

УДК 539.375

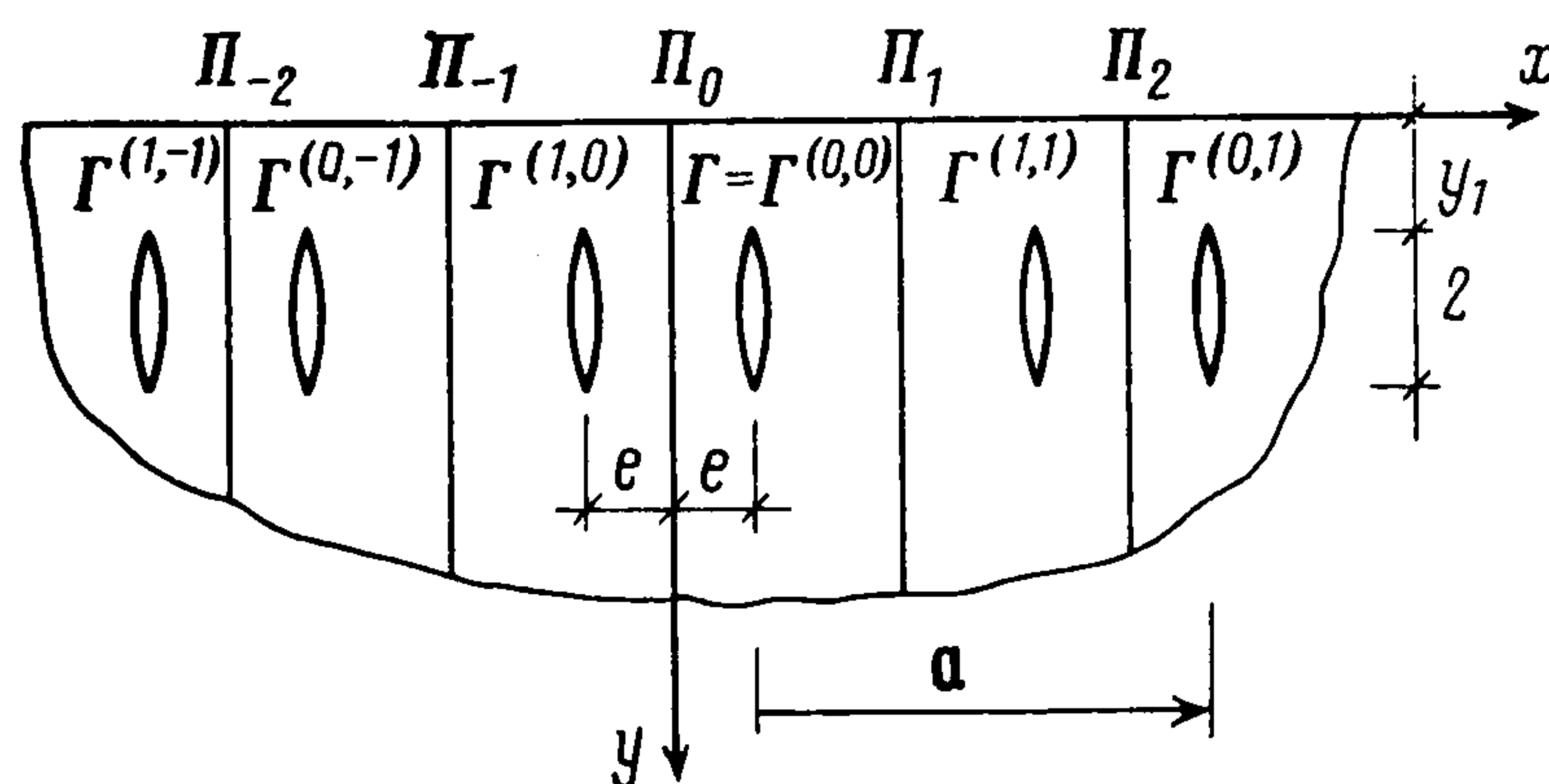
ОБОБЩЕННАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРЕЩИНОВАТОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Бурышкин М. Л., Радиолло М. В.

Изучается напряженное состояние изотропной полуплоскости, ослабленной регулярной системой прямолинейных трещин, перпендикулярных к ее краю. Постановка задачи отличается от принятой в работе [1] тем, что нагрузка на трещины, вообще говоря, не обладает никакими периодическими свойствами. Это обстоятельство делает практически невозможным использование предложенных [1] подходов к решению.

Как известно, задача сводится к бесконечным системам сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков, которые претерпевают при переходе через каждую трещину производные от перемещений. Для упрощения полученной системы используется схема аналитического учета симметрии упругогеометрических характеристик среды [2], согласно которой вначале изучаются обобщенные периодические задачи. Им отвечает, как показано в работе, система четырех сингулярных интегральных уравнений относительно искомых скачков на основной трещине. Определение последних осуществляется методом ортогональных многочленов, а на других трещинах — при помощи элементарных алгебраических соотношений.

1. Постановка задачи. Рассматриваемая трещиноватая полуплоскость (фиг. 1) обладает группой C_{1h}^1 симметрии, в которую входят трансляции (сдвиги) T_m на векторы ma (a — основной вектор) и отражения Θ_m в плос-



Фиг. 1

костях Π_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Под Γ или $\Gamma^{(0,0)}$ понимается отрезок, занятый основной трещиной. В свою очередь трещина, полученная из основной трансляцией T_m или отражением Θ_m , занимает отрезок $\Gamma^{(0,m)} = T_m\Gamma$ или $\Gamma^{(1,m)} = \Theta_m\Gamma$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Геометрия среды определяется длиной a основного вектора трансляции, расстоянием e от основной трещины до оси y (плоскости Π_0) и ординатой y_1 верхнего конца трещины. Без ограничения общности длина трещин принимается равной двум. Отрезок $\Gamma^{(j,m)}$ удален от оси y на расстояние $e^{(j,m)}$, причем $e^{(j,m)} = (-1)^j e + ma$ ($j = 0, 1$).

