $y > 0$ (среда 1) и $y < 0$ (среда 2) (фиг. 1). Впереди клина сформировалась трещина длины $a - 1$, при $-\infty < x < -1$ — каверна. Берега трещины и каверны не взаимодействуют и свободны от усилий (априорное предположение). Щеки клина полностью соприкасаются со средой. При $x > a$, $y = 0$ выполняются условия полного контакта.



Фиг. 1

Требуется определить установившиеся поля напряжений $\sigma_{km}^j(x, y)$ и смещений $U_m^j(x, y)$ по следующим граничным условиям ($y = 0$):

$$(1.1) \quad \begin{aligned} U_{2,x}^j &= h_j'(x) + \varphi, \quad \sigma_{12}^j = 0, \quad \sigma_{22}^j \leq 0, \quad |x| < 1 \\ \sigma_{k2}^j &= 0, \quad [U_2] \geq 0, \quad 1 < x < a \cup x < -1, \quad [\sigma_{k2}] = [U_k] = 0, \\ &x > a \\ [U_2(1)] &= h(1), \quad \int_{-1}^1 [\sigma_{22}] \left\| \frac{1}{x} \right\| dx = 0 \quad (k, m, j = 1, 2) \end{aligned}$$

Здесь $h_j = h_j(x)$ — уравнения поверхностей клина относительно некоторой его оси, $h_j(x)$ — непрерывные по Гельдеру функции, $h = h_1 - h_2$, $h(1) \ll a - 1$, $|h_j'(x)| \ll 1$, $|x| < 1$, φ — угол поворота оси клина; индекс j фиксирует среду; квадратные скобки означают скачок величины при переходе из среды 1 в среду 2; штрихом отметим обыкновенное дифференцирование; система координат — движущаяся.

В динамической линейной теории упругости (плоская задача, установившийся дозвуковой режим) напряжения и производные от смещений удобно выразить через аналитические функции $\chi_m^j(z_{kj})$ комплексного переменного $z_{kj} = x + i\beta_{kj}y$ посредством формул [1] (представления, близкие к представлениям [2]). На границе раздела $z_{mj} = x$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} U_{1,x}^j &= -\operatorname{Re}(b_{2j}\chi_1^j + a_j\chi_2^j), \quad U_{2,x}^j = \operatorname{Im}(a_j\chi_1^j + b_{1j}\chi_2^j) \\ \sigma_{12}^j &= \operatorname{Im}\chi_1^j, \quad \sigma_{22}^j = \operatorname{Re}\chi_2^j, \quad \beta_{mj} = \sqrt{1 - c^2/c_{mj}^2}, \quad 2\beta_j = 1 + \beta_{2j}^2 \\ 2\mu_j R_j(a_j, b_{mj}) &= (\beta_{1j}\beta_{2j} - \beta_j, \beta_{mj}(1 - \beta_j)), \quad R_j = \beta_{1j}\beta_{2j} - \beta_j^2 \end{aligned}$$

где μ_j — модули сдвига, c_{1j} и c_{2j} — скорости волн расширения и сдвига, $R_j(c)$ — функция Релея (c_{Rj} — единственные положительные корни уравнений Релея $R_j(c) = 0$ являются скоростями собственных поверхностных волн, $c_R = \min(c_{R1}, c_{R2})$).

Решение ищем в энергетическом классе функций с конечными всюду смещениями. Тогда для функций $\chi_m^j(z)$ имеют место следующие оценки поведения в особых точках ($z = x + iy$ — вспомогательная переменная):

$$(1.3) \quad |\chi_m^j| < \frac{\text{const}}{|z - z_k|^{1/2}}, \quad z \rightarrow z_k, \quad |\chi_m^j| < \frac{\text{const}}{|z|^{1+\varepsilon}}, \quad z \rightarrow \infty$$

$$z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = a, \varepsilon > 0 \quad (k = 1, 2, 3; m, j = 1, 2)$$

Предварительно рассмотрим вспомогательную задачу для функций $\chi^j(z)$, снимающую неоднородность в первом из условий (1.1)

$$b_{1j} \text{Im } \chi^j(x) = h_j'(x) + \varphi, \quad |x| < 1, \quad \text{Re } \chi^j(x) = 0, \quad |x| > 1$$

Единственное решение этой частной задачи Келдыша — Седова при учете (1.3) примет вид [3]

$$(1.4) \quad b_{1j} \chi^j = i\varphi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right) + \frac{i}{\pi \sqrt{z^2 - 1}} \int_{-1}^1 \frac{h_j'(t) \sqrt{1 - t^2} dt}{t - z}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} \sqrt{z^2 - 1} = 1$$