На границе среды имеют место следующие условия:

$$(1.1) \quad \sigma_y = 0, \sigma_{xy} = 0 \quad (|x| < \infty, y = 0)$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= -p^{(j,m)(1)}(y) \quad (x = e^{(j,m)}, y_1 \leq y \leq y_1 + 2, j = 0, 1) \\ \sigma_{xy} &= -p^{(j,m)(2)}(y) \end{aligned}$$

где σ_x , σ_y и σ_{xy} — нормальные и касательные напряжения, $p^{(j, m)(1)}(y)$ и $p^{(j, m)(2)}(y)$ — заданные функции нормальных и касательных усилий, действующих на границу трещины $\Gamma^{(j, m)}$ ($j = 0, 1; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Подчеркнем, что, согласно (1.2), усилия, приложенные к разным берегам одной трещины, одинаковы, т. е. скачки напряжений σ_x и σ_{xy} при переходе через любую трещину равны нулю. Подобное ограничение не связано с возможностями предлагаемого метода решения и введено исключительно из соображений компактности дальнейших выкладок.

Бигармоническая задача теории упругости с граничными условиями (1.1) и (1.2) сводится [1] к бесконечной системе сингулярных интегральных уравнений (звездочка означает отсутствие в сумме слагаемого, отвечающего значению $n = m = 0$)

$$(1.3) \quad (-1)^{s+1} \int_{y_1}^{y_1+2} \chi^{(j, r)(s)}(\xi) \left[\frac{1}{\xi - y} + S(y, \xi) \right] d\xi + \\ + \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{y_1}^{y_1+2} \chi^{(n, m)(k)}(\xi) R_{(n, m)(k)}^{(j, r)(s)}(y, \xi) d\xi = (-1)^s 4\pi p^{(j, r)(s)}(y) \\ (s = 1, 2; j = 0, 1; r = 0, \pm 1, \dots; y_1 \leq y \leq y_1 + 2)$$

Здесь

$$S(y, \xi) = \frac{1}{y + \xi} + \frac{2\xi}{(y + \xi)^2} - \frac{4\xi^2}{(y + \xi)^3} \\ R_{(n, m)(k)}^{(j, r)(s)}(y, \zeta) = R_{(k)}^{(s)}(e^{(n, m)} - e^{(j, r)}, y, \zeta) \\ R_{(1)}^{(1)}(z, y, \zeta) = -(y - \zeta) [(y - \zeta)^2 + 3z^2] \Delta_-^{(2)} + 2(y + \zeta) \Delta_+^{(1)} - (y + 3\zeta) [(y + \zeta)^2 - z^2] \Delta_+^{(2)} + 4yz(y + \zeta) [(y + \zeta)^2 - 3z^2] \Delta_+^{(3)} \\ R_{(2)}^{(2)}(z, y, \zeta) = (y - \zeta) [(y - \zeta)^2 - z^2] \Delta_-^{(2)} - (y - \zeta) [(y + \zeta)^2 - z^2] \Delta_+^{(2)} - 4y\zeta(y + \zeta) [(y + \zeta)^2 - 3z^2] \Delta_+^{(3)} \\ R_{(3-j)}^{(j)}(z, y, \xi) = z \{ (-1)^j [(z^2 - (y - \xi)^2) \Delta_-^{(2)} - \Delta_+^{(1)} + 2(y - \xi + (-1)^j 2\xi)(y + \xi) \Delta_+^{(2)}] + 4y\xi [z^2 - 3(y + \xi)^2] \Delta_+^{(3)} \} \\ (j = 1, 2; \Delta_{\pm}^{(k)} = [z^2 + (y \pm \xi)^2]^{-k})$$

Отметим, что данная система может быть составлена также методом обобщенных интегральных преобразований [3].

Неизвестными в системе (1.3) являются функции

$$(1.4) \quad \chi^{(j, m)(s)}(y) = \frac{1}{E} \left[\frac{\partial u_s}{\partial y}(e^{(j, m)} + 0, y) - \frac{\partial u_s}{\partial y}(e^{(j, m)} - 0, y) \right] \\ (s = 1, 2; y_1 \leq y \leq y_1 + 2)$$

т. е. скачки, которые претерпевают при переходе через отрезок $\Gamma^{(j, m)}$ ($j = 0, 1; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) производные от перемещений u_s (под u_1 и u_2 понимаются перемещения вдоль осей x и y соответственно).

Отметим, что указанные скачки должны дополнительно удовлетворять условиям замкнутости трещин, которые можно записать в виде

$$(1.5) \quad \int_{y_1}^{y_1+2} \chi^{(j, r)(s)}(y) dy = 0 \quad (s = 1, 2; j = 0, 1; r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Непосредственное решение системы (1.3) сопряжено со значительными трудностями, поэтому целесообразно упростить ее за счет симметрии упругогеометрических свойств среды, воспользовавшись известной схемой [2]. Согласно последней, рассматриваемые задачи практически всегда могут быть сведены к обобщенным периодическим.

2. Обобщенные периодические задачи. Будем считать, что нагрузка описывается какой-то из двух функций $p_{\alpha\rho}$ ($\rho = 1, 2$), при которых на берега трещин действуют усилия $p_{\alpha\rho}^{(j, m)(s)}(y)$, удовлетворяющие условиям

$$(2.1) \quad \begin{aligned} p_{\alpha\rho}^{(0, m)(s)}(y) &= \sum_{\eta=1}^2 \tau_{\alpha\rho\eta}(T_m) p_{\alpha\eta}^{(0, 0)(s)}(y) \\ p_{\alpha\rho}^{(1, m)(s)}(y) &= (-1)^{s+1} \sum_{\eta=1}^2 \tau_{\alpha\rho\eta}(\Theta_m) p_{\alpha\eta}^{(0, 0)(s)}(y) \\ (s = 1, 2; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; y_1 \leq y \leq y_1 + 2) \end{aligned}$$

где $\tau_{\alpha\rho\eta}(T_m)$ и $\tau_{\alpha\rho\eta}(\Theta_m)$ — элементы, стоящие на пересечении ρ -й строки и η -го столбца матриц двумерных представлений (α — скалярный параметр, $|\alpha| \leq \pi$)

$$\tau_{\alpha}(T_m) = \begin{vmatrix} \cos m\alpha & \sin m\alpha \\ -\sin m\alpha & \cos m\alpha \end{vmatrix}, \quad \tau_{\alpha}(\Theta_m) = \begin{vmatrix} \cos m\alpha & -\sin m\alpha \\ -\sin m\alpha & -\cos m\alpha \end{vmatrix}$$

Согласно работе [2], компоненты напряженно-деформированного состояния, отвечающие указанным нагрузкам, и следовательно, неизвестные скачки $\chi_{\alpha\rho}^{(j, m)(s)}(y)$ обладают свойствами, сходными с (2.1). В частности

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \chi_{\alpha\rho}^{(0, m)(s)}(y) &= \sum_{\eta=1}^2 \tau_{\alpha\rho\eta}(T_m) \chi_{\alpha\eta}^{(0, 0)(s)}(y) \\ \chi_{\alpha\rho}^{(1, m)(s)}(y) &= (-1)^{s+1} \sum_{\eta=1}^2 \tau_{\alpha\rho\eta}(\Theta_m) \chi_{\alpha\eta}^{(0, 0)(s)}(y) \\ (s = 1, 2; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \rho = 1, 2; y_1 \leq y \leq y_1 + 2) \end{aligned}$$

Такие задачи называют обобщенными периодическими. Их специфика состоит в том, что в силу (2.2) достаточно найти лишь четыре скачка $\chi_{\alpha\rho}^{(0, 0)(s)}(y)$ ($s = 1, 2; \rho = 1, 2$). Для этого можно воспользоваться только теми интегральными уравнениями из (1.3), которые отвечают основной трещине, записав их для каждой из нагрузок $p_{\alpha\rho}$. Указанные уравнения после учета равенств (2.2) принимают вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &(-1)^{s+1} \int_{y_1}^{y_1+2} \chi_{\alpha\rho}^{(0, 0)(s)}(\xi) \left[\frac{1}{\xi - y} + S(y, \xi) \right] d\xi + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \sum_{\eta=1}^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}^* \tau_{\alpha\rho\eta}(T_m) \int_{y_1}^{y_1+2} \chi_{\alpha\eta}^{(0, 0)(k)}(\xi) R_{(0, m)(k)}^{(0, 0)(s)}(y, \xi) d\xi + \\ &+ (-1)^{k+1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tau_{\alpha\rho\eta}(\Theta_m) \int_{y_1}^{y_1+2} \chi_{\alpha\eta}^{(0, 0)(k)}(\xi) R_{(1, m)(k)}^{(0, 0)(s)}(y, \xi) d\xi = \\ &= (-1)^s 4\pi p_{\alpha\rho}^{(0, 0)(s)}(y) \quad (s = 1, 2; \rho = 1, 2; y_1 \leq y \leq y_1 + 2) \end{aligned}$$

где звездочка означает отсутствие в сумме слагаемого, отвечающего значению $m = 0$.

Остальные уравнения из (1.3) удовлетворяются автоматически [2].

Решение интегральных уравнений (2.3) обобщенной периодической задачи проведем методом ортогональных многочленов [3].

Искомые функции $\chi_{\alpha\rho}^{(0,0)(s)}(\xi)$ будем искать в форме рядов

$$(2.4) \quad \chi_{\alpha\rho}^{(0,0)(s)}(\xi) = (1-t^2)^{-1/2} \sum_{r=0}^{\infty} X_{\rho r}^{(s)} T_r(t) \quad (s=1, 2; \rho=1, 2)$$

где $-1 \leq t = \varphi(\xi) \leq 1$, $\varphi(\xi) = \xi - y_1 - 1$, $T_r(t)$ — полиномы Чебышева первого рода, $X_{\rho r}^{(s)}$ — скалярные коэффициенты.

Из условия (1.5) немедленно следует, что $X_{\rho 0}^{(s)} = 0$. Поэтому суммирование в (2.4) можно начинать от значения $r = 1$.

Подставляя разложения (2.4) в уравнения (2.3), умножим обе части последних на $(1-g^2)^{1/2} U_{l-1}(g)$, где $l = 1, 2, \dots$, $g = \varphi(y)$, $U_{l-1}(g)$ — полиномы Чебышева второго рода, и проинтегрируем по y от y_1 до $y_1 + 2$.