После снятия напряженного состояния, даваемого решением вида $\chi_1^j = 0$, $\chi_2^j = \chi^j$, условие $[\text{Im } \chi_1] = 0$ при $|x| < \infty$ и условия $\text{Im } \chi_2^j = 0$, $[\text{Re } \chi_2] = 0$ на дополняющих один другие до почти полной вещественной оси интервалах (не меняем обозначения функций) при учете (1.3) позволяют заключить, что [4]

$$(1.5) \quad \chi_1^1(z) = -\overline{\chi_1^2(\bar{z})} \equiv \chi_1(z), \quad \chi_2^1(z) = \overline{\chi_2^2(\bar{z})} \equiv \chi_2(z), \quad y > 0$$

Черта означает комплексное сопряжение.

Условия $[\text{Im } \chi_1] = 0, \dots$ непосредственно вытекают из (1.5), если, кроме того, функция $\chi_2^2(z)$ — аналитическое продолжение функции $\chi_2^1(z)$ через отрезок $|x| \leq 1, y = 0$. Обратное можно показать записывая предварительно решения из класса (1.3) следующих вспомогательных краевых задач для функций $\chi_1^j(z)$ ($y = 0$):

$$\text{Im } \chi_1^j = r(x), \quad |x| < \infty$$

для функций $\chi_2^j(z)$:

$$\text{Im } \chi_2^j = 0, \quad |x| < 1, \quad \text{Re } \chi_2^j = s(x), \quad |x| > 1$$

где $r(x)$ и $s(x)$ — некоторые действительные функции, удовлетворяющие условию Гельдера.

Соотношения (1.5) сокращают число неизвестных функций до двух. Из (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) получается основная задача — задача Римана — Гильберта [5]: найти голоморфную в верхней полуплоскости z вектор-функцию $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ из класса (1.3), удовлетворяющую на границе $y = 0$ условиям

$$(1.6) \quad \text{Im } (H\chi) = (f(x), 0), \quad x > a, \quad \text{Im } \chi_1 = \text{Im } \chi_2 = 0, \quad |x| < 1$$

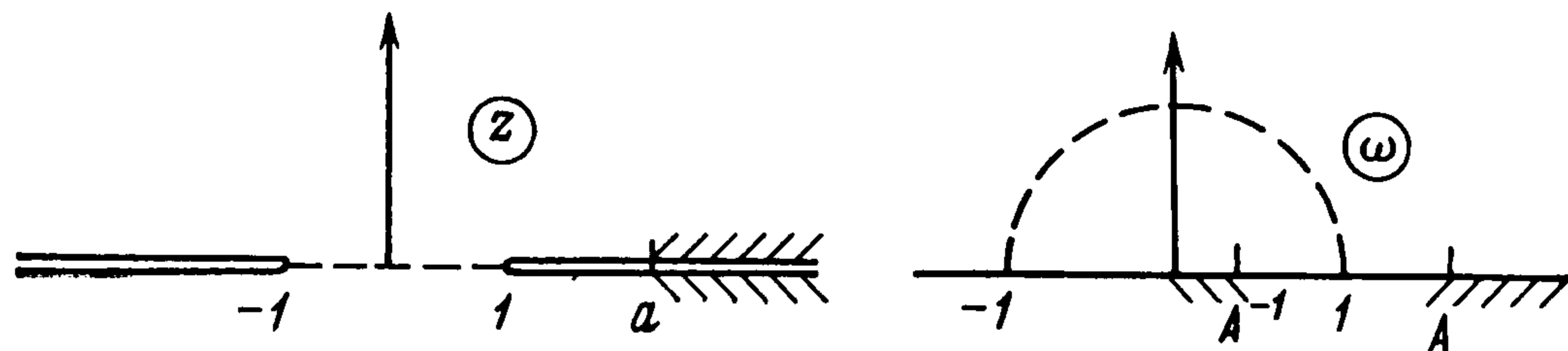
$$\text{Im } \chi_1 = \text{Re } \chi_2 = 0, \quad (x < -1) \cup (1 < x < a)$$

$$H = \begin{vmatrix} d & p \\ iq & id \end{vmatrix}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{x^2-1}} \frac{h'(t) dt}{x-t}$$

$$d = a_1 - a_2 < 0, \quad p = b_{11} + b_{12}, \quad q = b_{21} + b_{22}$$

Дополнительные условия в форме неравенств из (1.1) подлежат проверке на суперпозиции решений (1.4), (1.6). Задача (1.3), (1.6) содержит три типа краевых условий и четыре особые точки. Общий метод построения замкнутого решения связанной задачи Римана — Гильберта для векторных функций с числом типов краевых условий больше двух не известен. Предложен [4] метод решения (в интегралах типа Коши), распространяющийся на случаи, когда краевые условия задачи приводятся к виду (1.6), причем первое и третье условия (1.6) могут чередоваться на произвольной системе отрезков, «разбавленной» любым способом отрезком, на котором выполняется второе условие (1.6).