Сделаем замену переменных, полагая $y = \varphi^{-1}(g)$ и $\xi = \varphi^{-1}(t)$, где $\varphi^{-1}(z) = z + y_1 + 1$, и учтем, что

$$\langle (y - \xi)^{-1} \rangle = -2^{-1} \pi^2 \delta_{lr}$$

$$\left(\langle f \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{1-g^2} U_{l-1}(g) dg \int_{-1}^1 \frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}} f[\varphi^{-1}(g), \varphi^{-1}(t)] dt \right)$$

где δ_{lr} — символ Кронекера. В результате придем к бесконечной алгебраической системе уравнений относительно искомых коэффициентов

$$(2.5) \quad \sum_{\eta=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^{\infty} X_{\eta r}^{(k)} A_{\rho\eta lr}^{(s)(k)} = Y_{\rho l}^{(s)} \quad (\rho=1, 2; s=1, 2; l=1, 2)$$

$$A_{\rho\eta lr}^{(s)(k)} = (-1)^{s+1} \delta_{\rho\eta} \delta_{ks} \delta_{lr} \left(\frac{\pi^2}{2} + \langle S \rangle \right) + \langle B_{sk} \rangle$$

$$B_{sk}(y, \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tau_{\alpha\rho\eta}(T_m) R_{(0,m)(k)}^{(0,0)(s)}(y, \xi) +$$

$$+ (-1)^{k+1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tau_{\alpha\rho\eta}(\Theta_m) R_{(1,m)(k)}^{(0,0)(s)}(y, \xi)$$

$$Y_{\rho l}^{(s)} = (-1)^s 4\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-g^2} U_{l-1}(g) p_{\alpha\rho}^{(0,0)(s)}[\varphi^{-1}(g)] dg$$

При вычислении интегралов целесообразно пользоваться известными квадратурными формулами [4].

Приближенное решение системы (2.5) построим воспользовавшись методом редукции. Численный анализ показывает, что сохранение в разложении (2.4) первых девяти слагаемых обеспечивает достаточную для практических приложений точность в широком диапазоне геометрических характеристик.

Решение системы (2.5), т. е. вычисление неизвестных $X_{\rho r}^{(s)}$, позволяет найти по формулам (2.4) и (2.2) искомые скачки $\chi_{\alpha\rho}^{(j,m)(s)}$ ($s = 1, 2$) на каждом отрезке $\Gamma^{(j,m)}$ ($j = 0, 1; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) при нагрузке $p_{\alpha\rho}$ ($\rho = 1, 2$); все требуемые характеристики напряженно-деформируемого состояния полуплоскости выражаются известным образом через эти скачки.

Обозначим через $K_{\alpha\rho(i)}^{(j,m)(s)}$ ($i = 1, 2$) коэффициенты интенсивности нормальных ($s = 1$) и касательных ($s = 2$) напряжений в точках с ординатами y_1 ($i = 1$) и $y_1 + 2$ ($i = 2$) отрезка $\Gamma^{(j,m)}$ при нагрузке $p_{\alpha\rho}$. Можем записать [1]

$$(2.6) \quad K_{\alpha\rho(1)}^{((0,0)(s)} = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r X_{\rho r}^{(s)}, \quad K_{\alpha\rho(2)}^{(0,0)(s)} = -\frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} X_{\rho r}^{(s)}$$

$$(s = 1, 2; \rho = 1, 2).$$

Остальные коэффициенты интенсивности могут быть найдены из соотношений, аналогичных (2.2).

Предложенный подход к численному исследованию обобщенных периодических задач для трещиноватой полуплоскости, как видно из сказанного, относительно прост и эффективен.

3. Схема решения неперiodических задач. Предположим, что заданная на множестве отрезков $\Gamma^{(j, m)}$ ($j = 0, 1; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) нагрузка $p = p_\mu^{(2N)}$ произвольна на отрезках, расположенных между плоскостями Π_0 и Π_{2N} (N — некоторое целое положительное число), и симметрична ($\mu = 1$) или кососимметрична ($\mu = 2$) относительно всех плоскостей Π_{2Nr} ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Обозначим через $p_\mu^{(j, m)(s)}$ соответствующие ей нормальные ($s = 1$) и касательные ($s = 2$) усилия на берегах трещины, занимающей отрезок $\Gamma^{(j, m)}$.

Тогда имеет место следующее разложение [5]:

$$(3.1) \quad p_\mu^{(2N)} = \sum_{i=0}^N \frac{M_i}{2N} p_{\alpha_i, \mu}; \quad \alpha_i = \frac{i\pi}{N}, \quad M_0 = M_N = 1, \\ M_i = 2 \quad (0 < i < N)$$

где $p_{\alpha_i, \mu}$ — μ -я из функций $p_{\alpha_i, \rho}$ ($\rho = 1, 2$), которые порождают на отрезках $\Gamma^{(j, m)}$ ($j = 1, 2; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) функции $p_{\alpha_i, \rho}^{(j, m)(s)}$ ($s = 1, 2$), связанные между собой формулами (2.1) и определяемые на основном отрезке $\Gamma^{(0, 0)}$ выражениями

$$(3.2) \quad p_{\alpha_i, \rho}^{(0, 0)(s)}(y) = \sum_{n=0}^{N-1} \tau_{\alpha_i, \mu \rho}(T_n) p_\mu^{(0, n)(s)}(y) + \\ + (-1)^{s+1} \sum_{n=1}^N \tau_{\alpha_i, \mu \rho}(\Theta_n) p_\mu^{(1, n)(s)}(y) \\ (s = 1, 2; \rho = 1, 2; y_1 \leq y \leq y_1 + 2)$$

В силу сказанного предложим схему исследования напряженно-деформированного состояния рассматриваемой трещиноватой полуплоскости при нагрузке $p_\mu^{(2N)}$. Вначале следует решить обобщенные периодические задачи, отвечающие составляющим $p_{\alpha_i, \mu}$ ($i = 0, 1, \dots, N$) разложения (3.1). Необходимые для построения систем (2.5) функции $p_{\alpha_i, \rho}^{(0, 0)(s)}$ вычисляются из неравенств (3.2). После этого по принципу суперпозиции можно определить искомые скачки, обозначаемые через $\chi_\mu^{(j, m)(s)}(y)$, по формуле

$$(3.3) \quad \chi_\mu^{(j, m)(s)}(y) = \sum_{i=0}^N \frac{M_i}{2N} \chi_{\alpha_i, \mu}^{(j, m)(s)}(y) \\ (s = 1, 2; j = 0, 1; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \mu = 1, 2; y_1 \leq y \leq \\ \leq y_1 + 2)$$

Устремив N к бесконечности, приходим к нагрузке $p_\mu = p_\mu^{(\infty)}$, которая произвольна справа от плоскости Π_0 и симметрична ($\mu = 1$) или кососимметрична ($\mu = 2$) относительно этой плоскости. Если для функции p_μ выполняется условие

$$(3.4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^{N-1} |p_\mu^{(0, n)(s)}(y)| + \sum_{n=1}^N |p_\mu^{(1, n)(s)}(y)| \right] < a \quad (y_1 \leq y \leq y_1 + 2)$$

где a — некоторое положительное число, то при помощи предельного перехода при $N \rightarrow \infty$ выражения (3.1) и (3.2) преобразуются к виду, позволяющему распространить предложенную схему на нагрузки p_μ .

В самом деле, вместо (3.1) и (3.2) имеем

$$(3.5) \quad p_\mu = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N M_i p_{\alpha_i, \mu} \frac{\pi}{N} \quad (\mu = 1, 2)$$

$$(3.6) \quad p_{\alpha_i, \rho}^{(0, 0)^{(s)}}(y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tau_{\alpha_i \mu \rho}(T_n) p_\mu^{(0, n)^{(s)}}(y) + \right. \\ \left. + (-1)^{s+1} \sum_{n=1}^N \tau_{\alpha_i \mu \rho}(\Theta_n) p_\mu^{(1, n)^{(s)}}(y) \right] \\ (s = 1, 2; \rho = 1, 2; y_1 \leq y \leq y_1 + 2)$$

Поскольку $|\tau_{\alpha \mu \rho}(T_n)| \leq 1$ и $|\tau_{\alpha \mu \rho}(\Theta_n)| \leq 1$, то из (3.4), (3.6) и (2.1) вытекает, что

$$|p_{\alpha_i, \rho}^{(j, m)^{(s)}}(y)| < 2a \quad (s = 1, 2; \rho = 1, 2; i = 0, 1, \dots, N; y_1 \leq y \leq y_1 + 2)$$

и, следовательно, равенство (3.5) можно записать в форме

$$p_\mu = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} M_i p_{\alpha_i, \mu} \Delta\alpha < M_i a, \quad \Delta\alpha = \frac{\pi}{N-1}$$

В связи с этим, замечая, что $(i-1)\Delta\alpha < \alpha_i < i\Delta\alpha$ и $M_i \equiv 2$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$), окончательно получим

$$(3.7) \quad p_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p_{\alpha \mu} d\alpha \quad (\mu = 1, 2)$$

причем, согласно (3.6)

$$(3.8) \quad p_{\alpha \rho}^{(0, 0)^{(s)}}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{\alpha \mu \rho}(T_n) p_\mu^{(0, n)^{(s)}}(y) + \\ + (-1)^{s+1} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{\alpha \mu \rho}(\Theta_n) p_\mu^{(1, n)^{(s)}}(y) \\ (s = 1, 2; \rho = 1, 2; y_1 \leq y \leq y_1 + 2)$$

В силу принципа суперпозиции искомые скачки

$$(3.9) \quad \chi_\mu^{(j, m)^{(s)}}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \chi_{\alpha \mu}^{(j, m)^{(s)}}(y) d\alpha \\ (s = 1, 2; \mu = 1, 2, j = 0, 1; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

При численном исследовании напряженно-деформированного состояния трещиноватой полуплоскости, отвечающего нагрузке p_μ ($\mu = 1, 2$), интегральное соотношение (3.9) на основе некоторой квадратурной формулы заменяется конечной комбинацией скачков $\chi_{\alpha_i, \mu}^{(j, m)^{(s)}}(i = 0, 1, \dots, N)$. Значения α_j однозначно определяются числом N и способом суммирования. После этого решаются соответствующие обобщенные периодические задачи, для которых нагрузки $p_{\alpha_i, \rho}^{(0, 0)^{(s)}}$ вычисляются из равенства (3.8).

Заметим, что в самом общем случае нагрузку следует разложить на симметричную и кососимметричную составляющие. Если каждая из них удовлетворяет условию (3.4), то рассматриваемая задача и на этот раз сводится к обобщенным периодическим.

4. Внутреннее давление на основной трещине. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние полуплоскости, у которой на берегах основной трещины действует равномерно распределенное внутреннее давление интенсивностью q , а берега остальных трещин свободны от усилий.

$a/2$	y_1	$(m, j) = (0, 0)$		(1.1)		(1.0)	
		$i = 1$	2	1	2	1	2
1,5	0,5	138	128	-23	-27	-3	-2
	1	128	124	-26	-27	-3	-2
	3	122	121	-27	-27	-3	-3
	200	121	121	-27	-27	-3	-3
2	0,5	129	118	-15	-18	-5	-3
	1	118	115	-18	-19	-2	-2
	3	112	111	-19	-19	-3	-3
	200	110	110	-20	-20	-3	-3
4	0,5	123	111	-9	-6	-4	-3
	1	110	106	-6	-6	-3	-2
	3	103	103	-7	-7	-1	-1
	200	101	101	-7	-7	-2	-2
∞	0,5	120	110	—	—	—	—
	1	109	105	—	—	—	—
	3	104	102	—	—	—	—
	200	100	100	—	—	—	—

Разложим нагрузку на симметричную и кососимметричную относительно плоскости Π_0 . Очевидно, что

$$p_1^{(0,0)(1)}(y) = p_2^{(0,0)(1)}(y) = q/2, \quad p_1^{(0,0)(2)}(y) = p_2^{(0,0)(2)}(y) = 0$$

$$p_\mu^{(j,m)(s)}(y) \equiv 0 \quad (s = 1, 2; j = 0, 1; \mu = 1, 2; m = 1, 2, \dots)$$

Можно проверить, что выполняется условие (3.4). Следовательно, указанные составляющие представимы в форме (3.7), а соответствующие им скачки $\chi_\mu^{(j,m)(s)}(y)$ могут вычисляться по формуле (3.9).