Следуя [4], совершим такую последовательность действий. Продолжим аналитически вектор $\chi(z)$ через отрезок $|x| \leq 1$. Преобразуем конформно плоскость z с разрезами $|x| \geq 1, y = 0$ в верхнюю полуплоскость $\omega = \xi + i\eta = z + \sqrt{z^2 - 1}$ ($2z = \omega + \omega^{-1}$): полуплоскость $\text{Im } z > 0$ переходит во внешность, а полуплоскость $\text{Im } z < 0$ — во внутренность полуокружности $|\omega| = 1, \text{Im } \omega > 0$ (фиг. 2). Продолжим вектор $\chi(\omega)$



Фиг. 2

(без переобозначения) через действительную ось по правилу $\chi_k(\omega) = (-1)^{k+1} \overline{\chi_k(\bar{\omega})}$ и проведем диагонализацию матрицы-коэффициента получившейся при этом задачи сопряжения. В результате линейной подстановки

$$(1.7) \quad \chi_1 = W_1 + W_2, \quad \chi_2 = s(W_1 - W_2) \quad (s = \sqrt{q/p})$$

придем к такой задаче сопряжения для вектор-функции $W = (W_1, W_2)$ (индексом плюс (минус) отметим сужение на ось $x=0$ сверху (снизу)):

$$(1.8) \quad W^+ = \Lambda W^- + 2iW^\circ(\xi), \quad \xi \in L_1, \quad W^+ = W^-, \quad \xi \in L_2$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad W^\circ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (d + \sqrt{pq})^{-1} \\ (d - \sqrt{pq})^{-1} \end{pmatrix} g(\xi), \quad \lambda = \frac{\sqrt{pq} - d}{\sqrt{pq} + d} > 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2^{-1} = -\lambda, \quad g = f[x(\xi)], \quad \xi > A, \quad g(\xi) = -g(1/\xi), \quad 0 < \xi < A^{-1}$$

$$A = a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad L_1 = \{\xi: 0 < \xi < A^{-1} \cup \xi > A\}$$

$$L_2 = \{\xi: \xi < 0 \cup A^{-1} < \xi < A\}$$

Дополнительные условия задачи включают в себя условия продолжения

$$(1.9) \quad W_k(\omega) = \overline{W_k(1/\bar{\omega})}, \quad W_k(\omega) = \overline{W(\bar{\omega})} \quad (k, m = 1, 2; m \neq k)$$

и оценки, вытекающие из (1.3).

Обобщенная задача сопряжения (1.7)—(1.9) эквивалентна задаче (1.3), (1.6) — все матрицы не вырождены при $0 \leq c < c_R$. Отличительной особенностью задачи (1.8), (1.9) от обычной задачи Гильберта [5], получаемой из задачи Римана — Гильберта, является наличие еще одного дополнительного условия в (1.9), а именно условия инверсии $W_k(\omega)$. Оно

заменяет собой второе краевое условие в (1.6). Таким образом, смысл указанных выше преобразований заключается в исключении одного типа краевых условий из числа основных условий и переводе его в дополнительные. Существенно, что коэффициенты задачи для функции $\chi(\omega)$ на системе отрезков при $|\xi| > 1$ равны соответственно коэффициентам на симметричной относительно окружности $|\omega| = 1$ системе отрезков при $|\xi| < 1$; это обеспечено частным видом матрицы $H = \{h_{km}\}$

$$h_{1m} = \operatorname{Re} h_{1m}, \quad h_{2m} = i \operatorname{Im} h_{2m} \quad (k, m = 1, 2)$$

При этом функции $W_k(\omega)$ имеют простые полюса в точках $\omega = \pm 1$, тогда как $\gamma_k(z)$ при $z = \pm 1$ имели своими показателями числа $(0, -1/2)$, т. е. неустранимые особенности в этих точках перешли в устранимые. В результате задача расщепилась (матрица Λ — диагональна). Для каждой из компонент вектора W решение строится способом, несколько отличным от традиционного [6]: вспомогательные функции выбираем такими, чтобы можно было в наиболее простой форме реализовать условия (1.9), хотя идейная сторона (факторизация) осталась прежней. При этом используется принцип некоторой свободы выбора частного решения неоднородной задачи. Ограничения (1.9) накладывают дополнительные связи на свободные коэффициенты решения однородной задачи, соответствующей (1.8). В результате остается одна независимая действительная постоянная, что согласуется с общей теоремой [5] о числе этих постоянных в исходной задаче (1.3), (1.7).