В разрешающих уравнениях (2.5) обобщенных периодических задач согласно выражениям (3.8) следует положить

$$p_{\alpha\rho}^{(0,0)(s)}(y) = \delta_{s1}\delta_{\rho\mu}q/2 \quad (s = 1, 2; \rho = 1, 2)$$

где $\mu = 1$ для симметричного и $\mu = 2$ для кососимметричного случая.

При вычислении интегралов (3.9) использовалась квадратурная формула Симпсона с 11 узлами.

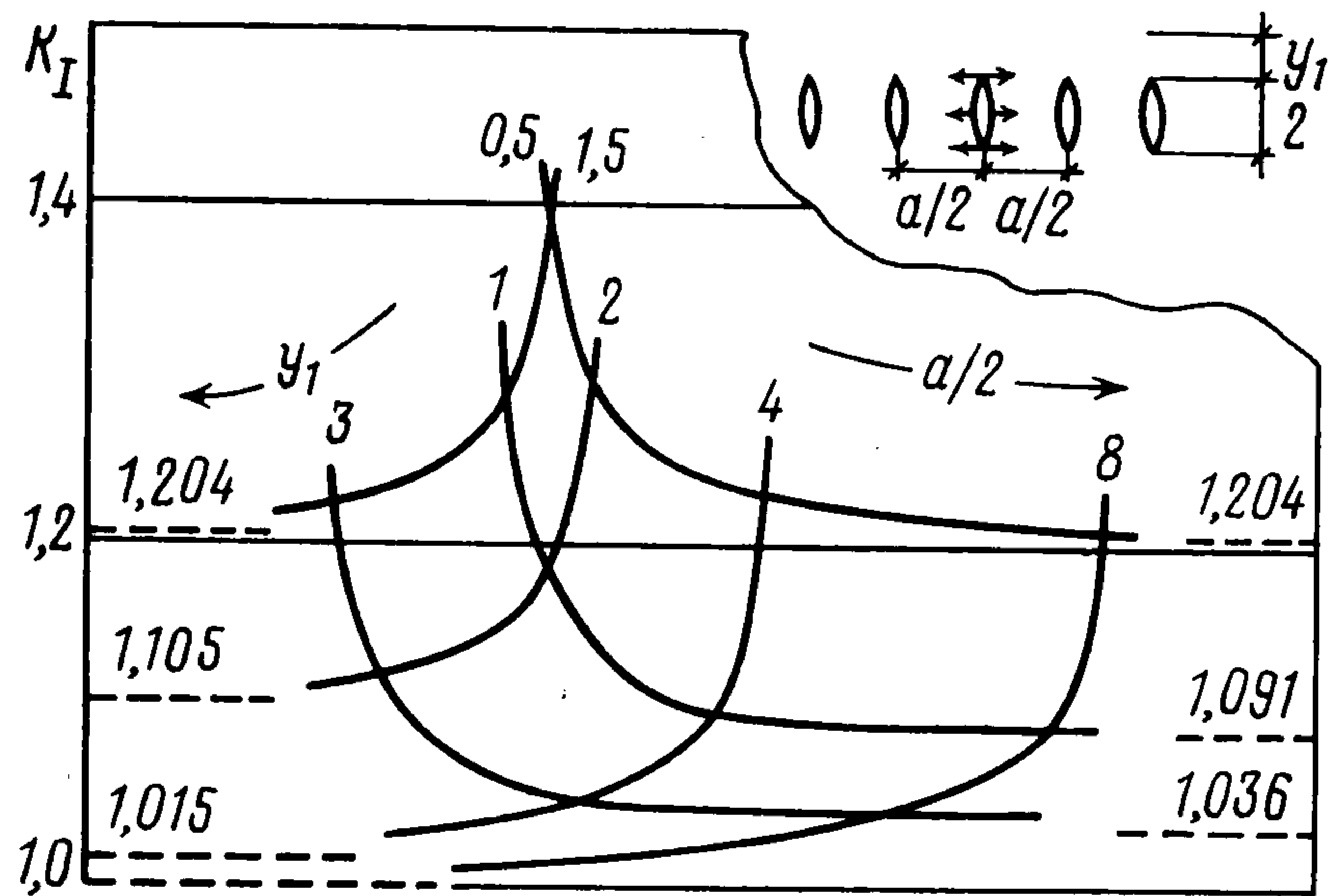
Искомое напряженно-деформированное состояние определяется суперпозицией симметричного и кососимметричного состояний. В частности, коэффициенты $K_{(i)}^{(j,m)(s)}$ интенсивности нормальных ($s = 1$) и касательных ($s = 2$) напряжений в точках с ординатами y_1 ($i = 1$) и $y_1 + 2$ ($i = 2$) отрезка $\Gamma^{(j,m)}$ находятся как

$$K_{(i)}^{(j,m)(s)} = \sum_{\mu=1}^2 K_{\mu(i)}^{(j,m)(s)} \quad (j = 0, 1; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