Общее решение (1.3), (1.7)–(1.9) дается формулами

$$(1.10) \quad W_k(\omega) = \Pi_k(\omega) \{F(\omega) I_k(\omega) - i(-1)^k C_0 G(\omega)\}$$

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \frac{[(A - \omega)/(A - \omega^{-1})]^{i\alpha_k}}{(A + A^{-1} - \omega - \omega^{-1})^{1/2}}, \quad F = \frac{\omega}{\omega + 1} = (\omega - 1)G, \quad \alpha_k = \frac{\ln |\lambda_k|}{2\pi} \\ &- \pi \leq \arg(A - \omega^{\pm 1}) \leq \pi, \quad I_k = \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{W_k^\circ(\xi) d\xi}{F(\xi) \Pi_k^+(\xi) (\xi - \omega)} \end{aligned}$$

Вспомогательные функции $\Pi_k(\omega)$ служат целям факторизации

$$\Pi_k^+(\xi)/\Pi_k^-(\xi) = \lambda_k, \quad \xi \in L_1, \quad \Pi_k^+(\xi)/\Pi_k^-(\xi) = 1, \quad \xi \in L_2$$

и, кроме того, обладают свойствами (здесь же приведем свойства функций $W_k^\circ(\xi)$)

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \Pi_k(\omega) &= \Pi_k(1/\bar{\omega}), \quad \Pi_k(\omega) = \overline{\Pi_m(\bar{\omega})} \\ W_k^\circ(\xi) &= -W_k^\circ(1/\bar{\xi}), \quad \lambda_m W_k^\circ(\xi) = W_m^\circ(\xi) \quad (k, m = 1, 2; \\ &m \neq k) \end{aligned}$$

Вспомогательные функции F и G обеспечивают наличие полюсов у функций $W_k(\omega)$ в точках $\omega = \pm 1$ и существование интегралов $I_k(\omega)$, а также, совместно с функциями $\Pi_k(\omega)$, — выполнение условий (1.9) и оценок (1.3). Для реализации (1.9) они должны подчиняться следующему функциональному уравнению и условию:

$$\frac{F(\omega)}{\omega F(1/\bar{\omega})} = \frac{F(\xi)}{\xi F(1/\bar{\xi})} = \frac{\xi F(1/\bar{\xi})}{F(\xi)}, \quad G(\omega) = -\overline{G(1/\bar{\omega})}$$

Действительная постоянная C_0 и угол φ подлежат определению.

2. Постоянная φ определяется из условия равенства нулю момента сил, приложенных со стороны среды к клину. При этом условие равенства нулю главного вектора напряжений автоматически выполнено вследствие принятых условий на бесконечности (как можно показать аналогично [7, 8],

при отсутствии в асимптотике при $z \rightarrow \infty$ члена $\sim 1/z$ главный вектор напряжений, приложенных к границе извне, оказывается равным нулю). Скачок контактных давлений $\sigma(x) = -[\sigma_{22}(x, 0)]$, $|x| < 1$ определяется только вспомогательным решением

$$\sigma(x) = \varphi \frac{b_{11}^{-1} + b_{12}^{-1}}{\sqrt{1-x^2}} x - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[b_{11}^{-1}h_1'(t) + b_{12}^{-1}h_2'(t)] \sqrt{1-t^2} dt}{\sqrt{1-x^2}(x-t)}$$

Из условия $\int_{-1}^1 x\sigma(x) dx = 0$ получим

$$\varphi = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{[b_{11}^{-1}h_1'(t) + b_{12}^{-1}h_2'(t)] x \sqrt{1-t^2} dt dx}{(b_{11}^{-1} + b_{12}^{-1})(x-t) \sqrt{1-x^2}}$$

Все интегралы, не существующие по Риману, понимаются в смысле главного значения. Если среды одинаковы ($b_{11} = b_{12}$), а клин симметричный ($h_1' \equiv -h_2'$), то $\varphi = 0$.