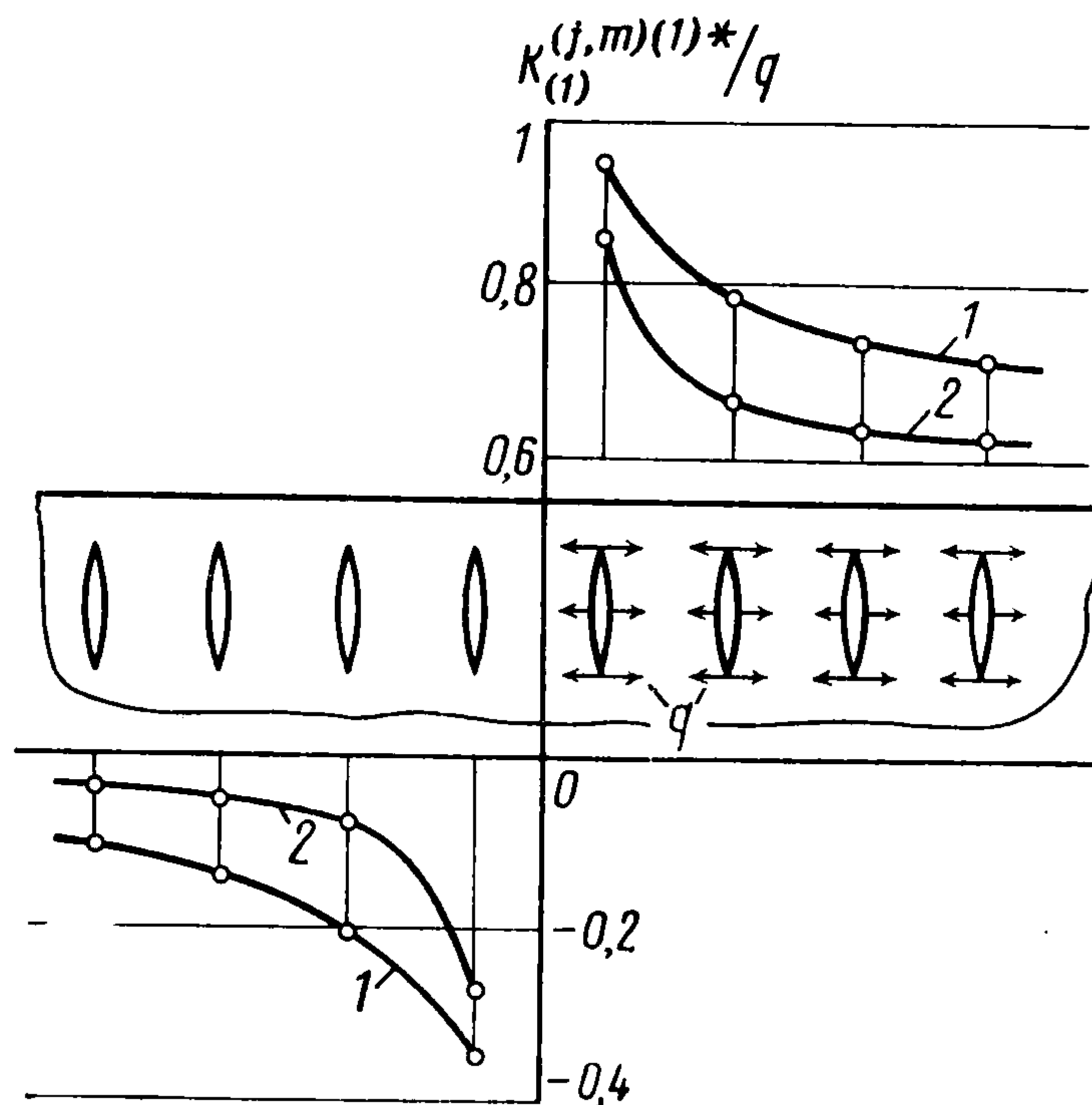
где $K_{\mu(i)}^{(j,m)(s)}$ ($\mu = 1, 2$) — соответствующие коэффициенты интенсивности при нагрузке p_μ .

В табл. 1 приведены величины $10^2 \cdot K_{(i)}^{(j,m)(1)}/q$ для трех трещин при разных значениях параметров $a/2$ и y_1 . Считается, что $e = a/4$, т. е. расстояние между всеми смежными трещинами одинаково и равно $a/2$.

При $a/2 = \infty$ рассматриваемая полуплоскость ослаблена лишь одной (основной) трещиной и значения $K_{(i)}^{(0,0)(1)}$ ($i = 1, 2$) совпадают с данными из работы [6]. При $y_1 \rightarrow \infty$ значения $K_{(i)}^{(j,m)(1)}$ стремятся к величинам соответствующих коэффициентов интенсивности в задаче об изотропной плоскости, ослабленной аналогичной по загрузению и геометрии периодической системой трещин [1].



Фиг. 2



Фиг. 3

Приближение трещин к границе полуплоскости приводит, как обычно, к увеличению коэффициентов интенсивности. Что же касается эффекта сближения трещин, то проведенный численный анализ позволяет сделать новый качественный вывод.

Как известно [1], сближение трещин, нагруженных внутренним давлением, приводит к уменьшению коэффициентов интенсивности. В то же время оказывается, что приближение незагруженных трещин к нагруженной вызывает на ней рост этих коэффициентов.

Для большей наглядности сказанного на фиг. 2 приведена номограмма величины $K_{(1)}^{(0,0)(1)}/q = K_I$. Она содержит линии двух типов. Для каждой линии первого типа значение параметра y_1 зафиксировано ($y_1 = 0,5; 1; 3$), а параметр $a/2$ непрерывно изменяется. Для линий второго типа, напротив, зафиксировано значение параметра $a/2$ ($a/2 = 1,5; 2; 4; 8$). При заданных значениях параметров y_1 и $a/2$ величина $K_{(1)}^{(0,0)(1)}/q$ определяется как ордината точки пересечения соответствующих линий первого и второго типа. На фиг. 2 штриховыми прямыми показаны асимптоты линий номограммы. Их физический смысл очевиден.