Постоянную C_0 определим фиксируя скачок смещения U_2 в каком-либо сечении клина, например из условия $[U_2(1)] = h(1)$; это необходимо, так как задача поставлена в производных от смещений. Для этого проинтегрируем полное значение $[U_{2,x}] = -f(x) + p \operatorname{Im} \chi_2$, $1 < x < a$, где первое и второе слагаемое — вклады решений вспомогательной и основной задачи. При использовании (1.11) получим

$$(2.1) \quad C_0 = [I_0 - h(1)]/I, \quad I_0 = \int_1^a \left\{ f(x) + \sqrt{\frac{2pq}{a-x}} F[\xi(x)] E(x) \right\} dx$$

$$E = \operatorname{Im} \{ I_1 e^{i\alpha\psi} \} = \frac{1}{\pi} \int_A^\infty \frac{W_1^0(t)}{F(t)} \left(\frac{t + t^{-1} - 2a}{\lambda} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \frac{[\xi(x) - 1](t - 1) dt}{[t - \xi(x)][1 - t\xi(x)]} + O(\alpha^2)$$

$$\psi = \ln \left| \frac{A - \xi}{A - \xi^{-1}} \right|, \quad \xi = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$I = \int_1^a \left(\frac{pq}{2(a-x)(x^2-1)} \right)^{1/2} \cos(\alpha\psi) dx =$$

$$= \int_1^a \left(\frac{pq}{2(a-x)(x^2-1)} \right)^{1/2} dx + O(\alpha^2)$$

Здесь учтено, что величина $\alpha = \alpha_1$ сравнима с единицей только при значениях скорости s , близких к s_R , иначе $\alpha \ll 1$ и можно выделить главную часть в разложении по этому параметру. Вклад интегрирования по малому отрезку вблизи вершины трещины, где существенна осциллирующая особенность, оценивается величиной $O(\alpha^2)$.

Осталось проверить неравенства в (1.1). Условия безотрывности $\sigma_{22}^j \leq 0$ накладывают ограничения на геометрию клина: физически ясно, что не для всяких $h_j(x)$ эти условия выполняются. Условие непересечения берегов трещины и каверны $[U_2] \geq 0$ обязательно нарушается в малой окрестности точки a и далеко от клина (при $x \rightarrow -\infty$). Ниже этот дефект решения исправляется.

3. Предварительно рассмотрим пример клина прямоугольного профиля. Полное решение будет состоять из решения основной задачи, причем толь-

ко из его однородной части ($h_j'(x) \equiv 0, \varphi = 0$)

$$(3.1) \quad \frac{\chi(z)}{iC_0 G(z)} = \left\| \frac{\Pi_1(z) - \Pi_2(z)}{s(\Pi_1(z) + \Pi_2(z))} \right\|, \quad C_0 = -\frac{h}{l}$$

$$\Pi_k G = \frac{[(z + \sqrt{z^2 - 1} - A)/(z - \sqrt{z^2 - 1} - A)]^{i\alpha_k}}{2\sqrt{2}(a-z)(z^2-1)} \xrightarrow{z \rightarrow x+i0, |x| < 1}$$

$$\rightarrow \frac{\exp[\alpha_k \theta(x)]}{2i\sqrt{2}(a-x)(x^2-1)}$$

$$0 \leq \theta(x) = \text{Arc tg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{A-x} \leq \pi$$

Исходя из (3.1) подсчитаем контактные давления, одинаковые на верхней и нижней щеках клина ($|x| < 1$)

$$(3.2) \quad \sigma_{22} = \text{Re} \chi_2(x) = \frac{sC_0}{\sqrt{2}(a-x)(1-x^2)} + O(\alpha^2) \underset{x \rightarrow \pm 1 \mp 0}{\sim} \frac{N(\pm 1)}{\sqrt{1 \mp x}}$$

$$N(\pm 1) = \frac{C_0}{2} \sqrt{\frac{q}{p(a \mp 1)}}, \quad \sigma_{22}(x) < 0$$

Для скачка вертикальной скорости берегов при $x < -1$ и $1 < x < a$ получим

$$-c[U_{2,x}] = -\frac{cC_0 \sqrt{pq} \cos[\alpha\psi_0(x)]}{\sqrt{2}(a-x)(x^2-1)} \text{sgn } x \underset{x \rightarrow \pm 1 \pm 0}{\sim} \frac{M(\pm 1)}{\sqrt{\pm x - 1}}$$

$$\psi_0(x) = \ln \left| \frac{x - A + \sqrt{x^2 - 1} \text{sgn } x}{x - A - \sqrt{x^2 - 1} \text{sgn } x} \right|, \quad M(\pm 1) = \mp \frac{cC_0}{2} \left(\frac{pq}{a \mp 1} \right)^{1/2}$$

По коэффициентам концентрации N и M можно рассчитать потоки энергии w [9]

$$(3.3) \quad w = \frac{\pi}{2} NM, \quad w(\pm 1) = \mp \frac{c\pi C_0^2}{8(a \mp 1)}$$

Поток $w(1)$ отрицателен — энергия поступает из точки $x = 1$ в среду; поток $w(-1)$ положителен — энергия расходуется в точке $x = -1$. Сумма этих потоков энергии поглощается в кончике трещины (поток в бесконечность равен нулю) и, кроме того, определяет оценку снизу величины горизонтальной силы Q , которую необходимо приложить к клину, чтобы поддерживать заданное стационарное движение, из энергетического неравенства

$$(3.4) \quad cQ > -w(1) - w(-1) \Rightarrow Q > \frac{qC_0^2}{4(a^2 - 1)}$$

Для обеспечения равенств в правую часть первого неравенства (3.4) следует добавить мощности, расходуемые на необратимые процессы около углов клина — получим уравнение баланса энергии для клина.

Физическое объяснение появлению потоков энергии разных знаков в углы клина может быть таким. Если рассмотреть клин с «заглаженными» углами (напряжения непрерывны в точках отрыва), то очевидно, что нормальные к поверхности клина напряжения будут совершать работу разных знаков над средой около передней и задней точки отрыва, а клин будет испытывать лобовое сопротивление.

В общем случае к выражению для лобового сопротивления добавляется интеграл по контуру клина от проекции напряжений, нормальных к контуру, на ось x . Величина Q пропорциональна квадрату деформации, т. е. относится к разряду величин, пренебрегаемых при постановке линейной задачи теории упругости (при сносе граничных условий на недеформируемую поверхность) и определяется апостериори. По этой причине

остается справедливым утверждение о равенстве нулю главного вектора внешних сил, приложенных к границе.

Сопротивление трению (коэффициенты трения малы) можно оценить используя полученное решение в качестве нулевого приближения.

Напряжения на продолжении трещины ($x > a, y = 0$) равны

$$\begin{aligned} \sigma_{22} + i\sigma_{12} &= -\frac{C_0(\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})}{2\sqrt{2}(x-a)(x^2-1)}\{s \cos[\alpha \ln \psi] + i \sin[\alpha \ln \psi]\} \sim \\ &\sim \frac{-K_2}{\sqrt{2\pi}(x-a)}\{\dots\}, \quad K_2 = C_0 \left(\frac{\pi pq}{(pq-d^2)(a^2-1)} \right)^{1/2} < 0 \end{aligned}$$

Аналогичную структуру имеют формулы для скоростей при $x \rightarrow a - 0$ (и в общем случае неплоского клина). Если скорость s не слишком близка к c_R , области, где происходит нарушение условия $[U_2] \geq 0$, локализованы в зоне кончика трещины и далеко от клина в области каверны. Поэтому полученное решение можно рассматривать как внешнее разложение по отношению к окрестностям точек $z = a, \infty$. Ниже построим внутренние разложения (везде подразумеваются главные части разложений), опираясь на результаты [10]. При этом вводятся участки контакта берегов с проскальзыванием на интервалах $-\infty < x < -L$ и $a-l < x < a$ и принимается, что $L \geq a, l \ll a-1$, т. е. L и l — большой и малый параметры (подлежат определению). Впоследствии эти предположения будут оправданы вычислениями, а сейчас дают основания для асимптотического подхода [11].

4. Поскольку знание одного коэффициента K_2 определяет локально главную часть поля, даваемую внешним разложением, воспользуемся аналогией с [10] для решения внутренней задачи, имеющей область определения $|z-a| \ll a-1$ и область перекрытия $l \ll |z-a| \ll a-1$. Запишем окончательный результат для общего случая (Z — внутренняя переменная)

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{i|C_1|}{\sqrt{z-a}} \left\| \begin{array}{l} \lambda\Omega^{i\alpha} + \Omega^{-i\alpha} \\ s(\lambda\Omega^{i\alpha} - \Omega^{-i\alpha}) \end{array} \right\| \\ \sqrt{2\lambda}C_1 &= C_0 G(A) - iF(A) I_1(A) \equiv J_1 + iJ_2 \quad (\text{Re } J_k = J_k, \\ &\sqrt{1} = 1) \\ \Omega &= 2Z + 1 + 2\sqrt{Z^2 + Z}, \quad Z = (z-a)/l \end{aligned}$$