5. Другие варианты нагружения трещин внутренним давлением. Очевидно, что при любом нагружении трещин равномерным внутренним давлением характеристики напряженно-деформированного состояния полу-

Таблица 2

$a/2$	$y_1 = 0,5$	1	3	200
2	345	294	263	263
4	200	173	114	114
8	89	65	37	34

плоскости могут быть получены линейной комбинацией соответствующих характеристик, найденных в результате решения задачи, изложенной в п. 4.

Разберем в качестве иллюстрации случай, когда все трещины, расположенные справа от плоскости Π_0 , загружены внутренним давлением с одинаковой интенсивностью q , а слева — не загружены. Подчеркнем, что подобная задача непосредственно не может быть решена с помощью предложенного метода, так как не выполняется условие (3.4).

Сохраняя за обозначением $K_{(i)}^{(j, m)(s)}$ тот же смысл, которое оно имело в п. 4, и понимая под $K_{(i)}^{(j, m)(s)*}$ соответствующие коэффициенты интенсивности в новой задаче, на основе суперпозиции получим

$$(5.1) \quad K_{(i)}^{(0,0)(1)*} = K_{(i)}^{(0,0)(1)} + \Delta_{(i)}^{(1)}$$

$$\Delta_{(i)}^{(1)} = \sum_{j=0}^1 \sum_{m=1}^{\infty} K_{(i)}^{(j, m)(1)} \quad (i = 1, 2)$$

По ряду понятных причин непосредственное вычисление величин $\Delta_{(i)}^{(1)}$ представляется весьма затруднительным. Поэтому применим специальный прием. В обычной периодической задаче, отвечающей нагрузке p_{01} , справедливо представление

$$(5.2) \quad K_{01(i)}^{(0,0)(1)} = K_{(i)}^{(0,0)(1)} + \sum_{j=0}^1 \left[\sum_{m=1}^{\infty} K_{(i)}^{(j, m)(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} K_{(i)}^{(j, -m+j)(1)} \right]$$

Будем считать, что $e = a/4$. Тогда в силу симметрии

$$K_{(i)}^{(j, -m+j)(1)} = K_{(i)}^{(j, m)(1)} \quad (j = 0, 1; m = 1, 2, \dots)$$

Используя обозначение для $\Delta_{(i)}^{(1)}$, введенное в (5.1), из (5.2) получим

$$(5.3) \quad \Delta_{(i)}^{(1)} = (K_{01(i)}^{(0,0)(1)} - K_{(i)}^{(0,0)(1)})/2$$

Коэффициенты $K_{(i)}^{(0,0)(1)}$ были определены в п. 4, а коэффициенты $K_{01(i)}^{(0,0)(1)}$ находятся в результате решения периодической задачи. Поэтому равенство (5.3) позволяет относительно просто вычислить $\Delta_{(i)}^{(1)}$ при различных значениях параметров $a/2$ и y_1 . Некоторые данные о величине $-10^3 \cdot \Delta_{(1)}^{(1)}$ собраны в табл. 2.

Коэффициенты интенсивности на основной трещине определяются по формуле 5.1), а на других трещинах — при помощи очевидных соотношений. В частности

$$K_{(i)}^{(1,1)(1)*} = K_{(i)}^{(0,0)(1)*} + K_{(i)}^{(1,1)(1)}, \quad K_{(i)}^{(0,1)(1)*} = K_{(i)}^{(1,1)(1)*} + K_{(i)}^{(0,1)(1)}$$

$$K_{(i)}^{(1,0)(1)*} = \Delta_{(i)}^{(1)}, \quad K_{(i)}^{(0,-1)(1)*} = K_{(i)}^{(1,0)(1)*} - K_{(i)}^{(1,1)(1)}$$

$$K_{(i)}^{(1,-1)(1)*} = K_{(i)}^{(0,-1)(1)*} - K_{(i)}^{(0,1)(1)}, \dots$$

Условные графики изменения величин $K_{(i)}^{(j, m)(1)*}/q$ ($i = 1, 2$) при удалении от плоскости Π_0 показаны на фиг. 3. Линии 1 и 2 отвечают соответственно значениям $y_1 = 0,5$ и $y_1 = 3$. Параметр $a/2$ принят равным 2. Асимптоты графиков при $m \rightarrow -\infty$ совпадают с осью абсцисс, а при $m \rightarrow \infty$ связаны с обычными периодическими задачами.

Нагрузки на трещинах могут встречаться в самых различных сочетаниях, поэтому с практической точки зрения значительный интерес представляют оценки максимального по величине коэффициента интенсивности напряжений. Если на берега

трещин действуют равномерно распределенные нормальные усилия, по модулю не превышающие q , то путем элементарного анализа можно убедиться, что имеет место точная оценка: коэффициент интенсивности напряжений на любой трещине не может превышать значения

$$K_{(1)}^{(0,0)(1)} + 2\Delta_{(1)}^{(1)}$$

Если же указанные нормальные усилия имеют один знак на всех трещинах (внутреннее давление), то максимальным является значение $K_{(1)}^{(0,0)(1)}$ (фиг. 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
2. Бурыйкин М. Л. Общая схема решения неоднородных линейных задач для симметричных механических систем.— ПММ, 1981, т. 42, вып. 5, с. 849—861.
3. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
4. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
5. Бурыйкин М. Л. О статических и динамических расчетах одномерных регулярных систем.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 513—519.
6. Cook T. S., Erdogan F. Stresses in Bounded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface.— Internat. J. Engng Sci., 1972, v. 8, p. 677—697.

Одесса

Поступила в редакцию
22.V.1984