При $|x| \ll l, y = 0$ имеем

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{12} &\sim K_2 [2\pi(x-a)]^{-1/2}, \quad \sigma_{22} = O(1), \quad x \rightarrow a+0 \\ \sigma_{12} &= 0, \quad \sigma_{22} \sim -\frac{d}{p} \frac{K_2}{[2\pi(a-x)]^{1/2}} < 0, \quad x \rightarrow a-0 \end{aligned}$$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} w(a) &= \frac{c(pq-d^2)}{4p} K_2^2 = \frac{\pi c q C_0^2}{4(a^2-1)} \quad (\text{плоский клин}) \\ l &= \frac{a^2-1}{2(a+\sqrt{a^2-1})} \exp\left[-\frac{\pi+\gamma}{2\alpha}\right], \quad \gamma = 2 \arctg \frac{J_2}{J_1} \\ K_2 &= -\sqrt{2\pi}(\lambda+1)|C_1| \end{aligned}$$

Можно проверить равенство $w(1) + w(-1) + w(a) = 0$ — уравнение баланса энергии для среды. Анализ углового распределения функций в вершине трещины поперечного сдвига на границе раздела проведен в [1].

Для сращивания в окрестности $z = \infty$ понадобятся асимптотики (1.10), определяющие поведение решения при $z \rightarrow \infty, \text{Im } z > 0$ и $\text{Im } z < 0$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} W_k &\sim B_k \omega^{i\alpha k^{-3/2}}, \quad \omega \rightarrow \infty, \quad W_k \sim \bar{B}_k \omega^{i\alpha k^{3/2}}, \quad \omega \rightarrow 0 \\ B_1 &= -\lambda B_2, \quad \lambda^{1/2} B_2 = iI_1(0) + C_0 \equiv C_0 + \Gamma_1 + i\Gamma_2 \quad (\Gamma_k = \\ &= \text{Re } \Gamma_k) \end{aligned}$$

Заметим, что вспомогательное решение в силу тривиальности в процессе построения решений в окрестностях не участвует. Внутреннее разложение в области $|z| \gg a$, $|Z| \ll L/a$ ($Z = e^{2\pi i} L/z$ — внутренняя переменная в данном случае) с областью перекрытия $a \ll |z| \ll L$, $1 \ll |Z| \ll L/a$ ищем в виде, аналогичном [10], обращая внимание на поведение при $|z| \gg \gg L$

$$(4.4) \quad \chi = \frac{z^{3/2}}{\Omega + 1} \left\| \begin{matrix} W_1^* + W_2^* \\ s(W_1^* - W_2^*) \end{matrix} \right\|_{1 \ll Z \ll L/a} \left\| \begin{matrix} W_1 + W_2 \\ s(W_1 - W_2) \end{matrix} \right\|$$

Для отыскания функций $W_k^*(\Omega)$ получаем однородную задачу вида (1.8) с условиями сращивания при $\Omega \rightarrow 0, \infty$. Можно установить асимптотические равенства $\omega \sim 8L\Omega$ ($\omega \rightarrow \infty, \Omega \rightarrow 0$), $\omega \sim \Omega/(8L)$ ($\omega \rightarrow 0, \Omega \rightarrow \infty$), справедливые в областях перекрытия, а затем из (4.3), (4.4) вычислить асимптотики $W_k^*(\Omega)$ при $\Omega \rightarrow 0, \infty$ и решить задачу. В результате получим (L , как и l , определяется из условия погашения особенности в точке контакта [4, 10])

$$\chi = \frac{i|B_2|}{(2z)^{3/2}} \left\| \begin{matrix} \lambda\Omega^{i\alpha} + \Omega^{-i\alpha} \\ s(\lambda\Omega^{i\alpha} - \Omega^{-i\alpha}) \end{matrix} \right\|$$

$$L = \frac{1}{8} \exp \frac{\pi + \delta}{2\alpha}, \quad \delta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + C_0}$$

Для плоского клина $\gamma = \delta = 0$, иначе $\gamma, \delta = O(\alpha)$, т. е. можно оценивать параметры L и l , полагая $\gamma = \delta = 0$. Из полученного следует $\sigma_{22}(x, 0) < 0$ на участках контакта берегов при $x < -L$ и $a - l < x < a$.

Таким образом, расчленением на четыре отдельные задачи приближенно решена задача о расклинивании упругого биматериала по границе раздела, содержащая шесть особых точек и девять безразмерных параметров (если форму клина характеризовать двумя величинами). Влияние параметров a, h непосредственно прослеживается в окончательных формулах.

5. Перейдем к анализу предельных (по другим параметрам) ситуаций, не столь очевидному. При $c \rightarrow c_R$ из (3.3)—(3.5), (4.2) следует $Q, K_2, w(\pm 1), w(a) \rightarrow 0$, если длина трещины фиксирована. Если же ограничить снизу $|K_2| > K_* > 0$, то $a \rightarrow 1$ при $c \rightarrow c_R$. Это находится в качественном согласии с результатами [12], где изучено движение полубесконечного клина в однородной среде. К этим выводам следует, однако, относиться с осторожностью, ибо при $c \rightarrow c_R$ имеем $\lambda, \alpha \rightarrow \infty, L, l \rightarrow O(1)$ и решение теряет силу. При околорелеевских скоростях необходимо рассматривать задачу с учетом контакта берегов трещины и щели в главном. Ниже приведены значения L как функции параметров c, ν_1 (ν_1 — коэффициент Пуассона, среда 2 — жесткая)

ν_1		0,1		0,3		0,45			
c/c_{21}	0	0,7	0,85	0	0,7	0,9	0,8	0,9	0,93
L	$4 \cdot 10^3$	92	5,7	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^3$	6,3	$1,4 \cdot 10^4$	56	7,4

Величины $2Al^{-1}/(a^2 - 1)$ при этом будут на порядок больше.

Видно, что почти на всем интервале $(0, c_R)$ L — очень большое число (из-за малости α , входящего в показатель экспоненты), причем $L \approx 3$ при значениях c , отличающихся на $\approx 2,5\%$, $1,6\%$, $0,94\%$ от c_R при $\nu_1 = 0,1; 0,3; 0,45$ (c_R/c_{21} 0,893; 0,927; 0,949) соответственно. Поэтому найденное приближенное решение имеет силу точного решения при $0 < c < c_R - \varepsilon$, $\varepsilon \approx 0,05 \cdot c_R$; дальнейшее уточнение не имеет практического смысла.

Задача о движении несимметричного клина конечной длины в однородной среде с образованием трещины, по-видимому, ранее не рассматривалась. Представляет интерес предельный переход $\mu_2 \rightarrow \mu_1$, $c_{m2} \rightarrow c_{m1}$, $m = 1, 2$ ($\lambda \rightarrow 1$, $d, \alpha \rightarrow 0$, $p \rightarrow 2b_{11}$, $q \rightarrow 2b_{21}$, $L \rightarrow \infty$, $l \rightarrow 0$). При этом области определения внутренних разложений во внешних координатах вырождаются в точки — внешнее разложение становится точным решением, осцилляции пропадают, а формулы (1.10), (3.1) упрощаются за счет того, что

$$P_k = [2(a-z)]^{-1/2}, W_k^{\circ} = 1/2 (-1)^{k+1} g(\xi) / \sqrt{pq}$$

Приближенные формулы (2.1), (3.2) обратятся в точные, выражения для компонент напряжений на продолжении трещины примут вид

$$\sigma_{22} = \frac{\sqrt{2} s \{F[\xi(x)] I_1[\xi(x)] - C_0 G[\xi(x)]\}}{\sqrt{x-a}}, \quad \sigma_{12} = \frac{f(x)}{\sqrt{pq}}$$

формулы (4.1) потеряют силу, а (3.3), (3.4), (4.2) сохранятся.

При $c = c_d$, где c_d — корень $d(c) = 0$ (возможно, из интервала $(0, c_R)$), будет $\alpha = 0$ и выявленное поведение функций для случая однородной среды при этом значении скорости имеет место и для кусочно-однородной среды [1, 4]. При варьировании упругих параметров среды 2 ($c = \text{const}$) длины L и l изменяются от значений $L = \infty$, $l = 0$ (одинаковые среды) до значений $l_* = \max l$, $L_* = \min L$ (среда 2 — жесткая). Сопоставим решения однородной среды и предельного случая кусочно-однородной среды: среда 2 — жесткая, $\mu_2, c_{12}, c_{22} \rightarrow \infty \Rightarrow p \rightarrow b_{11}, q \rightarrow b_{21}, d \rightarrow a_1$ ($c = \text{const}$). Пусть a фиксировано. Тогда для отношения контактных давлений получим, что в случае однородной среды они в два раза меньше. Аналогично соотносятся потоки w и сила Q . Если же при сравнении зафиксировать поток энергии $w(a)$, то контактные давления, потоки $w(\pm 1)$ и сила Q будут одинаковыми, а длины трещин — разными (для однородной среды длина трещины меньше).

ЛИТЕРАТУРА

1. Симонов И. В. О дозвуковом движении края сдвиговой подвижки с трением вдоль границы раздела упругих материалов. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 3, с. 497—506.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
4. Симонов И. В. Динамика трещины отрыва — сдвига на границе раздела двух упругих материалов. — Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 1, с. 65—68.
5. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
7. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
8. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 1, с. 131—137.
9. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.
10. Симонов И. В. О движении трещины с конечной зоной отрыва вдоль линии соединения двух упругих материалов. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 6, с. 114—120.
11. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
12. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел. — ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, с. 667—682.